

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
V = {a, e, i, o, u}, V = {xlx es una vocal}

1.2
{i, t, o}

1.3
{e, x, i, t, o, r, u, n}

1.4
{u, n}

1.5
{c, a, z}

1.6
{2, 4}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}

1.7
{3, 4}, {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {1, 2, 4, 5}

1.8
{2, 4}, {2, 4}, {2, 4}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, {1, 2, 3, 4, 5, 8, 9}, {2, 4, 6, 8, 9}

1.9
{a, b, c, d, e}, {a, b, c, d, e, f, g}, {a, e, d, f, g}, {a, e}, {d}, ∅.

1.10
a) finito
b) finito
c) infinito

1.14
a) A = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}
b) B = {verano, otoño, invierno, primavera}
c) C = {1, 3, 5, 7, 9}
d) D = {12, 14, 16, 18}
e) E = {1, 2, 3, 5, 7, 11, 13}

1.15
(V), (F), (V), (F),(V)

1.16
a) finito
b) unitario
c) infinito
d) vacio
e) vacio

1.17

Por extensión	En forma constructiva
A = {a, e, i, o, u}	A = {xlx es una vocal}
B = { 0, 2, 4, 6, 8}	B = {xlx es un número par menor que 10}
C = {c, o, n, j, u, n, t, o, s}	C = {xlx es una letra de la palabra conjuntos}
D = {1, 3, 5, 7, 9}	D = {xlx es un número impar menor que 10}
E = {b, c, d, f, g, h, j, …}	E = {xlx es una consonante}

1.18
{c, h, a, r, m, t}, {c, h, a, t, r, n}, {c, h, a, r, m, t, n}, {c, h, a}, {h, t}, {h, r}

1.19
a) 125
b) 25
c) 575

1.20
a) 4
b) 3
c) 2

1.21
a) 3
b) 6
c) 1

1.22
a) 2
b) 5
c) 2

1.23
18

1.24
a) 15
b) 41
c) 132
d) 321
e) 1002
f) 1234
g) 544
h) 833
i) 10545
j) 730604
k) 89736
l) 467985

1.25
a) 10
b) 9
c) 40

1.26
a) 590
b) 6

1.27
a) 28
b) 800

1.29
a) 3^{16}
b) 5^{24}
c) 8^{6}
d) 9^{6}
e) 2^{10}
f) 2
g) 2^{8}
h) 2^{12}
i) 2^{20}
j) 1
k) 3^{30}
l) 2^{12}

1.30
a) $1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
b) $1\times10^5 + 2\times10^4 + 5\times10^3 + 3\times10^2 + 6\times10^1 + 8\times10^0$

1.31
a) 89
b) 1195
c) 206

1.40
a) 15,30; b) 7,14; c) 9,18, 3,12, , ,8

1.41
$2 \times 3 \times 7 \times 13$

1.42
$2^5 \times 3 \times 11$

1.43
$3 \times 7 \times 359$

1.44
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

1.45
$2^3 \times 3 \times 17^2$

1.46
$2^4 \times 3 \times 5^2$

1.47
24

1.48
mcd = 60

1.49
mcd = 30

1.50
mcd = 6

1.51
30 cm, 6 de 5 cm, 15 de 2 cm, 10 de 3 cm.

1.52
$\frac{63}{4}$

1.53
$\frac{6}{7}$

1.54
1



1.55
$\frac{36}{91}$

1.56
$\frac{15}{22}$

1.57
$\frac{3}{2}$

1.58
$-\frac{1}{3}$

1.59
16.667 km

1.60
5 m/s

1.61
33.33 m

1.62
25 s, 625 m, 375 m.

1.63
a) 1×10^{6};
b) 1×10^{-6}
c) 1×10^{-10}
d) 1×10^{9}
e) 1×10^{-3}
f) 1×10^{-6}

1.64
x^2

1.65
$x\sqrt[3]{x}$

1.66
$\sqrt[3]{2^2}$

1.67
$\sqrt{3}$

1.68
$18\sqrt{2}$

1.69
$5\sqrt{7}$

1.70
$-\sqrt{2}$

1.71
$2\sqrt[4]{5}$

1.72
$9\sqrt{3}$

1.73
$\sqrt{2}$

1.74
$30 - 5\sqrt{6}$

1.75
$2\sqrt{2} + 1$

1.76
$37 - 8\sqrt{21}$

1.77
1.0×10^{-47}

1.78
$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

1.79
$\frac{5\sqrt{3}}{4}$

1.80
$\frac{3\sqrt{2}}{7} + \frac{5}{7}$

1.81
[2, 6]

1.82
[3, 7]



1.83
[−5, 3]

1.85
(−∞, −5] ∪ [1, +∞)

1.86
(−∞, −3] ∪ [7, +∞).

1.87
[-1, 2]

1.88
(-3,∞)

1.89
(-11/2,3)

1.90
[-6, 4]

1.91
(-∞,-1)∪(6,∞)

1.92
(-∞, 4)∪(4, ∞)

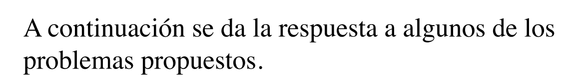
1.93
(-∞,-17] ∪ [-1,∞)

1.94
(-∞,5]

1.95
(-1/3, 2/3)

1.96
(-13/2, 7/2)





A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
a) $0, \text{Im} = -3$, b) $-\frac{1}{3}, \text{Im} = -\frac{4}{3}$, c) $\sqrt{3}, \text{Im} = 1$,
b) d) $-6, \text{Im} = 0$, e) $5, \text{Im} = -1$

2.2
a) $\sqrt{2}, \text{Im} = 7$, b) $-1, \text{Im} = 0$, c) $0, \text{Im}\ 3$,
d) $2, \text{Im} = 2$, e) $\frac{1}{3}, \text{Im} = 4$

2.3
a) 3, b) $\frac{\sqrt{17}}{3}$, c) 2, d) 6, e) $\sqrt{6}$

2.4
a) $3\sqrt{10}e^{-0.1024\pi i}$ b) $5.831e^{0.17202\pi i}$ c) $8.6023e^{0.30257\pi i}$
d) $1.118e^{1.6476\pi i}$ e) $8.9443e^{1.1476\pi i}$

2.7
a) I
b) $3+\sqrt{3}i$
c) $2 - 2i$

2.8
a) $e^{\frac{\pi}{2}i}$, b) $\sqrt{12}e^{\frac{\pi}{6}i}$, c) $\sqrt{8}e^{\frac{\pi}{4}i}$

2.10
1 + 7i

2.11
$-3 - i$

2.12
$5i$

2.13
$-i$

2.14
$-1 + i$

2.15
4/5

2.16
$-(1/2) - (3/2)i$

2.17
$9 + 5i$

2.18
$-1 - 3i$

2.19
$-1 - i$

2.20
$-11 + i$

2.21
$40 - 24i$

2.22
58

2.23
$54 + 10i$

2.24
$-26 - 36i$

2.25
$-\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i$

2.26
$-\frac{136}{65} - \frac{82}{65}i$

2.27
$-\frac{58}{85} - \frac{11}{85}i$

2.28
$-\frac{19}{29} - \frac{25}{29}i$

2.29
$-\frac{47}{25} - \frac{21}{25}i$

2.30
$-\frac{26}{145} - \frac{138}{145}i$



2.31

$-\frac{1}{10}-\frac{31}{30}i$

2.32

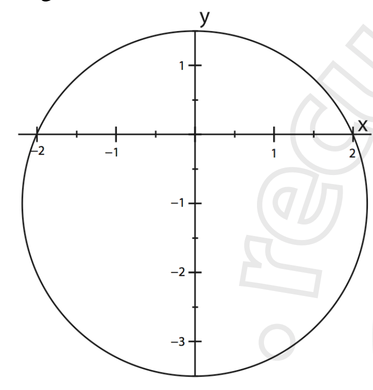
5

2.33

13

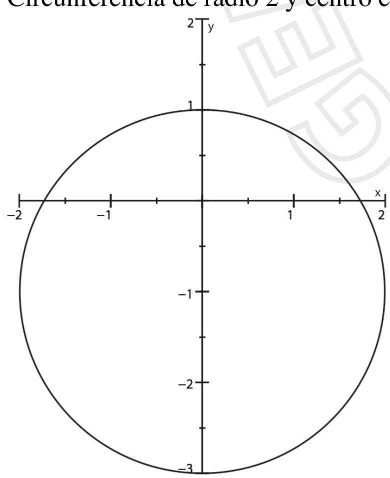
2.35

Región dentro del círculo de radio $\sqrt{5}$ con centro en $(0, -1)$



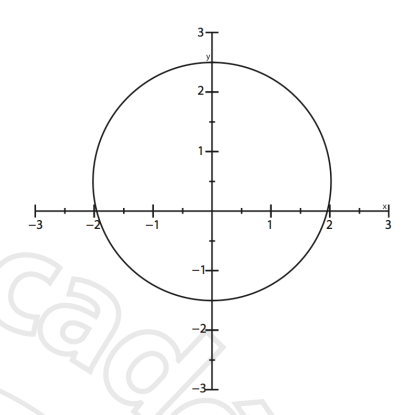
2.36

Circunferencia de radio 2 y centro en (0,–1)



2.37

Circunferencia de radio 2 y centro en (0, 5)



2.38

a) $\frac{15}{8}+\left(2+\sqrt{3}\right)i$

b) $-\frac{31}{8}+\left(4+\sqrt{3}\right)i$

c) -0.0278

d) $\frac{193}{64}+2i$

e) $-2\sqrt{3}$

f) $-2.4154+2.2731i$

g) $-\frac{12}{13}-\frac{18}{13}i$

2.39

$2+7i, 6-3i$

2.40

$2-i, -3i$

2.41

$15-3i, 5+10i$

2.42

$-2+3i, 6-6i$

2.43

$2-1.5i$

2.44

Lados (2, 11), (–6, –8) y (4, –3)

2.45

Si es rectángulo

2.46

$\frac{15}{2}\sqrt{5}$



2.47
$x = 7, y = 3$

2.48
a) $\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$
b) $\left(\sqrt{3} + 3\right) + 5i$
c) $\frac{3+4i}{\sqrt{3}+i}$

2.49
$i^{10} = -1,\ i^{12} = 1,\ i^{11} = -i,\ i^{13} = i$

2.50
$-5i, 5i$

2.51
$\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2}i, \quad \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2}i$

2.52
$-\frac{7}{6} + \frac{\sqrt{71}}{6}i, \quad -\frac{7}{6} - \frac{\sqrt{71}}{6}i$

2.53
$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{39}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{39}}{2}i$

2.58
No interseca el eje x

2.61
$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2},\ -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2},\ -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2},\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\sqrt{2}$

2.62
$2i$

2.63
8

2.64
círculo unitario

2.65
$\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i,\ -i,\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\sqrt{3},\ i,\ \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$

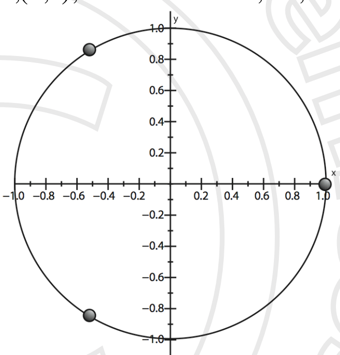
2.66
a) $\frac{27}{4}\sqrt{3} - \frac{27}{4}i$
b) $-2{,}0 + 2{,}0i$
c) 64
d) $1.1054 + 0.19491i,\ 0.3839 + 1.0548i,\ -0.7215 + 0.85986i,\ -1.1054 - 0.19491i,\ -0.3839 - 1.0548i,\ 0.7215 - 0.85986i$

2.67
$1.6986^{i\frac{\pi}{4}},\ 1.6986^{i\frac{9\pi}{20}},\ 1.6986^{i\frac{17\pi}{20}},\ 1.6986^{i\frac{5\pi}{4}},\ 1.6986^{i\frac{33\pi}{20}}$

2.68
$z^2 - 2z + 5 = 0$

2.69
1

2.70
$1, (1,0),\ -0.5 + 0.86603i, -0, 0.5 - 0.86603i$



2.71
$-1.3747 + 0.7937i$

2.72
a) $2\sqrt{53}e^{i(6)},\ 2\sqrt{53}e^{i(2.86)},\ 6.8681 \times 10^{-2}e^{i(6.0049)}$
b) $2\sqrt{2}e^{i(5.4978)},\ 2\sqrt{2}e^{i(3.9270)},\ 3.5355e^{i(5.4978)}$

2.73
$\frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2},$
$\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}} + \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}i\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+5},\ -2$

2.76
a) $k = 0$
b) $\pm\sqrt{2}$

2.77
z_1 y z_2 son colineales



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1

a) $\frac{8}{3}x^4$

b) $13x^3y^2$

c) $\frac{11}{12}x^6$

d) $\frac{61}{120}x^4y^3z$

e) $\frac{1}{3}x^4$

f) $\frac{4}{5}x^3$

3.2

a) $5x^2 - 7x + 9$

b) $2x^3 - 4x^2 + 8x - 2$

c) $-5x^5 + 10x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 17$

d) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{88}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{23}{2}$

e) $-10x + 7y - 6z + 6$

f) $-13x^2 + 4xy^2 - 2y^2$

3.3

a) $-6x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 20x^2 + 8x - 3$

b) $24x^5 - 12x^3 + 6x^2$

c) $-x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x + 3$

d) $9x^2 - 4$

e) $-3x^5 - 5x^4$

3.4

a) $-x^3 - 2x^2 + 1$

b) $6x^4 + 14x^3 - 4x^2 - 10x + 3$

c) $3x^2 - x - 4$

d) $12x^3 - 12x^2 - 11x + 8$

e) $x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

3.5

a) $x^4 - 2x^2 + 1$

b) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$

c) $9x^4 - 12x^2y + 4y^2$

d) $\frac{9}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{4}{9}$

e) $\frac{25}{16}x^6 - \frac{5}{2}x^5 + x^4$

3.6

a) $3x^3 + 6x^2 - 2x + 21$

b) $-2x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 14x + 5$

3.7

a) $-\frac{5}{4}x^2y - \frac{73}{20}xy^2 + \frac{25}{6}xy$

b) $\frac{5}{4}x^2y + \frac{73}{20}xy^2 - \frac{25}{6}xy$

c) $\frac{5}{4}x^2y + \frac{73}{20}xy^2 - \frac{25}{6}xy$

d) $\frac{5}{4}x^2y + \frac{73}{20}xy^2 - \frac{25}{6}xy$

e) $\frac{1}{4}x^2y - \frac{43}{20}xy^2 + \frac{5}{2}xy$

f) $\frac{5}{12}x^2y - \frac{17}{20}xy^2 + \frac{7}{2}xy$

3.8

a) $\frac{9}{8}x^3 + \frac{22}{15}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{11}{3}$

b) $\frac{1}{8}x^3 - \frac{2}{15}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{7}{3}$

c) $-\frac{5}{16}x^6 - \frac{5}{6}x^5 - \frac{263}{240}x^4 + \frac{17}{20}x^3 + \frac{1339}{360}x^2 - \frac{1}{3}x - 2$

d) $-\frac{5}{4} + \dfrac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{13}{6}}{\frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}}$

3.9

a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$

c) $m^2 - 4$

d) $25x^2 - 9$

3.10

a) $-a^4 + 5a^2 - 9a + 4$

b) $-\frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{2}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{2}x$

c) $4x^3 - 3x^2 + 2x$

d) $2x^3 + 3x + 4$

e) $4x^3 + 3x^2 - x - 7 - \dfrac{32x - 21}{2x^2 - 5x + 3}$

f) $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 26x + 78 + \dfrac{231x - 3}{x^2 - 3x}$

3.11

a) $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b) $x^4 - 12x^2 + 36 = (x^2 - 6)^2$

c) $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$

d) $16x^2 + 24xy + 9y^2 = (4x + 3y)^2$

e) $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

f) $4x^2 - 16y^2 = (2x - 4y)(2x + 4y)$

g) $4x^2 - 16xy + 16y^2 = (2x - 4y)^2$

h) $9x^2 - 49z^2 = (3x - 7z)(3x + 7z)$

i) $9x^2 + 42xz + 49z^2 = (3x + 7z)^2$

j) $\frac{x^2}{4} - 3xy + 9y^2 = \left(\frac{x}{2} - 3y\right)^2$

GRUPO EDITORIAL PATRIA

3.12

a) $\frac{4}{25}x^2 - \frac{5}{3}xy + \frac{9}{16}y^2 = \left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y\right)^2$

b) $16x^2y^4 - 25 = (4xy^2 - 5)(4xy^2 + 5)$

c) $(x - y)^2 - z^2 = (x - y - z)(x - y + z)$

d) $x^2+2xy+y^2-z^2=(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$

e) $\left(a - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = \left(a - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)\left(a - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = \left(a - \frac{4}{3}\right)a$

f) $a^2-x^2-2xy-y^2=a^2-(x+y)^2=(a-x-y)(a+x+y)$

g) $a^2 - x^2 + 2xy - y^2 = (a - x + y)(a + x - y)$

h) $16y^2 - x^4 = (4y - x^2)(4y + x^2)$

3.13

a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}y^2 = \frac{(2y-3)^2}{36}$

b) $\frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + x^2 = \frac{(3x-1)^2}{9}$

c) $x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{36} = \frac{(6x^2+1)^2}{36}$

d) $\frac{a^2}{9} - \frac{b^2}{25} = \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{5}\right)\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{5}\right)$

e) $a^6 - 1 = (a^3 - 1)(a^3 + 1)$

f) $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$

g) $16y^2 - x^4 = (4y - x^2)(4y + x^2)$

h) $3x^6 + 9x^2 = 3x^2(x^4 + 3)$

i) $x^3 + 20x^2 - 16x = x(x^2 + 20x - 16)$

3.14

a) $24x^5 + 18x^4 - 30x^2 = 6x^2(3x^2 + 4x^3 - 5)$

b) $x^4 - x^3 + x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$

c) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125 = (x + 5)^2$

d) $4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2$

e) $\frac{1}{36} - x^2 = \left(\frac{1}{6} - x\right)\left(\frac{1}{6} + x\right)$

3.15

a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$

b) $-10x + 25 + x^2 = (x - 5)^2$

c) $\frac{1}{4}x^2 - 9 = \left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(\frac{x}{2} + 3\right)$

d) $36x^2 - 12x^5 + 60x^3 = -12x^2(-5x + x^3 - 3)$

e) $6x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (2x - 1)(3x^2 + 2)$

3.16

a) $\left(x^3 - x^2 + 11x - 10\right) \div (x - 2)$

$= x^2 + x + 13 + \frac{16}{x-2}$

b) $\left(8x^3 - 3x + x^4 + 20 + 12x^2\right) \div (x + 3)$

$= x^3 + 5x^2 + 3x + 6 + \frac{2}{x+3}$

c) $\left(6x^4 + 20x^3 - 41x^2 + 50x - 20\right) \div (x + 5)$

$= 6x^3 - 10x^2 + 9x + 5 + \frac{5}{x+5}$

d) $\left(20 - 20x^3 + 5x^5\right) \div (x - 2)$

$= 5x^4 + 10x^3 + \frac{20}{x-2}$

3.17

a) $\left(20 - 22x^3 - 5x^5\right) \div (x - 2)$

$= 5x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 4x - 8 + \frac{4}{x-2}$

$(20 - 22x^3 + 5x^5) \div (x - 2) = 5x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 4x - 8 + \frac{4}{x-2}$

b) $\left(\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 + 3x^4 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{2}{3}x + 4\right) \div (x - 2)$

$= \frac{1}{2}x^5 + \frac{7}{5}x^4 - \frac{1}{5}x^3 - \frac{37}{30}x^2 - \frac{37}{15}x - \frac{64}{15} + \frac{68}{15(x-2)}$

c) $\left(7x^2 + \frac{2}{3}x^5 + \frac{11}{2}x - \frac{15}{4}x^3 + \frac{1}{2}\right) \div (x + 3)$

$= \frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{x}{4} + \frac{1}{6}$

3.18

a) -234

b) $-\frac{17}{54}$

c) $\frac{1}{6}$

d) -3

e) 0

f) $\frac{5}{2}$

3.22

$P(x) = x^4 - 6x^2 - 27 = (x + 3)(x - 3)(x^2 + 3)$,
el polinomio tiene una raíz positiva y una negativa.

3.23

raíz en $x = 1$

3.24

$-1{,}05$

3.25

Las raíces del polinomio son:
$1,\ 1 + 3i,\ 1 - 3i,\ \frac{-3+7i}{4},\ \frac{-3-7i}{4}$

3.26

a) Aproximada es -1.48

b) Aproximada es -0.42

c) Las raíces son $-3, 1, 3, -1$

3.27
a)Las raíces son $-5, 6, 2$
b) Las raíces son -3 de multiplicidad 2 y -4
c) Las raíces son $7, -3, 2$
d) Las raíces son $1, -7, 4, -2$
e) Las raíces son $-3, 1$ ambas de multiplicidad 2

3.28
a) 3 negativas 1 positiva
b) 3 positivas y 3 negativas
c) 1 positiva y 2 negativas

3.29
a) Las raíces son $4, 2, \frac{1}{3}, -3$
b) Las raíces son $\frac{1}{3}, 6, -1, 1$
c) Las raíces son $2, 1, -10, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$

3.30
a) 1,25
b) −3,78
d) −1,3
e) −1,73

3.31
a) $x^3 - 8x^2 + 22x - 20$
b) $x^3 - 15x^2 + 73x - 111$
c) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x + 6$
d) $x^3 - \frac{7}{3}x^2 + x - \frac{7}{3}$

3.32
a) $\pm\sqrt{2}$, $\pm i$
b) $i, -i$, ambas con multiplicidad doble
c) $2 + i, 2 - i, 1 + i, 1 - i$

3.33
7 y 15

3.34
8 y 13

3.35
10 y 6

3.36 18.349 cm, 5.4498 cm

3.37
6 y 7
3.38
6 y 15

3.39
9 cm y 12 cm

3.40
Base = 12 cm, Altura = 4 cm

3.41
5, 7, y 9

3.42
6 y 36

3.43
a) 0, 2, 3
b) 3, 0, -3
c) 1, -4, 5
d) 1.5650,-1.0650, 0

3.44
a) 3.7065, $-0.35326+1.2223i$, $-0.35326-1.2223i$
b) -0.88165, $1.2408+0.21976i$, $1.2408-0.21976i$
c) $i, -i$, 2
d) 1.6401, -0.22117, -0.91894

3.45
a) 3, 2, -3, -1
b) $-1.6068 - 0.59197i$, $5.4113 + 4.4005i$, $1.8313 - 2.5927i$, $4.3643 - 1.2159i$
c) -1.0, -2.4909, 0.65662, 1.8342

3.46
$x^4 - 29x^3 + 3x^2 - 29x + 1 = 0$
$x^4 - 29x^3 + 3x^2 - 29x + 1 = 0$,
$1.7262\times10^{-2} - 0.99985i$, $1.7262\times10^{-2} - 0.99985i$,
3.4565×10^{-2}, 28.931



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1
a) (0,4/5), (4,0)
b) (0,2), (10/3,0)
c) (0,5), (4,0)
d) (0,3), (2,0)
e) (0,6), (3,0)
f) (0, 3/2), (3,0)
g) (0,-4), (-8/7,0)
h) (0,2), (1,0)
i) (0,-2), (1,0)
j) (0,-2), (3,0)

4.2
a) -4
b) 5/3
c) -2
d) 4/3
e) 1
f) 25/21
g) -27

4.13
24, 25, 26

4.4
14, 5

4.5
20

4.6
5

4.7
17

4.8
29

4.9
23

4.10
15, 30, 45

4.11
15

4.12
4

4.13
8 y 28

4.14
28 y 34

4.15
María 21, Esther 7, Isabel 16

4.16
38 y 14

4.17
10 años

4.18
gomas \$2, lápiz \$4, cuaderno \$26

4.19
Pablo 28, Tobías 14, María 9,33

4.20
25

4.21
40 kg del café colombiano y 40 kg del café brasileño.

4.22
a) (0,8), (1,28/3), (2,32/3), (3,12), (4,40/3)
b) (0,-1), (1,-2), (2,-3), (3,-4), (4,-5)
c) (0,-7), (1,-1), (2,5), (3,9), (4,17)

4.23

a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \end{array}\right)$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \end{pmatrix}; \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 15 \\ 6 & 5 & 21 \end{array}\right)$

c) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 48 \end{pmatrix}; \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 29 \\ 8 & 4 & 48 \end{array}\right)$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}; \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 7 \\ 7 & 2 & 16 \end{array}\right)$

e) $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad (A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 2 & 10 \\ 9 & -3 & 6 \end{array}\right)$



4.24
a) $x = 2,\ y = 3,$
b) $x = 1,\ y = 3$
c) $x = 5,\ y = 2$
d) $x = 2,\ y = 1$
e) $x = 1,\ y = 1$

4.25
a) $x = 2,\ y = 3$
b) $x = 1,\ y = 3$
c) $x = 5,\ y = 2$
d) $x = 2,\ y = 1$
e) $x = 1,\ y = 1$

4.26
a) $x = 2,\ y = 3$
b) $x = 1,\ y = 3$
c) $x = 5,\ y = 2$
d) $x = 2,\ y = 1$
e) $x = 1,\ y = 1$

4.27
a) $x = 2,\ y = 4$
b) $x = 5,\ y = 3$
c) $x = 3,\ y = -2$
d) $x = 5,\ y = -1$
e) $x = 2,\ y = 4$
f) $x = 3,\ y = 4$

4.28
25 y 12

4.29
30 y 24

4.30
9 mujeres y 6 hombres

4.31
7 de $10 y 6 de $5

4.32
manzanas $15 por kg, naranjas $10 por kg

4.33
45

4.34
79

4.35
a) inconsistente, no tiene solución
b) si es consistente determinado, una de las ecuaciones se hace 0 = 0
c) inconsistente, no tiene solución

4.36
a) (0,0,0)
b) $\left(\frac{13}{11}, \frac{4}{11}, \frac{34}{11}\right)$
c) (0,0,0)
d) $\left(\frac{37}{14}, \frac{9}{7}, -\frac{20}{7}\right)$

4.37
a) m=-47/191, n= -49/191, p=-20/191, q=-75/191
b) p=12/11, q=-113/99, m=-19/33, n=161/99
c) x=-41/6, y=14, z=-7/6, w=-5
d) A=0, B=0, C=0, D=0, E=0

4.38
a=12, s=4, u=2, t=5

4.39
x=0.375, y= 1.0625, z=0.5625

4.40
a) k=0
b) k= 2, x=3, y=2, z=-1

4.41
PRI 28, PAN 38, PRD 34

4.43
43, 30, 17

4.43
28, 24, 8

4.44
225, 75, 100

4.45
a) consistente, solución trivial
b) inconsistente, no tiene solución
c) consistente, número infinito de soluciones



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1

a) 3, -1, 3, 2, 2
b) 23, -11, 43, 22, 12
c) -1, 4, -3, 2, 2
d) -3, 2, 2, 4, 1

5.2

$A+B=B+A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, conmutativa

5.3

No se pueden realizar porque son de orden diferente.

5.4

Si	3×5
No	
No	
Si	7×2
No	
Si	5×2
Si	3×4
No	
Si	2×4

5.5

a) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A+B,\ \ B+A,\ \ A-B,\ \ B-A$, no se pueden realizar

por ser de diferente orden, $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -18 & 11 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -0 \\ -4 & -6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},$

no se pueden realizar, no se pueden realizar,

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

e) No se puede realizar: $A+B,\ \ B+A,\ \ A-B,\ \ B-A,$

$A\times B,\ \ B\times A,\ \ A^t=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ B^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A\times B$ y $B\times A$ no se puede realizar,

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$



5.6

$$\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 4 & 10 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

5.7

$$\begin{pmatrix} 37 & 31 & -19 & 39 \\ -51 & -47 & 32 & -53 \\ 13 & 21 & -10 & 15 \\ -13 & -13 & 27 & -20 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -13 & -30 & -39 & -24 \\ -5 & -8 & -8 & -14 \\ -15 & -20 & -42 & -22 \\ 1 & 27 & 13 & 23 \end{pmatrix}$$

5.8

a) $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 135 & -109 & 91 \\ -39 & 92 & -33 \\ -45 & 3 & 95 \end{pmatrix}$

b) $3A - 3B = \begin{pmatrix} 58 & -50 & 134 \\ 7 & 67 & -46 \\ -13 & -21 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A^2 - 5B = \begin{pmatrix} 76 & -38 & 102 \\ -5 & 61 & -13 \\ 41 & 0 & 19 \end{pmatrix}$

d) $A + A^2 + B + B^2 = \begin{pmatrix} 129 & -107 & 90 \\ -34 & 91 & -34 \\ 48 & 7 & 106 \end{pmatrix}$

5.10

a) $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} & 7 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{9}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{17}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{17}{2} & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

5.12
Si es ortogonal

5.13
$x = \frac{4}{5},\quad y = \frac{4}{5} \qquad x = -\frac{4}{5},\quad y = -\frac{4}{5}$

5.14

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

5.15

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.19
No

5.23
Para $k \neq 3$

5.24

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.25
1, 1

5.26
$p = \frac{308}{79},\quad q = -\frac{102}{79},\quad r = \frac{93}{79},\quad s = \frac{63}{79}$

5.27
2, 3, 4

5.28
$a = -1,\quad b = -2,\quad c = 3$

5.29

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



5.30

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 13 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}, 32$$

5.32

a) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 33 & -15 & -13 \\ -33 & -13 & -1 \\ 11 & 9 & -23 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 \\ -49 & 44 & -19 \\ -48 & 33 & -13 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -22 & 21 & 13 \\ 11 & -21 & -24 \\ 0 & -7 & 14 \end{pmatrix}$

5.33

a) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{15}{154} & \frac{13}{154} \\ \frac{3}{14} & \frac{13}{154} & \frac{1}{154} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{9}{154} & \frac{23}{154} \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \frac{2}{11} & 0 & \frac{1}{11} \\ -\frac{49}{55} & \frac{4}{5} & -\frac{19}{55} \\ -\frac{48}{55} & \frac{3}{5} & -\frac{13}{55} \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{11} & -\frac{13}{77} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{11} & \frac{24}{77} \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$

5.34

a) (2, -1, 1)

b) $\left(-1-\frac{t}{7},\ -1+\frac{2t}{7},\ t\right)$

c) $\left(\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$

d) $(5,\ 3,\ -1)$

e) Inconsistente

f) Inconsistente

g) $(4,\ 3,\ 2,\ 1)$

h) $(-7t,\ 5t,\ t)$

i) $(0,\ 0,\ 0)$

j) $(1,\ -2,\ 3)$

k) Inconsistente

l) $(1,\ 2,\ -1)$

m) $(1-a,\ -a-1,\ a)$

5.35

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5.36

(40, 6, 2)



5.37
(40, 20, 40)

5.38
(20, 200, 2000)

5.39
(16, 14, 10)

5.40
(1.2, 1.5, 1.8)

5.41
(5, 3, 2)

5.42
a) k=1, indeterminado
b) k=2, indeterminado
c) k=1 o 2, indeterminado

5.43
$\alpha \neq 0$

5.44
Consistente determinado $x = 3+5, \quad y = -2, \quad z = -3$

5.45
Si = 1 consistente indeterminado
$x = s, \quad y = t, \quad z = 3 - s - t$ con s, t R.

5.46
a) $-52, \quad \left(\frac{59}{52}, -\frac{4}{13}\right)$
b) 0, inconsistente
c) 0, consistente $x = \left(\frac{1}{2}\right)t_2 + \left(\frac{3}{4}\right), \quad y = t_2$

5.47
a) $\left(-\frac{13}{5}, \frac{22}{5}, \frac{63}{5}\right)$
b) $x = \frac{546}{263}, \quad y = \frac{556}{263}, \quad z = -\frac{533}{263}, \quad u = \frac{594}{263}$
c) $x = -\frac{17}{2}, \quad y = -\frac{17}{2}, \quad z = \frac{3}{2}, \quad u = -\frac{7}{2}, \quad v = 7$

5.48
Si $\alpha \neq 0$, sistema consistente, $x = \frac{5}{\alpha}, \quad y = -\frac{5}{2\alpha}, \quad x = \frac{5}{2\alpha}$

5.50
Rango matriz de coeficiente 3, rango matriz ampliada 3, número de incógnitas 3, sistema consistente determinado, solución 1, − 2, 3

5.51
$\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 15 \end{pmatrix}$, todas de rango 2





A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

a) Lineal b) No lineal c) No Lineal
d) Lineal e) No lineal

1.2

a) General: $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$, $x_1 = -2 + 3\alpha - \frac{1}{2}\beta$,

Particular: $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ y $x_1 = 0$.

b) General: $x_2 = \alpha$, $x_1 = -6 - 3\alpha$

Particular: $x_2 = 0$, $x_1 = -6$

c) General: $y = \alpha$, $z = \beta$, $w = \gamma$,

$x = \frac{1}{3} - \alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{5}{3}\gamma$

Particular: $y = 1$, $z = -3$, $w = 0$, $x = -\frac{3}{2}$

d) General: $b = \alpha$, $c = \beta$, $d = \gamma$,

$a = -4 - \frac{1}{2}\alpha + \beta - 2\gamma$,

Particular: $b = -2$, $c = 1$, $d = -1$ y $a = 0$.

e) General: $y = \alpha$, $x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\alpha - \frac{1}{2}$

Particular: $y = \sqrt{2}$, $x = \pi - \frac{1}{2}$.

1.3

a) Solución única: $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$

e) Solución única $x = \frac{17}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{4}{3}$

f) Solución única: $a = 2$, $b = -1$

g) Solución única: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$

h) Solución única:
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = -4$

1.4

a) Solución única
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

b) Solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

e) Solución única
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$

f) Solución única $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$

g) Solución única $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

1.5

a) $y = \alpha$, $x = -2\alpha$

b) $x_3 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_1 = 3\alpha + 2\beta$

c) $y = \alpha$, $z = \beta$, $w = \gamma$, $x = \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta + 2\gamma$

d) $y = \alpha$, $x = (\tan^2)\alpha$

e) $b = \alpha$, $c = \beta$, $d = \gamma$, $e = \eta$,
$a = -\alpha - \beta - \gamma - \eta$

1.6

a) i) $k \neq -2$, $k \neq 1$
ii) $k = -2$, $k \neq 1$
iii) $k = -2$, $k = 1$

b) i) No tiene solución única
ii) $k_3 - k_2 - k_1 \neq 0$
iii) $k_3 - k_2 - k_1 = 0$

c) i) $m \neq 4$, $n \in R$
ii) $m = 4$, $n \neq 4$
iii) $m = 4$, $n = 4$

1.7

a) $a \neq -2$, $a \neq 4$ b) $a = -2$, $a = 4$

1.8

$$\cos(\alpha) = \frac{a^2}{b^2 + c^2 - 2bc},$$

$$\cos(\beta) = \frac{b^2}{a^2 + c^2 - 2ac},$$

$$\cos(\gamma) = \frac{c^2}{a^2 + b^2 - 2ab}$$

1.9

$a = 1$, $b = -6$, $c = 2$ y $d = 10$, es decir,
$p(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 10$



1.10

Una respuesta posible es $\begin{matrix} -2x+4y=1 \\ 2x+y=3 \end{matrix}$

1.11

Una respuesta posible es $\begin{matrix} x-2y=-3 \\ -3x+6y=9 \end{matrix}$

1.12

Una respuesta posible es $\begin{matrix} 8x+4y=0 \\ -4x-2y=-1 \end{matrix}$

1.13

a) $\begin{matrix} -x+3y+2z-4w=5 \\ 0x+y+3z-4w=3 \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} 2x_1+4x_2-5x_3+3x_4=0 \\ 0x_1+0x_2+x_3-x_4=0 \end{matrix}$

c) $\begin{matrix} a+0b+c=2 \\ 0a+b+0c=2 \\ 0a+0b+c=2 \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} x_1+3x_2-2x_3+5x_4-3x_5=0 \\ 0x_1+x_2+x_3-3x_4+x_5=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+x_4-2x_5=0 \end{matrix}$

e) $\begin{matrix} x-2y+4z=2 \\ 0x+y-3z=-1 \\ 0x+0y+0z=3 \end{matrix}$

1.14

a) Número infinito de soluciones
$y=\alpha,\quad w=\beta,\quad x=-9-\alpha+10\beta,\quad z=-7+7\beta$

b) Número infinito de soluciones
$x_3=\alpha,\ x_5=\beta,\ x_4=-\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\beta,\ x_1=-\frac{17}{3}-\alpha-\frac{56}{9}\beta,\ x_2=3+2\alpha+\frac{12}{9}\beta$

c) Número infinito de soluciones
$z=\alpha,\quad y=-\frac{6}{7}+\frac{11}{7}\alpha,\quad x=\frac{11}{7}-\frac{5}{7}\alpha$

d) Número infinito de soluciones
$x_3=\alpha,\ x_5=\beta,\ x_4=2,\ x_1=-3-4\alpha-\beta,\ x_2=1+2\alpha+\beta$

e) Número infinito de soluciones
$d=\alpha,\quad e=-1,\quad c=4,\quad a=6+\alpha,\quad b=-1+\alpha$

1.15
Se tiene que llegar a alguna inconsistencia.

1.16

a) Solución única: $x_1=1,\ ,x_2=\frac{2}{3},\ x_3=-\frac{2}{3}$

b) Sin solución.

c) Número infinito de soluciones:
$x_4=\alpha,\ ,x_3=8-2\alpha,\ x_2=-1,\ x_1=-2+\alpha$

d) Número infinito de soluciones:
$w=\alpha\ ,\ z=\frac{35}{17}-\frac{25}{17}\alpha,\ y=\frac{29}{17}-\frac{28}{17}\alpha,$
$x=-\frac{21}{17}+\frac{15}{17}\alpha$

e) $x=-\frac{4}{3},\quad y=-\frac{23}{90},\quad z=\frac{25}{18},\quad w=\frac{34}{45}.$

f) Solución única: $x=-1,\ y=2,\ z=0$

1.17

a) Número infinito de soluciones
$w=\alpha,\quad x=6\alpha,\quad y=-7\alpha,\quad z=-\alpha$

b) Número infinito de soluciones
$x_3=\alpha,\quad x_4=\beta,\quad x_2=-4\alpha+7\beta,\quad x_1=11\alpha-18\beta$

c) Número infinito de soluciones
$z=\alpha,\quad y=\frac{8}{5}\alpha,\quad x=\frac{2}{5}\alpha$

d) Número infinito de soluciones
$x_4=\alpha,\quad x_3=-\alpha,\quad x_2=-\alpha,\quad x_1=-\alpha$



e) Número infinito de soluciones
$w=\alpha,\quad z=\alpha,\quad y=19\alpha,\quad x=30\alpha$

1.18
$q=-4$ y $t=5$

1.19
a) $a\neq 0$ y $b\neq 2$
b) $a\neq 0$ y $b=2$, $a=0$ y $b=2$
d) $a=0$ y $b\neq 2$

1.20
$k\neq -2,\quad k\neq 1$

1.22
$m=4,\quad n\neq 4$

1.23
$a\neq -2,\quad a\neq 4$

1.24
$a=-4$ y $b=5$

1.25
$a\neq 0$ y $b\neq 2$

1.26
a) $k\neq 1$ b) $k=1$

1.27

$$\cos(\alpha)=\frac{a^2}{b^2+c^2-2bc},$$

$$\cos(\beta)=\frac{b^2}{a^2+c^2-2ac},$$

$$\cos(\gamma)=\frac{c^2}{a^2+b^2-2ab}$$

1.28
Tiene una inconsistencia, $d=10$ y $d=6$.

1.29
$x=0$, $y=0$ y $z=1$.

1.30

$$A=-\frac{1}{5},\ B=-\frac{1}{3},\ C=0,\ D=-\frac{2}{15}\ \text{y}\ E=-\frac{1}{5}$$

1.31
$p(x)=3x^2-18x-29$

1.32
a) Una línea recta.
b) Un punto.
c) $-x_1-x_2-x_3=-3$

1.33
$p(x)=x^3-3x$

1.34
45 miligramos de semiconductor A, 48 gramos semiconductor B y 54 miligramos de semiconductor C.

1.35
2 tipo $M1$, 3 tipo $M2$ y 6 tipo $M3$.

1.36
120 dólares en la memoria, 160 dólares en el microprocesador y 220 dólares en la tarjeta

1.37
Flujo de entrada *140* litros/hora y flujo de salida *40* litros/segundo.

1.38
$i_1=\frac{46}{25}$ amperes, $i_2=\frac{42}{25}$ amperes y $i_3=\frac{4}{25}$ amperes.

1.39
a) $x=3,\quad y=-1,\quad z=2$
b) Sin solución
c) $z=\alpha,\quad y=\alpha+1,\quad w=\beta,\quad x=\alpha+\beta-2$

1.40
a) $a=\alpha,\quad b=\alpha,\quad c=-\alpha$
b) $x_1=0,\quad x_2=0,\quad x_3=0$
c) $w=\alpha,\quad z=\alpha,\quad y=\beta,\quad x=\alpha-2\beta$

1.41
Un posible sistema es $\begin{matrix} 3x+y=3 \\ 4x+2y=6 \end{matrix}$

1.42
$i_1=1$ amper, $i_2=4$ amperes e $i_3=3$ amperes.

1.43
Solo hay que reducir los sistemas y verificar que son iguales.

1.44
$x-3y-2z=0$

1.45
24 km.

1.46
$P=(-1,2,-3)$

1.47
16 días

1.48
$A=3,\ B=1,\ C=2$

1.49
100^{O}, 80^{O}, 100^{O} y 80^{O}

1.50
180 km, 3 horas.

1.51
$A=0,\quad B=\frac{1}{4},\quad C=-\frac{1}{4}$

1.52
$k=\frac{8}{3}$

1.53
34 modelo A, 4 modelo B y 18 modelo C.

1.54
$x_1=1,\quad x_2=-2,\quad x_3=6,\quad x_4=-3,\quad x_5=-4,\quad x_6=3$

1.55
i) $a+b+c=0$
ii) $a+b+c\neq 0$
iii) No es posible

1.56
i)
$x_5=\alpha,\quad x_1=\alpha-10,\quad x_2=-\alpha+30,\quad ,x_3=\alpha-10,\quad x_4=\alpha+10$

ii) Para $\alpha=10$

1.57
Solución única si $\lambda\neq -5$ y $\lambda\neq 2$
Infinidad de soluciones si $\lambda=2$
Sin solución si $\lambda\neq -5$

1.58
10000 pájaros en la isla A,
5000 pájaros en la isla B,
20000 pájaros en la isla C.



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1

a) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

c) No es posible la operación

2.2

a) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & 0 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -6 & -5 \\ -3 & 6 & -8 \end{pmatrix}$

c) No está definido.

d) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$

h) No está definido

i) $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix}1$

2.3

$x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 3$.

2.4

$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ donde $\alpha, \beta \in R$.

2.5

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$

2.6

a) $x = -1$, $y = 4$ y $z = -3$

b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$

c) No tiene solución

d) $x_1 = 1-\alpha$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ y $x_4 = \alpha$

2.7

a) $A_{11} = -18$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 4$,
$A_{21} = -11$, $A_{22} = 14$, $A_{23} = 5$,
$A_{31} = -10$, $A_{32} = -4$ y $A_{33} = -8$.

b) $Adj(A) = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$



2.8

a) $|A| = -42$

b) $|A| = 108$

c) $|A| = -4$

d) $|A| = -24$

e) $|A| = 0$

2.9

a) $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0$ y $x_2 = 2$
b) No tiene solución
c) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$
d) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2,\ x_4 = -4$
e) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$

2.10

a) $\begin{pmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$

c) $\cos(\alpha) = \dfrac{a^2}{b^2 + c^2 - 2bc}$,

$\cos(\beta) = \dfrac{b^2}{a^2 + c^2 - 2ac}$,

$\cos(\gamma) = \dfrac{c^2}{a^2 + b^2 - 2ab}$

2.11

a) $|A| = 0$

b) $|A| = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$

2.12

a) $k \neq 4$, $k \neq -2$ **y** $k \neq 2$
b) $k \neq 2$ y $k \neq 4$

2.13

a) $|A| \neq 0$, es invertible $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A| = 0$, no es invertible

c) $|A| \neq 0$, es invertible $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

d) $|A| \neq 0$, es invertible $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

e) $|A| \neq 0$, es invertible

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

2.20

$a = \dfrac{20}{3}$.

2.21

Cada punto se sustituye en la ecuación de la recta $ax + by + c = 0$, entonces se tiene un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas homogéneo, como su determinante es igual a cero, tiene soluciones infinitas, es decir, todos sus puntos son comunes, se trata de una sola recta.

2.25

31 unidades de área.

2.26

32.5 unidades de área.

2.27

4 unidades de volumen.



2.28
12 unidades de volumen.

2.29

$$\begin{pmatrix} 30 & 50 & 25 \\ 15 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 120 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$x =$ número de lotes de medicamento tipo A.
$y =$ número de lotes de medicamento tipo B.
$z =$ número de lotes de medicamento tipo C.

2.30

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2.31

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

2.32

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 2800 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$x =$ número de adultos.
$y =$ número de de estudiantes.
$z =$ número de niños.

2.33

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 900 \\ 2800 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 100 \\ 350 \end{pmatrix}$$

2.34

a) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -5 \\ -3 & 16 & -12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -7 & 22 \\ 11 & 34 \\ 9 & -19 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 37 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -6 & -8 & -5 \\ 14 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

2.35

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 4 & -2 & -10 \\ 5 & 6 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -1 & 7 & 0 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} e^2 & -3 & \tan(30) & -5 \\ -1 & \sqrt{3} & -\ln(5) & 0 \\ 3 & 0 & \pi & 3 \\ \cos(45) & 3 & -5 & 4 \end{array}\right)$



d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

2.36

a) Soluciones infinitas
b) Sin solución
c) Solución única

2.37

a) $X = \begin{pmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} & 0 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -\frac{13}{3} & -\frac{10}{3} \\ 4 & -5 \\ -\frac{26}{3} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix}$

2.38

a) $|A| = 0$
b) $|A| = -75$
c) $|A| = 4x - 2y - 2$
d) $|A| = a^2b + ab^2$

2.39

a) $|A| = -135$
b) $|A| = 136$
c) $|A| = -1100$

2.40

En ambos casos $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

a) $x = 4, \quad y = 1, \quad z = -7$
b) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

2.41

a) Solución única
b) Solución única
c) No tiene solución única

2.42

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 4 & -\frac{13}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 1 & -\frac{13}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -1 & \frac{10}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 1 & -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$



d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -\frac{3}{2} & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

2.43

a) $3x + 2y + 6z = 23$

b) $2x + z = 10$

c) $5x - 4y + 3z = 15$

2.44

a) -8 b) -240 c) -16

2.45

a) $x_1 = \frac{22}{13}$, $x_2 = \frac{94}{14}$, $x_3 = -\frac{6}{13}$, $x_4 = \frac{63}{13}$

b) $x = \frac{45}{13}$, $y = -\frac{11}{13}$, $z = \frac{23}{13}$

c) $x = 2$, $y = 5$, $z = -3$

2.47

a) Si $\lambda = 1$, $\lambda = 2$

b) Si $\lambda = 2$, $\lambda = 1$, $\lambda = -3$

c) Si $\lambda = 0$, $\lambda = -2$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
No es cerrado bajo la suma.

3.2
No es un espacio vectorial.

3.3
No es un espacio vectorial

3.4
Si es un espacio vectorial

3.5
a) Es un subespacio vectorial
b) Es un subespacio vectorial
c) Es un subespacio vectorial
d) No es un subespacio vectorial

3.6
a) Es un subespacio vectorial
b) No es un subespacio vectorial
c) Es un subespacio vectorial
d) Es un subespacio vectorial

3.7
a) Es un subespacio vectorial
b) Es un subespacio vectorial
c) Es un subespacio vectorial

3.8
a) Es un subespacio vectorial
b) Es un subespacio vectorial
c) No es un subespacio vectorial
d) Es un subespacio vectorial

3.9
Es cerrado bajo la suma y el producto por un escalar.

3.10
Se derivan las funciones para construir los sistemas homogeneos.

3.11
$\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ y $\beta \neq \gamma$

3.12
Una base de W: $\{(1,1,0,0),\ (1,-1,1,0),\ (0,2,0,1)\}$, $Dim(W) = 3$.

3.13
a) No es una base
b) Si es una base

3.14
Se reducen las matrices de vectores y ambas son iguales.

3.15
Generan a R^3, pero no son linealmente independientes. Entonces, no son base.

3.16
Una base es: $\left\{\left(\frac{1}{2},1,0\right),\ \left(\frac{1}{2},0,1\right)\right\}$

3.17
Una base para $gen(S)$ es:
$\{(1,2,-2,1),\ (-3,3,-9,6),\ (-3,0,-4,5)\}$.

3.18
Es un plano que pasa por el origen, cuya ecuación esta dada por: $3x + 6y + z = 0$.

3.19
Una base
$\{(1,0,1,0),\ (-1,1,-1,0),\ (1,0,0,0),\ (0,0,0,1))\}$.

3.20
Una base $\{(3,1,0),\ (-2,0,1)\}$.

3.21
Si es una base.

3.22

$$P_{T\to S}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix} \text{ y } Q_{S\to T}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

3.23

a) $P_{T\to S}=\begin{pmatrix}2/5 & -3/5 & 3/5\\ -1/5 & 9/5 & -4/5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

b) $[u]_S=(2,-1,3)$

c) $Q_{S\to T}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1/3 & 2/3 & 1/3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $[v]_T=(0,8/3,1)$

324

$w_1=(-1,1,0)$, $w_2=(1,2,-1)$ y $w_3=(0,1,0)$

3.25

a) $[u]_C=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$ donde $C=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

b) $[u]_C=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ donde $C=\{x^2,\ x,\ 1\}$

3.26

Una base ortonormal

$$\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)\right\}.$$

3.27

$u=(12,-6,6)=1\cdot(1,-2,3)+0\cdot(-2,2,2)+7\cdot(5/7,4/7,1/7)$.

3.28

$$[u]_S=\begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}.$$

3.29

Una base ortonormal

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}.$$

3.30

a) El punto $(0,0,0)$

b) El plano $x-3y+z=0$

c) La recta $z=0$, $y=t$ y $x=-3$

3.31

a) $M_{E\to F}=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\end{pmatrix}$

b) $M_{F\to E}=\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

3.32

Una base ortonormal es:

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$

Es un plano que paso por el origen, cuya ecuación es: $-x-2y+z=0$.

3.33

Mostrar que v, es perpendicular a u_1, u_2 y al plano $-x-2y+z=0$.

3.34

a) W si es un subespacio vectorial
b) W si es un subespacio vectorial
c) V no es un subespacio vectorial
d) V es es un subespacio vectorial
e) W si es un subespacio vectorial





3.35
a) Linealmente dependiente
b) Linealmente independiente
c) Linealmente dependiente
d) Linealmente independiente
e) Linealmente dependiente

3.36
Mostrar con la definición de conjunto generador.

3.37
a) No es una base
b) Es una base
c) No es una base
d) Es una base

3.38

a) $[u]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $[u]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3.39

a) Una base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) Una base $W = \{1 + x, 1 + x + x^2, 1\}$

3.40
Se reducen la matrices de vectores y ambas son iguales.

3.41
a) Una base $\{(8,-9,-6,6)\}$
b) Una base $\{(-3,0,1),(2,1,0)\}$
c) Una base $\{(2,3,7,0),(-1,0,0,1)\}$

3.42

$$P_{S\to T} = \begin{pmatrix} -\frac{48}{5} & -24 & \frac{4}{5} \\ 4 & 10 & \frac{1}{2} \\ -\frac{6}{5} & -5 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \text{ y } Q_{T\to S} = \begin{pmatrix} \frac{3}{32} & \frac{17}{20} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

3.43
Como los vectores son uno múltiplo del otro debe generar una recta.

3.45

a) $\left\{ \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \right\}$

b)
$$\left\{ \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \right\}$$

c) $\left\{ \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), (0,0,1) \right\}$

3.46

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

3.47

a) $u = 2 \cdot (0,2,-2) - 1 \cdot (1,0,-2)$

b) $B_O = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$

c) $u = 3\sqrt{2} \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1
a) T no es lineal.
b) T no es lineal.
c) T si es lineal.
d) T no es lineal.
e) T si es lineal.
f) T si es lineal.
g) T si es lineal.
h) T no es lineal.
i) T no es lineal.
j) T si es lineal.

4.2
a) T si es lineal.
b) T no es lineal.
c) T si es lineal.
d) T no es lineal.
e) T si es lineal.

4.3
T no es lineal.

4.4
T si es lineal.

4.7
a) $T(-1,5)=(8,5)$
b) $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y,-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

4.8
a) $T(2x^2-5x+3)=-x^2+3x+3$
b) $T(ax^2+bx+c)=(2a+b)x^2+ax+c$

4.9
a) $T(-10x^2+15x-25)=-\frac{95}{2}x$
b) $T(ax^2+bx+c)=(a-b-c)+(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+2c)x$

4.10
a) $T(-10,15,-25)=\left(-\frac{95}{2},0\right)$
b) $T(x,y,z)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z,x-y-z\right)$

4.11
a) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$

b) Una base de la imagen $\{1+x^2+x^3,1+x+2x^3\}$

4.12
a) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ entonces

$Dim(Ker(T))=0$ por lo tanto, es uno a uno.

b) Una base de la imagen $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\}$

entonces $Dim(\mathrm{Im}(T))=3$ por lo tanto, es sobre.

4.13
a) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$, una base para la imagen $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$

b) Una base del kernel $\{1+x-x^2+x^3\}$, una base para la imagen $\{1,\ -1+x,\ x^2\}$.

c) Una base del kernel $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$, una base para la imagen $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.



4.14

a) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}$

c) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.15

a) $M_T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 & 33 \\ -6 & 31 \end{pmatrix}$

b) $Ker(T) = \{(0,0)\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 0$

c) $\text{Im}(T) = \{(4x - y, 3x + 2y) \mid x, y \in R\}$, base $\{(4,3), (-1,2)\}$ entonces $Dim(\text{Im}(T)) = 2$

4.16

b) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

4.17

a) $M_T = \begin{pmatrix} -1 & 27 & -3 \\ 2 & -37 & 6 \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.18

a)

$Ker(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha + \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in R \right\}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 2$.

b)

$\text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -2c & 2a + 2b - 2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in R \right\}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 2$.

4.19

a) $Ker(T) = \{0x + 0\}$ entonces $Dim(Ker(T)) = 0$.

b) $\text{Im}(T) = \{ax^2 + bx + b \mid a, b \in R\}$, base $\{x^2,\ x + 1\}$ entonces $Dim(\text{Im}(T)) = 2$.

c) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

4.20

a) Una base del $Ker(T)$ es $\{x - x^2\}$, su dimensión es 1.

b) Una base de P_2 es $\{x - x^2,\ 1,\ x^2\}$

4.23

$T(x, y, z) = (0, y - 2z, -4x + 2y + 3z)$



4.24

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 3x - 3y$$

4.25

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -4 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

4.26

a) $T^{-1}(p(x)) = p(x) - \dfrac{d}{dx}p(x) + \dfrac{d^2}{dx^2}p(x)$

o bien

$T^{-1}(a + bx + cx^2) = (a - b - 2c) + (b - 2c)x + cx^2$

b) $T^{-1}(a + bx) = (a, b - a)$

c) $T^{-1}(p(x)) = p(x - 2)$

d) $T^{-1}(x, y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right).$

4.27

Una base para el núcleo $\{1, x\}$, una base de la imagen $\{1\}$.

4.28

Probar que son uno a uno y sobre.

4.29

$$T\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4.30

a) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.31

a) $T_1 + T_2 = (-x - y + z, 2x - 3y - z)$

b) $T_1 + T_2 = (z, 3x - z)$

c) $T_1 \circ T_2 = (x + 4y, 3x - y)$

4.32

$T(x, y, z) = (x, y, -2x + y)$

4.33

a) $M_T = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.34

a) $M_T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \dfrac{14}{5} & \dfrac{11}{10} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$

4.35
Una base para el kernel $\{(1,0,-2),(1,2,0)\}$.

4.36
Son demostraciones.

4.37
a) $T^{-1}(x,y,z)=(x,-x+y,-y+z)$

b) $T^{-1}(x,y)=\left(\frac{x}{5},\frac{y}{5}\right)$

c) $T^{-1}(x,y,z,w)=(x+2y,y,w,z-w)$

4.38
$$M_T=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1

a) $p(\lambda)=7-4\lambda^2+\lambda^3$

b) $p(\lambda)=8+2\lambda-5\lambda^2+\lambda^3$

c) $p(\lambda)=-24+26\lambda-9\lambda^2+\lambda^3$

d) $p(\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$

e) $p(\lambda)=\lambda^4-14\lambda^3+68\lambda^2-136\lambda+96$

5.2

a) $\lambda_1=-1,\ X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \lambda_2=2,\ X_2=\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$ y

$\lambda_3=4,\ X_3=\begin{pmatrix}8\\5\\2\end{pmatrix}$

b) $\lambda_1=1,\ X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \lambda_2=-1,\ X_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},$

$\lambda_3=3,\ X_3=\begin{pmatrix}9\\3\\4\\0\end{pmatrix}$ y $\lambda_4=2,\ X_4=\begin{pmatrix}29\\7\\9\\-3\end{pmatrix}$

c) $\lambda_1=1,\ X_1=\begin{pmatrix}6\\3\\8\end{pmatrix},\ \lambda_2=3,\ X_2=\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}$ y

$\lambda_3=-2,\ X_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

d) $\lambda_1=8,\ X_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\ \lambda_2=\lambda_3=-1,$

$X_2,X_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

e) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1,\ X_1,X_2=\left\{\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}$

5.3

a) $\lambda_1=3,\ \lambda_2=1$ y $\lambda_3=0,\ X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$

$X_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

5.4

$a=0$, $b=9$, $c=0$.

5.7

a) No es diagonalizable.
b) Si es diagonalizable.
c) Si es diagonalizable.
d) No es diagonalizable.
e) Si es diagonalizable.
f) No es diagonalizable.

5.8

a) $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) $D=\begin{pmatrix}6&0\\0&1\end{pmatrix}$



c) $D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

e) $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&6\end{pmatrix}$

5.9

a) $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1,\ X_1=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$

y $X_3=\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

5.10

a) $\lambda_1=\lambda_2=1\ \ \lambda_3=2,\ X_1=\begin{pmatrix}\alpha/3\\\alpha\\0\end{pmatrix},$

$X_2=\begin{pmatrix}2\beta/3\\0\\\beta\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma/2\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&0&1\\0&3&2\end{pmatrix}$

5.12

a) $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-1\ \ \lambda_3=4,\ X_1=\begin{pmatrix}0\\\alpha\\0\end{pmatrix},$

$X_2=\begin{pmatrix}2\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}-\gamma/2\\0\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

5.13

a) $\lambda_1=\lambda_2=-3,\ \ \lambda_3=3,\ X_1=\begin{pmatrix}-\alpha\\\alpha\\0\end{pmatrix},$

$X_2=\begin{pmatrix}-\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$ y $X_3=\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma\\\gamma\end{pmatrix}$

b) $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$

5.14

Para todo número real $c>0$.

5.16

$A=\begin{pmatrix}2&3\\0&5\end{pmatrix}$



5.17

Las columnas de P, deben ser múltiplos de los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5.18

a) $\begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5.19

a) $x'^2 - y'^2$

b) $-2x'^2 + 5y'^2 - 5z'^2$

c) x'^2

d) $3x'^2 + 9y'^2 + 3z'^2$

e) $y'^2 + 3z'^2$

5.20

a) Punto.

b) Hipérbola.

c) Circunferencia.

d) Elipse.

e) Elipse.

5.21

a) Circunferencia $x'^2 + y'^2 = 25$

b) Parábola $y'^2 = -4x'$

c) Hipérbola $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$

d) Punto $(1,3)$, $x'^2 + y'^2 = 0$

5.22

a) Cono $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$

b) Paraboloide elíptico $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{8} = 1$

c) Elipsoide $x'^2 + y'^2 + 3z'^2 = 1$

d) Cilindro parabólico $y'^2 = \frac{4}{\sqrt{2}} z'$

5.23

a) Si es.

b) Si es.

c) No es.

5.24

a) $A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -27 & 18 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \\ 19 & -11 & 6 \end{pmatrix}$

b) No tiene inversa

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



5.26

a) Par de rectas paralelas $y'^2 = \frac{4}{10}x'^2$,

$y' = \frac{2}{\sqrt{10}}x'$ y $y' = -\frac{2}{\sqrt{10}}x'$

b) Hiperboloide de dos hojas

$\frac{4x'^2}{7} - \frac{4y'^2}{7} - \frac{4z'^2}{7} = 1$

5.29

a) Valores propios: $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$.

Vectores propios:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Valores propios: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2$.

Vectores propios:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.30

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 7,\ \lambda_5 = 8,\ \lambda_6 = 9$.

5.31

a) $\lambda_{1,2} = -3$, multiplicidad algebraica 2, multiplicidad geométrica 1.

b) $\lambda_{1,2} = 1$, multiplicidad algebraica 2, multiplicidad geométrica 2.
$\lambda_3 = -1$, multiplicidad algebraica 1, multiplicidad geométrica 1.

c) $\lambda_{1,2} = 1$, multiplicidad algebraica 2, multiplicidad geométrica 2.
$\lambda_3 = -1$, multiplicidad algebraica 1, multiplicidad geométrica 1.

d) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$, todas las multiplicidades son de 1.

5.32

Polinomio característico,

$p(x) = (x-4)(x+5)(x+2) = x^3 + 3x^2 - 18x - 40$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 40 & 18 & -3 \end{pmatrix}$$

5.33

$$A = \begin{pmatrix} 4^{n-1} & 0 & 4^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 3\cdot 4^{n-1} & 0 & 3\cdot 4^{n-1} \end{pmatrix}.$$

5.34

Comprobar solamente.

5.35

a) $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5.36

a) $P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$



b) $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

5.37

a) $J=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $J=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5.38

a) Valores propios: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=6$.
Vectores propios:
$X_1=3+2x,\ X_2=-5+10x+2x^2,\ X_3=-1+2x$.

b) Valores propios: $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3$.
Vectores propios:
$X_1,\ X_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5.39

a) $\{x,\ -1+x\}$.
b) $\{(1,-1),\ (1,1)\}$.

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

A.10
$x > \frac{13}{4}$

A.11
$x > \frac{1}{5}$

A.12
$x \leq -1$

A.13
$x \geq -\frac{2}{3}$

A.14
$x > \frac{6}{5}$

A.15
$x > \frac{3}{5}$

A.16
$x \leq 10$

A.17
$x \geq -6$

A.18
$x < 7$

A.19
$x < -\frac{17}{8}$

A.20
$x \leq -\frac{49}{18}$

A.21
$x \geq \frac{2}{7}$

A.22
$\frac{2}{3} \leq x \leq 3$

A.23
$-4 \leq 2x \leq 1$

A.24
$-1 \leq x \leq \frac{1}{5}$

A.25
$-\frac{10}{7} \leq x \leq \frac{2}{7}$

A.26
$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

A.27
$[-4, -1]$

A.28
$(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$

A.29
$(-\infty, -1) \cup (7, \infty)$

A.30
$(-\infty, -1) \cup (4, 6)$

A.31
$(-7, -1) \cup (3, \infty)$

A.32
$[-1, 1] \cup [7, \infty)$

A..33

$(-\infty, -4] \cup [2, 5]$

A.34

$(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

A.35

$(-\infty, -\tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{5}{3}, \infty)$

A.36

$(1, 3]$

A.37

$-\dfrac{7}{8} \leq x \leq \dfrac{13}{8}$

A.38

$-6 < x < -5$

A.39

$-7 \leq x \leq 3$

A.40

$(-\infty, -\tfrac{1}{6}) \cup (\tfrac{1}{2}, \infty)$

A.41

$(-\infty, -\tfrac{9}{7}] \cup [\tfrac{1}{7}, \infty)$

A.42

$(-\infty, -\tfrac{15}{9}) \cup [-\tfrac{1}{9}, \infty)$

A.43

$(-0.6, 5)$

A.44

$[-4, 0]$

A.45

$(-\infty, 1.5] \cup [4, \infty)$

A.46

$(f+g)(x) = x^2 + x + 1$

$(f-g)(x) = x^2 - x - 1$

$(f \cdot g)(x) = x^3 + x^2$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

A.47

$(f+g)(x) = \dfrac{2 + x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x+1}$

$(f-g)(x) = -\dfrac{x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3}}{x+1}$

$(f \cdot g)(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3} + 1}$

A.48

$(f+g)(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}}{x-2}$

$(f-g)(x) = \dfrac{1 - \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x}}{x-2}$

$(f \cdot g)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}}$

A.49

$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + (x-1)^2$

$(f-g)(x) = \sqrt{x+1} - (x-1)^2$

$(f \cdot g)(x) = (x-1)^2 \sqrt{x+1}$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{(x-1)^2}$



A.50

$$f[g(x)] = x + 1$$

$$g[f(x)] = x + 2\sqrt{x} + 1$$

A.51

$$f[g(x)] = (x+1)^2$$

$$g[f(x)] = x^2 + 1$$

A.52

$$f[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

A.53

$$f[g(x)] = \frac{1}{x}$$

$$g[f(x)] = \frac{x}{x-1}$$

A.54

$$f[g(x)] = x + 1$$

$$g[f(x)] = x + 2\sqrt{x} + 1$$

A.55

$$f[g(x)] = \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$g[f(x)] = x - 2\sqrt{x-1}$$

A.56

$$f^{-1}(x) = x + 1$$

A.57

$$f^{-1}(x) = x^3 + 1$$

A.58

$$f^{-1}(x) = 2x + 8$$

A.59

$$f^{-1}(x) = 1 - x^2$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
8

1.2
-1

1.3
31

1.4
5

1.5
5

1.6
$\frac{5}{3}$

1.7
671

1.8
$\sqrt{3}$

1.9

x	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

x	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

Conforme x tiende a la unidad, $f(x)$ tiende a dos

1.10

x	$f(x)=\frac{\text{sen } x}{x}$
1	0.841
0.5	0.959
0.1	0.998
0.01	0.9999
0.001	0.999999

x	$f(x)=\frac{\text{sen } x}{x}$
-1	0.841
-0.5	0.959
-0.1	0.998
-0.01	0.9999
-0.001	0.999999

Conforme x tiende a cero, $f(x)$ tiende a la unidad

1.11
Límite por la derecha

1.12
Límite por la izquierda

1.3
Límite por la derecha

1.14
Límite por la izquierda

1.15
Límite bilateral

1.16
Límite bilateral

1.17
32

1.18
-16

1.19
12

1.20
-12

1.21
30



1.22
3

1.23
27

1.24
$\frac{27}{2}$

1.25
$-\frac{8}{3}$

1.26
$-\frac{8}{3}$

1.27
$\frac{4}{5}$

1.28
-5

1.29
$\frac{7}{8}$

1.30
No tiene límite

1.31
$-\frac{7}{8}$

1.32
11

1.33
-9

1.34
$\frac{10}{11}$

1.35
$-\frac{2}{9}$

1.36
-16

1.37
$-\frac{6}{5}$

1.38
$-\frac{5}{7}$

1.39
$\frac{10}{3}$

1.40
$-\frac{2}{3}$

1.41
$\frac{1}{2}$

1.42
2

1.43
$-\frac{3}{4}$

1.44
$\frac{1}{\sqrt{7}}$



1.45
$\frac{1}{\sqrt{6}}$

1.46
$\frac{1}{5}$

1.47
$\frac{1}{2}$

1.48
$\frac{1}{3}$

1.49
No tiene límite

1.50
$\frac{9}{2}$

1.51
$\frac{-3}{2\sqrt{7}}$

1.52
$\frac{-3}{2\sqrt{2}}$

1.53
1

1.54
$\sqrt{11}$

1.55
$\frac{3}{2}$

1.56
2

1.57
5

1.58
$\frac{4}{3}$

1.59

x	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x}$
1	0.540
0.5	1.755
0.1	9.950
0.01	99.995
0.001	999.9995
0.0001	9999.9999

x	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x}$
-1	-0.540
-0.5	-1.755
-0.1	-9.950
-0.01	-99.995
-0.001	-999.9995
-0.0001	9999.9999

Cuando x tiende a cero por la derecha, el límite tiende a infinito, en cambio, cuando x tiende a cero por la izquierda, el límite tiende a menos infinito.

1.60
$\frac{4}{27}$

1.61
$\frac{1}{6}$

1.62
3

1.63
$-\frac{13}{75}$

1.64
$-\frac{1}{15}$



1.65
$\frac{5}{8}$

1.66
$-\frac{21}{5}$

1.67
$-\frac{19}{14}$

1.68
$-\frac{5}{2}$

1.69
No tiene límite

1.70
$\frac{4}{3}$

1.71
No tiene límite

1.72
0

1.73
$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

1.74
No tiene límite

1.75
a) $a = 2.164$ $b = 2.918$
b) 4.91%
c) 5.08%

1.76
a) 12.5
b) 11.905



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$f'(x) = 10x + 2$

2.2
$f'(x) = 21x^2 - 16x + 6$

2.3
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

2.4
$f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$

2.5
$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x+1}}$

2.6
$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2-5}}$

2.7
$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{9-3x^2}}$

2.8
$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

2.9
$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

2.10
$\frac{5bx^2 + 4ax}{2\sqrt{a+bx}}$

2.11
$4x^3$

2.12
$(8x+16)(x-5)^7 + (x-5)^8$

2.13
$6x^3(x^2-4)^2 + 2x(x^2-4)^3$

2.14
$4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

2.15
$(6x^4+6x)(x^2-4)^2 + 3x^2(x^2-4)^3$

2.16
$\frac{\sqrt{2x^6-16}}{x^2}$

2.17
$\frac{-3x(1-4x^2)^3 - 24x(2-3x^2)(1-4x^2)^2}{\sqrt{2-3x^2}}$

2.18
$\frac{4x}{(x^2+1)^2}$

2.19
$\frac{46x}{(4x^2+5)^2}$

2.20
$\frac{x^2+4}{4x^2}\sqrt{\frac{2x}{x^2-4}}$



2.21

$$\frac{x^3+1}{x^2\sqrt{2x^3-1}}$$

2.22

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x-7-3y}{-1-2y+3x}$$

2.23

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x-y}{x+4y}$$

2.24

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y-x}$$

2.25

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x^3-1}{4y^3+1}$$

2.26

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^2-3x^2}{3y^2+2x^2y}$$

2.30

$x \text{ sen } x$

2.31

$$y'=\frac{(\cos y)(\cos x)-1}{(\text{sen } y)(\text{sen } x)+1}$$

2.32

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$$

2.33

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{sen } x}{\cos y}$$

2.34

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\text{sen } y}{1-x\cos y}$$

2.40

0

2.42

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.43

$$\frac{\text{arc cos } 3x^2\ \sqrt{1-9x^4}+6x^2}{\sqrt{1-9x^2}\left(\text{arc cos } 3x^2\right)^2}$$

2.44

0

2.45

$$\frac{60x^2\left(\text{arc sen } 4x^3\right)^4}{\sqrt{1-16x^6}}$$

2.46

$$\frac{2}{\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

2.47

$$\frac{x}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+3}}$$

2.48

$$\frac{4x\left(1-\text{arc cot } x^2\right)}{1+x^4}$$

2.49

$$\frac{2x^3+2x\sqrt{1-x^4}\ \text{arc sen } x^2}{\sqrt{1-x^4}}$$

2.50

$$\frac{2}{\left(x^2-1\right)\sqrt{-1}}$$

2.51

$$\frac{-4x^2+\left(2x^4+4x^2+4\right)\text{arc cot}\left(x^2+1\right)}{x^4+2x^2+2}$$

2.52

$$-2x$$

2.53

$$\frac{12x^4\ e^{3x^2}}{1+e^{6x^2}}+6x^2\cdot\text{arc tan}\ e^{3x^2}$$

2.54

$$\frac{5x}{\left(10x^2+14\right)\sqrt[4]{\ln^3\left(5x^2+7\right)}}$$

2.55

$$\frac{8x^2}{8x^3-5}$$

2.56

$$\frac{48x^3-14x}{\left(4x^2-1\right)\left(3x^2-1\right)}$$

2.57

$$\frac{-100x^3-42x}{\left(3-4x^2\right)\left(15x^2+18\right)}$$

2.58

$$\frac{180x^4-180x^2-24x}{\left(5x^3-2\right)\left(2x^2-3\right)}$$

2.59

$$\frac{21}{7x-2}$$

2.60

$$2e^{e^{2x}}e^{2x}$$

2.61

$$6xe^{3x^2}\left(\frac{1+\sqrt{1-9x^4}\,\text{arc sen}\,3x^2}{\sqrt{1-9x^4}}\right)$$

2.62

$$20x^3\cosh\ 5x^4$$

2.63

$$-12x^{-4}\text{sen}\ h\ 4x^{-3}$$

2.64

$$\frac{\sec h^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

2.65

$$2xe^{x^2}\text{sen}\ h\ e^{x^2}$$

2.66

$$\frac{8\csc h^2\ln x^2}{x}\cot h^3\ln x^2$$

2.67

$$\frac{-8x^4\ \csc h^2\ 2x^4-2\cot h\ 2x^4}{x^3}$$

2.68

$$9x^4\cos h\ x^3+6x\,\text{sen}\ h\ x^3$$



2.69

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8}{9\sqrt[3]{(2x-1)^5}}$$

2.70

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\left(x^2+5\right)}{\sqrt[3]{\left(3x^2+5\right)^4}}$$

2.71

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

2.72

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120(x-1)^3$$

2.73

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{432}{(3x-1)^4}$$





A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
$\theta = 36.86^\circ$

3.2
$\theta = 45^\circ$

3.3
$\theta = 45^\circ$

3.4
$\theta = 0^\circ$

3.5
$\theta_1 = \theta_2 = 45^\circ$

3.6
$\theta_1 = \theta_2 = 81.87^\circ$

3.7
$24x - y + 10 = 0$
$24x - y - 138.15 = 0$

3.8
$5x + y + 22 = 0$
$5x + y - 10 = 0$

3.9
$x - y + \sqrt{50} = 0$
$x - y - \sqrt{50} = 0$

3.10
$x + y - 6 = 0$
$x + y - 2 = 0$

3.11
$(5, 12)$

3.12
$\left(4, \frac{1}{3}\right)$

3.13
81.87°

3.14
40.60°

3.15
$\theta_1 = 90^\circ$
$\theta_2 = 36.86^\circ$

3.16
$\theta = 67.70^\circ$

3.17
$\theta = 74.74^\circ$

3.18

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(2, 133)$	$(4, 125)$	$(3, 129)$	$x < 2$ $x > 4$	$2 < x < 4$	$x > 3$	$x < 3$

3.19

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(-2, -168)$	$(6, 88)$	$(2, -40)$	$-2 < x < 6$	$x < -2$ $x > 6$	$x < 2$	$x > 2$

3.20

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(-1, 896)$	$(-5, 0)$ $(4, -729)$	$(-3.27, 404.1)$ $(1.93, -13.7)$	$-5 < x < -1$ $x > 4$	$x < -5$ $-1 < x < 4$	$x < -3.27$ $x > 1.93$	$-3.27 < x < 1.93$

3.21

Máximo	Mínimo	Inflexión	Creciente	Decreciente	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo
$(-7, 7987)$ $(5, 1075)$	$(1, -205)$	$(-3.86, 4492.9)$ $(3.19, 478.8)$	$x < -7$ $1 < x < 5$	$-7 < x < 1$ $x > 5$	$-3.86 < x < 3.19$	$x < -3.86$ $x > 3.19$

3.22
$x = y = 25$

3.23
a) $r = h = 2.73$

b) $\begin{cases} r = 2.17\ cm \\ h = 4.34\ cm \end{cases}$

3.24
$x = 100 \quad , \quad y = 200$

3.25
$0.5926\ m^3$

3.26
$r = 24.49\ cm$

$h = 34.64\ cm$

3.27
$x = 3.63\ m$

3.28
$\ell = 99.62\ m$

3.29
$x = 75\ m$

$y = 50\ m$

3.30
$x = 5.61\ m$

3.31
$\text{Largo} = \dfrac{25}{4+\pi}$

$\text{Diámetro} = \dfrac{50}{4+\pi}$

3.32
$\dfrac{dx}{dt} = 1.5\ m/s$

3.33
$\dfrac{da}{dt} = 0.0183\ cm/s$

$\dfrac{dA}{dt} = 2.199\ cm^2/s$

3.34
$\dfrac{da}{dt} = -0.0125\ cm/s$

$\dfrac{dV}{dt} = -3.75\ cm^3/s$

3.35
$\dfrac{dA}{dt} = 150\pi\ m^2/s$

3.36

a) $\frac{dr}{dr} = -1.086 \times 10^{-3} \quad {}^{m}/_{min}$

b) $\frac{dA}{dt} = -0.512 \quad {}^{m^2}/_{min}$

3.37

$\frac{dV}{dt} = -3.37 \times 10^{-5} \quad {}^{in^2}/_{dia}$

$\frac{dA}{dt} = -1.19 \times 10^{-5} \quad {}^{in^2}/_{dia}$

3.38

$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{3\pi} \quad {}^{cm}/_{s}$

$\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{5\pi} \quad {}^{cm}/_{s}$

3.39

$\frac{dc}{dt} = -142 \quad {}^{Km}/_{h}$

3.40

$\frac{dV}{dt} = 0.07125\pi \quad {}^{cm^3}/_{min}$

$\frac{dA}{dt} = 0.055\pi \quad {}^{cm^2}/_{min}$





Integral definida

Objetivos

- Analizar el concepto de integral definida.
- Aprender a resolver integrales definidas.
- Interpretar de forma geométrica una integral definida.
- Aplicar el concepto de integral definida a la resolución de problemas.
- Aplicar el concepto de integral definida a integrales impropias.

¿Qué sabes?

- ¿La integral definida representa una suma infinita de partes de ancho infinitesimal?
- ¿La integral definida omite el uso de la constante de integración?
- ¿Para resolver una integral definida, primero es necesario resolverla con el método de integración que le corresponda?
- ¿Al resolver una integral definida, todo el resultado se reduce a un valor numérico?
- ¿Qué es una integral impropia?



La integral definida

La integral definida tiene aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. Dada su naturaleza, es que esta puede aplicarse tanto en geometría, física, economía e incluso biología y química. A continuación se listan las aplicaciones más conocidas de la integral definida.

- Cálculo de áreas de regiones planas.
- Cálculo de la longitud de arco de una curva plana.
- Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.
- Cálculo de momentos (fuerzas que ejercen ciertas masas respecto a un punto) y centros de masa o centroide (el punto en que un objeto se equilibra de manera horizontal).
- Encontrar la presión ejercida por un fluido.

Definición de integral definida

Sea $f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo $[a,b]$; en este intervalo se define a la integral definida como el área limitada por las rectas $x=a$, $x=b$, el eje y la gráfica de $f(x)$, y se simboliza como:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

De manera gráfica, se representa de la siguiente manera:

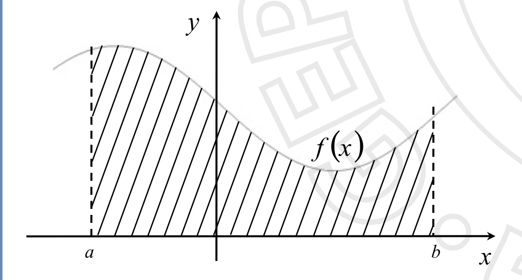


Figura A-1

Propiedades de la integral definida

Si $a > b$, entonces . $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Si $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a,b]$ y $c \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Si $\boldsymbol{k}$ es una constante cualquiera, entonces $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.



Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a,b]$, entonces $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

Límites de integración

Una vez resuelta la integral es necesario sustituir los límites de integración; primero, se sustituye el límite superior y después la resta con la sustitución del límite inferior. Para concluir, se realizan las operaciones.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x - 5)dx$$

Solución

Primero, la integral se resuelve término a término:

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x - 5)dx = 4\int_0^3 x^2 dx + 2\int_0^3 x\,dx - \int_0^3 5dx = \left(\tfrac{4}{3}x^3 + x^2 - 5x\right)\Big|_0^3$$

Por tanto:

$$= \tfrac{4}{3}\underbrace{\left[(3)^3 - (0)^3\right]}_{27-0=27} + \underbrace{\left[(3)^2 - (0)^2\right]}_{9-0=9} - 5\underbrace{\left[(3) - (0)\right]}_{3-0=3} = \tfrac{4}{3}(27) + 9 - 5(3)$$

$$= 36 + 9 - 15$$

$$\int_0^3 (4x^2 + 2x - 5)dx = 30$$

Alerta

Una vez que se ha realizado la integración, enseguida se colocan los límites de integración sobre una línea vertical para su posterior sustitución.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{0.6}^{1.4} 3e^{2x}dx$$

Solución

En este caso, se determina la constante de la integral y se realiza el cambio de variable:

$$\int_{0.6}^{1.4} 3e^{2x}dx = 3\underbrace{\int_{0.6}^{1.4} e^{2x}dx}_{u=2x \quad du=2dx} = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_{0.6}^{1.4} e^{2x}2dx = \tfrac{3}{2}\int_{0.6}^{1.4} e^u du = \tfrac{3}{2}e^u\Big|_{0.6}^{1.4} = \tfrac{3}{2}e^{2x}\Big|_{0.6}^{1.4}$$

$$= \tfrac{3}{2}\left[e^{2(1.4)} - e^{2(0.6)}\right] = \tfrac{3}{2}\left[e^{2.8} - e^{1.2}\right] = \tfrac{3}{2}[16.444 - 3.320] = \tfrac{3}{2}[16.444 - 3.320]$$

$$\int_{0.6}^{1.4} 3e^{2x}dx = 19.686$$



Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

Solución

Primero, al agrupar términos y resolver mediante un cambio de variable se tiene:

$$\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = 2\int_{1.6}^{4.6} \underbrace{\left(7x^2+1\right)}_{u}^{\frac{1}{2}} x\,dx$$

$$u = 7x^2+1 \qquad du = 14x\,dx$$

Luego, se completa la integral y se integra:

$$= 2\left(\tfrac{1}{14}\right)\int_{1.6}^{4.6} \underbrace{\left(7x^2+1\right)}_{u}^{\frac{1}{2}} \underbrace{14x\,dx}_{du} = \tfrac{1}{7}\int_{1.6}^{4.6} \underbrace{\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}_{u^{\frac{1}{2}}} \underbrace{14x\,dx}_{du}$$

$$= \tfrac{1}{7}\int_{1.6}^{4.6} u^{\frac{1}{2}}du = \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{2}{3}\right)u^{\frac{3}{2}}\Big|_{1.6}^{4.6} = \tfrac{2}{21}\left(7x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{1.6}^{4.6}$$

Por últimos, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{2}{21}\left\{\left[7(4.6)^2+1\right]^{\frac{3}{2}} - \left[7(1.6)^2+1\right]^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = 165.588$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{3x^2-1}$$

Solución

La integral cumple con las condiciones para que dé como resultado un logaritmo natural; entonces, se realiza el cambio de variable:

$$\int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{3x^2-1} = \int_{1}^{3} \frac{x\,dx}{\underbrace{3x^2-1}_{u}}$$

$$u = 3x^2-1 \qquad du = 6x\,dx$$

Luego, se completa la integral:

$$= \tfrac{1}{6}\int_{1}^{3} \frac{\overbrace{6x\,dx}^{du}}{\underbrace{3x^2-1}_{u}} = \tfrac{1}{6}\int_{1}^{3} \frac{du}{u} = \tfrac{1}{6}\,ln\left|u\right|_{1}^{3} = \tfrac{1}{6}\,ln\left|3x^2-1\right|_{1}^{3}$$



Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{1}{6}\left[ln\left|3(3)^2-1\right| - ln\left|3(1)^2-1\right|\right]$$

$$= \tfrac{1}{6}\left[ln\,26 - ln\,2\right]$$

$$\int_1^3 \frac{x\,dx}{3x^2-1} = 0.427$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_1^3 \frac{5x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

Solución

En este caso, la integral se expresa en forma entera y se resuelve mediante cambio de variable:

$$\int_1^3 \frac{5x\,dx}{(x^2+1)^2} = 5\int_1^3 \underbrace{(x^2+1)}_{u}{}^{-2}\,x\,dx$$

$$u = x^2+1 \qquad du = 2x\,dx$$

Luego, se completa la integral:

$$= 5\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_1^3 \underbrace{(x^2+1)^{-2}}_{u^{-2}}\,2x\,dx = \tfrac{5}{2}\int_1^3 \underbrace{(x^2+1)^{-2}}_{u^{-2}}\,\underbrace{2x\,dx}_{du} = \tfrac{5}{2}\int_1^3 u^{-2}du$$

Por último, se regresa el cambio de variable y se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{5}{2}(-1)u^{-1}\Big|_1^3 = -\tfrac{5}{2}\left(x^2+1\right)^{-1}\Big|_1^3 = -\tfrac{5}{2}\left\{\left[(3)^2+1\right]^{-1} - \left[(1)^2+1\right]^{-1}\right\}$$

$$= -\tfrac{5}{2}\left(10^{-1} - 2^{-1}\right)$$

$$\int_1^3 \frac{5x\,dx}{(x^2+1)^2} = 1$$



Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_0^{\pi} x \times sen\, x\, dx$$

Solución

En este caso, la integral se resuelve *por partes*, esto es se realizan los cambios de variable:

$$\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{sen\, x\, dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x & dv = sen\, x\, dx \\ du = dx & v = -cos\, x \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} x \times sen\, x\, dx = -x \times cos\, x - \int_0^{\pi} (-cos\, x)dx = -x \times cos\, x + \underbrace{\int_0^{\pi} cos\, x\, dx}_{= sen\, x}$$

$$= -x \times cos\, x + sen\, x \Big|_0^{\pi}$$

Al final, se sustituyen los límites de integración:

$$= \left(-\pi \times \underbrace{cos\, \pi}_{=-1} + \underbrace{sen\, \pi}_{=0}\right) - \left(-0 \times \underbrace{cos}_{=1} 0 + \underbrace{sen}_{=0} 0\right)$$

$$\int_0^{\pi} x \times sen\, x\, dx = \pi$$

Alerta

Siempre que se integren funciones trigonométricas, los límites de integración deben estar expresados en radianes.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

Solución

Separando en suma de integrales y la segunda integral en forma entera, se tiene:

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\int_1^5 x\, dx + \int_1^5 x^{-2} dx = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)x^2 + (-1)x^{-1}\Big|_1^5$$

Y al simplificar y sustituir los límites de integración:

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) dx = 2\int_1^5 x\, dx + \int_1^5 x^{-2} dx = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)x^2 + (-1)x^{-1}\Big|_1^5$$

$$= x^2 - x^{-1}\Big|_1^5 = \left[(5)^2 - (5)^{-1}\right] - \left[(1)^2 - (1)^{-1}\right] = \left(25 - \tfrac{1}{5}\right) - (1 - 1)$$

$$\int_1^5 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) dx = 24.8$$



Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\ 5x \times cos\ 4x\, dx$$

Solución

Empleando la identidad trigonométrica se tiene:

$$sen\ x \times cos\ y = \tfrac{1}{2}\left[sen\ (x-y) + sen\ (x+y)\right]$$

Y al sustituir y separar en dos integrales queda:

$$\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\ 5x \times cos\ 4x\, dx = \int_{0.2\pi}^{0.8\pi} \tfrac{1}{2}\left[sen\ (5x-4x) + sen\ (5x+4x)\right]dx$$

$$= \int_{0.2\pi}^{0.8\pi} \tfrac{1}{2}\left[sen\ x + sen\ 9x\right]dx = \tfrac{1}{2}\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\ x\, dx + \tfrac{1}{2}\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\ 9x\, dx$$

En este caso, la primera integral está completa, en tanto la segunda requiere que se complete; así:

$$= \tfrac{1}{2}\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\ x\, dx + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{9}\right)\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\ 9x\,(9dx)$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}cos\ x - \tfrac{1}{18}cos\ 9x\right]_{0.2\pi}^{0.8\pi}$$

Al final, se sustituyen los límites de integración:

$$= \left[-\tfrac{1}{2}cos\ (0.8\pi) - \tfrac{1}{18}cos\ 9(0.8\pi)\right] - \left[-\tfrac{1}{2}cos\ (0.2\pi) - \tfrac{1}{18}cos\ 9(0.2\pi)\right]$$

$$= \left[\underbrace{-\tfrac{1}{2}cos\ (0.8\pi)}_{0.404} - \underbrace{\tfrac{1}{18}cos\ 9(0.8\pi)}_{-0.045}\right] + \left[\underbrace{\tfrac{1}{2}cos\ (0.2\pi)}_{0.404} + \underbrace{\tfrac{1}{18}cos\ 9(0.2\pi)}_{0.045}\right]$$

$$= (0.404 + 0.045) + (0.404 + 0.045)$$

$$\int_{0.2\pi}^{0.8\pi} sen\ 5x \times cos\ 4x\, dx = 0.898$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 cos\ x\, dx$$

Solución

Integrando *por partes*:

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{cos\ x\, dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x^2 & dv = cos\ x\, dx \\ du = 2x\, dx & v = sen\ x \end{cases}$$

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 cos\ x\, dx = x^2 sen\ x - \int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} 2x \times sen\ x\, dx$$



La integral resultante, aunque más sencilla que la original, también requiere integrarse *por partes*:

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 cos\ x\,dx = x^2 sen\ x - \int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} \underbrace{2x}_{u}\ \underbrace{sen\ x\,dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = 2x & dv = sen\ x\,dx \\ du = 2dx & v = -cos\ x \end{cases}$$

$$= x^2 sen\ x - \left[-2x \times cos\ x - \int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} (-2cos\ x)dx\right]$$

Simplificando resulta:

$$= x^2 sen\ x + 2x \times cos\ x - 2\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} cos\ x\,dx$$

La integral resultante es inmediata:

$$= \left[x^2 sen\ x + 2x \times cos\ x - 2sen\ x\right]_{-1.5\pi}^{-0.5\pi}$$

Al sustituir los límites de integración se tiene:

$$= \underbrace{\left[(-0.5\pi)^2 sen(-0.5\pi) + 2(-0.5\pi)\times cos(-0.5\pi) - 2sen(-0.5\pi)\right]}_{Limite\ superior}$$

$$- \underbrace{\left[(-1.5\pi)^2 sen(-1.5\pi) + 2(-1.5\pi)\times cos(-1.5\pi) - 2sen(-1.5\pi)\right]}_{Limite\ inferior}$$

Al realizar las operaciones con el límite superior:

$$= \underbrace{(-0.5\pi)^2}_{=2.467}\ \underbrace{sen(-0.5\pi)}_{=-1} + \underbrace{2(-0.5\pi)}_{=-\pi}\underbrace{cos(-0.5\pi)}_{=0} - \underbrace{2sen(-0.5\pi)}_{=-2}$$

$$= 2.467(-1) - (-2) = -2.467 + 2$$

$$= -0.467$$

Y al efectuar las operaciones con el límite inferior:

$$= \underbrace{(-1.5\pi)^2}_{=22.207}\ \underbrace{sen(-1.5\pi)}_{=1} + \underbrace{2(-1.5\pi)}_{=-9.425}\underbrace{cos(-1.5\pi)}_{=0} - \underbrace{2sen(-1.5\pi)}_{=2}$$

$$= 22.207 - 2 = 20.207$$

Así, al juntar los resultados de los dos límites queda:

$$= -0.467 - 20.207$$

$$\int_{-1.5\pi}^{-0.5\pi} x^2 cos\ x\,dx = 20.674$$



Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1.25}^{3.5} x^2 ln\, x\, dx$$

Solución

En este caso, la integral se resuelve *por partes*; por tanto, se eligen variables:

$$\int_{1.25}^{3.5} \underbrace{ln\, x}_{u}\ \underbrace{x^2\, dx}_{du}$$

$$\begin{cases} u = ln\,|\,x\,| & dv = x^2 dx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

Luego, se sustituyen los cambios de variable:

$$\int_{1.25}^{3.5} x^2 ln\, x\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|\,x\,|\Big|_{1.25}^{3.5} - \int_{1.25}^{3.5} \tfrac{1}{3}x^3 \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|\,x\,|\Big|_{1.25}^{3.5} - \int_{1.25}^{3.5} \tfrac{1}{3}x^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|\,x\,|\Big|_{1.25}^{3.5} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)x^3\Big|_{1.25}^{3.5} = \tfrac{1}{3}x^3 ln\,|\,x\,|\Big|_{1.25}^{3.5} - \tfrac{1}{9}x^3\Big|_{1.25}^{3.5}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \left[\tfrac{1}{3}(3.5)^3\, ln\,|\,3.5\,| - \tfrac{1}{9}(3.5)^3\right] - \left[\tfrac{1}{3}(1.25)^3\, ln\,|\,1.25\,| - \tfrac{1}{9}(1.25)^3\right]$$

$$= 13.140 - (-0.072)$$

$$\int_{1.25}^{3.5} x^2 ln\, x\, dx = 13.212$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{1.5}^{8} \frac{5x\, dx}{x^2 - 1}$$

Solución

Esta integral se resuelve mediante un cambio de variable:

$$\int_{1.5}^{8} \frac{5x\, dx}{x^2 - 1} = 5\int_{1.5}^{8} \frac{x\, dx}{\underbrace{x^2 - 1}_{u}}$$

$$u = x^2 - 1 \qquad du = 2x\, dx$$



Enseguida, la integral se completa y se expresa en función de u :

$$\int_{1.5}^{8}\frac{5x\,dx}{x^2-1}=5\left(\tfrac{1}{2}\right)\int_{1.5}^{8}\frac{2x\,dx}{\underbrace{x^2-1}_{u}}=\tfrac{5}{2}\int_{1.5}^{8}\frac{\overbrace{2x\,dx}^{du}}{\underbrace{x^2-1}_{u}}=\tfrac{5}{2}\int_{1.5}^{8}\frac{du}{u}$$

La integral se resuelve con fórmula y se regresa el cambio de variable:

$$=\tfrac{5}{2}\int_{1.5}^{8}\frac{du}{u}=\tfrac{5}{2}ln\left|u\right|_{1.5}^{8}=\tfrac{5}{2}ln\left|x^2-1\right|_{1.5}^{8}$$

Al sustituir los límites de integración queda:

$$=\tfrac{5}{2}\left[ln\left|(8)^2-1\right|-ln\left|(1.5)^2-1\right|\right]$$

$$\int_{1.5}^{8}\frac{5x\,dx}{x^2-1}=9.799$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{0.5}^{3}\frac{(x+1)dx}{x^3+x^2}$$

Solución

Esta integral se resuelve por fracciones parciales y pertenece al caso de factores lineales repetidos:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2}=\frac{x+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$$

Al sumar las fracciones se tiene:

$$\frac{x+1}{x^3+x^2}=\frac{x+1}{x^2(x+1)}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

En tanto, al igualar numeradores y suprimir signos de agrupación se tiene:

$$Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2=x+1$$

$$Ax^2+Ax+Bx+B+Cx^2=x+1$$

Ahora, al factorizar con respecto a x e igualar coeficientes queda:

$$x^2(A+C)+x(A+B)+B=x+1$$

$$A+C=0 \qquad (I)$$

$$A+B=1 \qquad (II)$$

$$B=1 \qquad (III)$$



De la ecuación III se obtiene el valor de la primera constante:

$$B = 1$$

Sustituyendo en la ecuación II :

$$A + \underbrace{B}_{=1} = 1$$

$$A + 1 = 1$$

$$A = 0$$

Y mediante la ecuación I :

$$\underbrace{A}_{=0} + C = 0$$

$$C = 0$$

Por último, al sustituir las tres constantes en las fracciones parciales se tiene:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x+1} = \frac{1}{x^2}$$

Por tanto, la integral resultante es:

$$\int_{0.5}^{3} \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2} = \int_{0.5}^{3} \frac{dx}{x^2} = \int_{0.5}^{3} x^{-2} dx = -x^{-1}\Big|_{0.5}^{3}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración y se realizan las operaciones:

$$= -\left[(3)^{-1} - (0.5)^{-1}\right] = -\left[\left(\tfrac{1}{3}\right) - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1}\right] = -\left[\tfrac{1}{3} - 2\right] = -\left(\tfrac{5}{3}\right)$$

$$\int_{0.5}^{3} \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2} = \frac{5}{3}$$



Integrales impropias

Una integral impropia es una integral definida cuando uno o ambos de sus límites de integración tienden a infinito o a menos infinito . No obstante, una integral también es impropia cuando la función que se integra en forma definida no es continua en todo el intervalo de integración ; esto es, si dicha función al integrarse en dicho intervalo presenta alguna asíntota vertical.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x}dx$$

Solución

Esta integral impropia se integra como una integral de tipo exponencial; así, la integral está completa:

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x}dx = e^{x}\Big|_{-\infty}^{1} = e^{1} - e^{-\infty} = e^{1} - \frac{1}{e^{\infty}}$$

Así:

$$= e^{1} - \frac{1}{\underbrace{e^{\infty}}_{\text{®}\,0}} = e^{1}$$

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x}dx = e = 2.718$$

Alerta

Cuando una función exponencial tiene como exponente el término infinito , esta, a su vez, también tenderá al infinito; sin embargo, si la función exponencial se representa en la forma , esta tiende a cero.

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx$$

Solución

Primero, se completa la integral y esta se expresa en función de u para su integración:

$$\int_{0}^{\infty} e^{\overbrace{-x}^{u}}dx$$

$$u = -1 \qquad du = -dx$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = -\int_{0}^{\infty} e^{\overbrace{-x}^{u}}\underbrace{(-dx)}_{du} = -\int_{0}^{\infty} e^{u}du = -e^{u}\Big|_{0}^{\infty} = -e^{-x}\Big|_{0}^{\infty}$$

Y se sustituyen los límites de integración:

$$-e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = -\left[e^{-x} - e^{0}\right] = -\underbrace{e^{-x}}_{\text{®}\,0} + e^{0}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = 1$$



Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} x\cdot e^{-2x}\,dx$$

Solución

Esta integral se resuelve *por partes*; por tanto, al realizar los cambios de variable se tiene:

$$\begin{cases} u = x & dv = e^{-2x}dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} x\cdot e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2}x\cdot e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^{\infty}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= -\frac{1}{2}(\infty)\cdot\underbrace{e^{-2(\infty)}}_{\to 0} + \frac{1}{4}\underbrace{e^{-2(\infty)}}_{\to 0} - \left[-\frac{1}{2}(0)\cdot e^{-2(0)} + \frac{1}{4}e^{-2(0)}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(0)\cdot e^{-2(0)}}_{=0} - \underbrace{\frac{1}{4}e^{-2(0)}}_{=\frac{1}{4}}$$

$$\int_0^{\infty} x\cdot e^{-2x}dx = \frac{1}{4}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{-x^2}dx$$

Solución

Primero, la integral se resuelve mediante un cambio de variable:

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{\overbrace{-x^2}^{u}}dx$$

$$u = -x^2 \qquad du = -2x\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}(-2x\,dx) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{u}du$$



Al final, se integra y se sustituyen los límites de integración:

$$= -\tfrac{1}{2}e^{u}\Big|_{-\infty}^{0} = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0}$$

$$= -\tfrac{1}{2}e^{-(0)^2} - \left(-\tfrac{1}{2}e^{-(\infty)^2}\right) = -\tfrac{1}{2}\underbrace{e^{-(0)^2}}_{=1} + \tfrac{1}{2}\underbrace{e^{-(\infty)^2}}_{\to 0}$$

$$\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^{-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx$$

Solución

Esta integral se resuelve *por partes*:

$$\int_0^{\infty} \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = x^2 & dv = e^{-x}dx \\ du = 2x\,dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}dx = x^2 \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int_0^{\infty} 2x\left(-e^{-x}\right)dx$$

Al suprimir los paréntesis se tiene:

$$= -x^2 \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x}dx$$

Ahora, la integral resultante se vuelve a resolver *por partes*:

$$= -x^2 \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \underbrace{2x}_{u}\ \underbrace{e^{-x}dx}_{dv}$$

$$\begin{cases} u = 2x & dv = e^{-x}dx \\ du = 2dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \underbrace{2x}_{u}\ \underbrace{e^{-x}dx}_{dv} = -x^2 \cdot e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \left[2x\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2\left(-e^{-x}\right)dx\right]$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2xe^{-x}\Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-x}dx$$

Y la última integral ya es inmediata:

$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x}\Big|_0^{\infty}$$



Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \underbrace{-(\infty)^2 \times e^{-(\infty)} - 2(\infty)e^{-(\infty)} - 2e^{-(\infty)}}_{®} - \left[-(0)^2 \times e^{-(0)} - 2(0)\times e^{-(0)} - 2e^{-(0)}\right]$$

$$= \underbrace{(0)^2 \times e^{-(0)} + 2(0)\times e^{-(0)}}_{=0} + 2\underbrace{e^{-(0)}}_{=1}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} 2^{-x}\, dx$$

Solución

En este caso, la integral corresponde a una función exponencial en la cual la base es el número dos; por tanto, se resuelve con la fórmula:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{ln|a|}$$

Enseguida, se realiza el cambio de variable:

$$\int_0^{\infty} 2^{\overbrace{-x}^{u}} dx$$

$$u = -x \qquad du = -dx$$

Completando la integral y aplicando la fórmula se tiene:

$$\int_0^{\infty} 2^{-x} dx = -\int_0^{\infty} 2^{\overbrace{-x}^{u}} (-dx) = -\int_0^{\infty} 2^u du = -\frac{2^u}{ln\,2}\bigg|_0^{\infty}$$

Después, se regresa el cambio de variable y se sustituyen los límites de integración:

$$= -\frac{2^{-x}}{ln\,2}\bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{ln\,2}\left[2^{-\infty} - 2^0\right] = -\frac{1}{ln\,2}\left[2^{-\infty} - 2^0\right]$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$\int_0^{\infty} 2^{-x} dx = \frac{1}{ln\,2}$$



Integrales múltiples

Las integrales múltiples suelen emplearse cuando la función a integrar depende de dos o más variables; por ejemplo, $f(x,y)$ o $f(x,y,z)$.

En el caso de las integrales dobles, su aplicación más simple es para hallar el área de una región del plano . Esta área está dada por una integral del tipo:

$$A = \iint dx\, dy = \iint dy\, dx$$

Con los límites de integración apropiados, las integraciones pueden realizarse primero con respecto a y después con respecto a ; esto es:

$$A = \int_{a}^{b}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\, dx$$

Integrales iteradas

Una integral iterada es aquella que se resuelve de forma sucesiva. Esto significa que primero se integra con respecto a , y el resultado obtenido se integra con respecto a o viceversa:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{x} 7\,dy\,dx$$

Solución

Primero, se integra con respecto a y :

$$\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{x} 7\,dy\,dx = \int_{-1}^{3}\left(\int_{x^2}^{x} 7\,dy\right)dx$$

Por simplicidad, en este caso se extrae la integral que se encuentra dentro del paréntesis y se integra:

$$\int_{x^2}^{x} 7\,dy = 7y\Big|_{x^2}^{x} = 7\left[(x)-(x^2)\right] = 7x - 7x^2$$

Luego, el resultado obtenido se integra con respecto a x :

$$\int_{-1}^{3}\left(7x - 7x^2\right)dx = \tfrac{7}{2}x^2 - \tfrac{7}{3}x^3\Big|_{-1}^{3}$$



Enseguida, se sustituyen los límites de integración y se realizan las operaciones correspondientes:

$$=\tfrac{7}{2}\left[(3)^2-(-1)^2\right]-\tfrac{7}{3}\left[(3)^3-(-1)^3\right]$$

$$=\tfrac{7}{2}(8)-\tfrac{7}{3}(28)=\tfrac{28}{2}-\tfrac{196}{3}$$

$$\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{x}7dy\,dx=-\tfrac{112}{3}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-3}^{3}\int_{2x^2}^{3x-5x^2}5dy\,dx=\int_{-3}^{3}\left[5\int_{2x^2}^{3x-5x^2}dy\right]dx$$

Solución

Primero, se resuelve para y:

$$5\int_{2x^2}^{3x-5x^2}dy=5\left[y\right]_{2x^2}^{3x-5x^2}=5\left[(3x-5x^2)-(2x^2)\right]$$

$$=5\left[3x-5x^2-2x^2\right]=5\left[3x-7x^2\right]=15x-35x^2$$

$$5\int_{2x^2}^{3x-5x^2}dy=15x-35x^2$$

Enseguida, se integra con respecto a x:

$$\int_{-3}^{3}(15x-35x^2)dx=\left[\tfrac{15}{2}x^2-\tfrac{35}{3}x^3\right]_{-3}^{3}$$

$$=\tfrac{15}{2}\left[(3)^2-(-3)^2\right]-\tfrac{35}{3}\left[(3)^3-(-3)^3\right]$$

$$=\tfrac{15}{2}\left[9-9\right]-\tfrac{35}{3}\left[27-(-27)\right]=-\tfrac{35}{3}(54)$$

$$\int_{-3}^{3}\int_{2x^2}^{3x-5x^2}5dy\,dx=-630$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{2}^{9}\int_{4}^{5y}7x\,dx\,dy$$

Solución

Primero, se integra con respecto a x:

$$\int_{4}^{5y}7x\,dx=\left[\tfrac{7}{2}x^2\right]_{4}^{5y}=\tfrac{7}{2}\left[(5y)^2-(4)^2\right]=\tfrac{7}{2}\left[25y^2-16\right]=\tfrac{175}{2}y^2-56$$



El resultado obtenido se integra con respecto a y:

$$\int_2^9 \left(\tfrac{175}{2}y^2 - 56\right)dy = \tfrac{175}{2}\int_2^9 y^2\,dy - 56\int_2^9 dy$$

$$= \left[\tfrac{175}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)y^3 - 56y\right]_2^9 = \left[\tfrac{175}{6}y^3 - 56y\right]_2^9$$

Después, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{175}{6}\left[(9)^3 - (2)^3\right] - 56\left[(9) - (2)\right] = \tfrac{175}{6}(729 - 8) - 56(9 - 2)$$

$$= \tfrac{175}{6}(721) - 56(7) = \tfrac{126\,175}{6} - 392$$

$$\int_2^9\int_4^{5y} 7x\,dx\,dy = \frac{123\,823}{6}$$

Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-1}^{7}\int_2^{3x}(x + y)\,dy\,dx$$

Solución

Primero, se integra y, y se sustituyen límites de integración:

$$\int_2^{3x}(x + y)dy = \int_2^{3x} x\,dy + \int_2^{3x} y\,dy = x\int_2^{3x} dy + \int_2^{3x} y\,dy$$

$$\left[x \times y + \tfrac{1}{2}y^2\right]_2^{3x} = x\left[(3x) - (2)\right] + \tfrac{1}{2}\left[(3x)^2 - (2)^2\right] = x(3x - 2) + \tfrac{1}{2}\left(9x^2 - 4\right)$$

$$= 3x^2 - 2x + \tfrac{9}{2}x^2 - 2 = \tfrac{15}{2}x^2 - 2x - 2$$

Luego, el resultado se integra con respecto a x:

$$\int_{-1}^{7}\left(\tfrac{15}{2}x^2 - 2x - 2\right)dx = \int_{-1}^{7}\tfrac{15}{2}x^2\,dx - \int_{-1}^{7}2x\,dx - \int_{-1}^{7}2\,dx =$$

$$= \left[\tfrac{15}{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)x^3 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)x^2 - 2x\right]_{-1}^{7} = \left[\tfrac{15}{6}x^3 - x^2 - 2x\right]_{-1}^{7}$$

Por último, se sustituyen los límites de integración:

$$= \tfrac{15}{6}\left[(7)^3 - (-1)^3\right] - \left[(7)^2 - (-1)^2\right] - 2\left[(7) - (-1)\right]$$

$$= \tfrac{15}{6}\left[343 - (-1)\right] - (49 - 1) - 2(7 + 1)$$

$$= \tfrac{15}{6}(343 + 1) - 48 - 2(8) = \tfrac{15}{6}(344) - 48 - 16$$



Problema resuelto

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-3}^{5}\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2-8y^2\right)dy\,dx$$

Solución

Primero, se integra con respecto a y:

$$\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2-8y^2\right)dy=\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2\right)dy-\int_{-4}^{5}8y^2dy$$

$$=\left[\left(1-3x^2\right)y-\tfrac{8}{3}y^3\right]_{-4}^{5}$$

Después, se sustituyen los límites de integración:

$$=\left(1-3x^2\right)\left[(5)-(-4)\right]-\tfrac{8}{3}\left[(5)^3-(-4)^3\right]$$

$$=\left(1-3x^2\right)(5+4)-\tfrac{8}{3}\left[125-(-64)\right]=\left(1-3x^2\right)(9)-\tfrac{8}{3}(189)$$

$$=9-27x^2-504=-27x^2-495$$

Al final, se integra el resultado con respecto a x:

$$\int_{-3}^{5}\left(-27x^2-495\right)dx=\left[-27\left(\tfrac{1}{3}\right)x^3-495x\right]_{-3}^{5}$$

$$=\left[-9x^3-495x\right]_{-3}^{5}=-9\left[(5)^3-(-3)^3\right]-495\left[(5)-(-3)\right]$$

$$=-9\left[125-(-27)\right]-495(5+3)=-9(125+27)-495(8)$$

$$=-9(152)-3\,960=-1\,368-3\,960$$

$$\int_{-3}^{5}\int_{-4}^{5}\left(1-3x^2-8y^2\right)dy\,dx=-5\,328$$

Problema resuelto.

Resolver la siguiente integral doble:

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos 3x\,dx\,dy$$

Solución

En este caso, primero se integra con respecto a x mediante cambio de variable:

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos 3x\,dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\cos \underbrace{3x}_{u}\,dx$$

$$u=3x \qquad du=3dx$$



Después, se completa la integral:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos 3x\, dx = \left(\tfrac{1}{3}\right)\int \underbrace{\cos 3x}_{\cos u}\, \underbrace{3\,dx}_{du} = \tfrac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos u\, du$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}\,\text{sen}\, u\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \left[-\tfrac{1}{3}\,\text{sen}\, 3x\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

Se sustituyen los límites de integración:

$$= -\tfrac{1}{3}\left[\text{sen}\, 3\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) - \text{sen}\, 3(0)\right] = -\tfrac{1}{3}(-1-0)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\eth} \cos 3x\, dx = \tfrac{1}{3}$$

Por último, se integra con respecto a y :

$$\int_{-2}^{2}\left(\tfrac{1}{3}\right)dy = \tfrac{1}{3}\int_{-2}^{2} dy = \left[\tfrac{1}{3}\,y\right]_{-2}^{2} = \tfrac{1}{3}\left[(2)-(-2)\right] = \tfrac{1}{3}(2+2)$$

$$\int_{-2}^{2}\int_0^{\frac{1}{2}\eth} \cos 3x\, dx\, dy = \tfrac{4}{3}$$



Problemas para resolver

Resolver las siguientes integrales definidas:

1. $\int_{1.1}^{3.5} 4x^2\sqrt{3x^3+2}\;dx = 438.002$

2. $\int_0^{\pi} x \times sen\,x\,dx = \pi$

3. $\int_{-3}^{2} -e^{-x}dx = -19.950$

4. $\int_{0.1}^{0.7} \frac{x^2\,dx}{1-2x^3} = 0.192$

5. $\int_{\frac{1}{16}\pi}^{\frac{3}{16}\pi} x \times cos\left(7x^2+2\right)dx = -0.123$ (Problema reto)

6. $\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{10}\pi} 4e^{2x} \times sen\; e^{2x}dx = 0.276$ (Problema reto)

7. $\int_0^{\frac{1}{5}\pi} 2x \times e^{x^2}\,cos\;e^{x^2}dx = 0.154$ (Problema reto)

8. $\int_0^{2\pi} sen^2\,5x\,dx = \pi$ (Problema reto)

9. $\int_{2.8}^{5.1} 3x\,\sqrt{2x-5}\;dx = 46.897$

10. $\int_{1.6}^{4.6} 2x\left(7x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx = 165.588$

11. $\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}x}dx = 3$

12. $\int_{-\infty}^{0} x \times e^{x}dx = -1$

13. $\int_0^{\infty} x \times e^{-x}dx = 1$

14. $\int_{-\infty}^{\infty} x \times e^{-x^2}dx = 0$

15. $\int_{-\infty}^{0} x^2 \times e^{x}dx = 2$

16. $\int_0^{\infty} 3x^2e^{-4x}dx =$

17. $\int_0^{\infty} 3^{-x}dx = 0.910$

18. $\int_0^{\infty} x \times 2^{-x}dx = 2.081$ (Problema reto)

19. $\int_{-\infty}^{0} x \times 5^{-x^2}dx = 0.311$ (Problema reto)

20. $\int_{-5}^{4}\int_{-x}^{6x^2} 3y\;dy\,dx = \frac{447\,147}{10}$

21. $\int_{-1}^{1}\int_{3}^{9}\left(5xy-4x^2y^2\right)dx\,dy = -624$

22. $\int_0^1\int_{-x}^{x}\sqrt{x+y}\;dy\,dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}$ (Problema reto)

23. $\int_0^4\int_0^{\pi} y \times cos\;y\,dy\,dx = -8$

24. $\int_1^e\int_0^{Ln\,x} y\,dy\,dx = e-1$ (Problema reto)

25. $\int_2^4\int_1^5\left(x^2+y^2\right)dy\,dx = -8$



Referencias bibliográficas

Leithold, Louis, *El cálculo,*7ª edición, Oxford University Press.México.
Purcell, Edwin J., *Cálculo*, Pearson Educación. México
Ayres, Frank Jr., *Cálculo diferencial e integral*, 3ª edición, McGraw-Hill. México

Referencias electrónicas

http://www.itpuebla.edu.mx/Alumnos/Cursos_Tutoriales/Carlos_Garcia_Franchini/Matematicas/TesisMartha/ejercicios,%20problemas%20y%20sol/Mis_7.htm#Ejercicio7_1_11

http://ed21.webcindario.com/CalculoIntegral/propiedades_de_la_integral%20_definida.htm





A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

$2^2+3^2+4^2+5^2 \qquad \sum_{x=2}^{5} x^2 = 54$

1.2

$\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{6} \qquad \sum_{j=1}^{6} \sqrt[3]{j} = 8.8176$

1.3

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \qquad \sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k} = \frac{761}{280}$

1.4

$\frac{\sqrt{2}}{2^2}+\frac{\sqrt{3}}{3^2}+\frac{\sqrt{4}}{4^2}+\frac{\sqrt{5}}{5^2}+\frac{\sqrt{6}}{6^2} \qquad \sum_{k=2}^{8} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = 0.828$

1.5

$\sum_{i=0}^{6} \frac{2}{i+2} = 3.436$

1.6

$\sum_{n=0}^{4} \frac{n}{3n+2} = 1.008$

1.7

$\sum_{x=1}^{6} \frac{5x}{4x-1} = 8.412$

1.8

$\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n(2n-1)} = 1.306$

1.9

$\sum_{k=0}^{5} \frac{7-4k^2}{3+2k^2} = -2.649$

1.10

$\sum_{i=0}^{4} \frac{4}{8-7i} = 3.326$

1.11

$\sum_{n=1}^{6} \frac{5n}{4n+2} = 6.306$

1.12

$\sum_{k=0}^{5} \frac{k+1}{2k-1} = 4.181$

1.13

$\sum_{x=1}^{7} \frac{x^2+1}{x} = 30.593$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$$\int \frac{2}{x^2}dx = \frac{-2}{x}+c$$

2.2
$$\int\left(4x-\frac{5}{x^3}\right)dx = 2x^2+\frac{5}{2x^2}+c$$

2.3
$$\int \frac{4x^3-2x^4}{x^6}dx = \frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x}+c$$

2.4
$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \tfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}+c$$

2.5
$$\int 5\sqrt[4]{x^3}\,dx = \tfrac{20}{7}\sqrt[4]{x^7}+c$$

2.6
$$\int \sqrt{x}\,(2x-1)\,dx = \tfrac{4}{5}\sqrt{x^5}-\tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$$

2.7
$$\int \sqrt[4]{x^5}\,(1-x^2)\,dx = \tfrac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}-\tfrac{4}{17}\sqrt[4]{x^{17}}+c$$

2.8
$$\int t^3\left(\sqrt[4]{t^5}+\sqrt{t^5}\right)dt = \tfrac{2}{13}\sqrt{t^{13}}+\tfrac{4}{21}\sqrt[4]{t^{21}}+c$$

2.9
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3}} = -\frac{3}{\sqrt{x^3}}+c$$

2.10
$$\int\left(\sqrt[5]{x^6}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^6}}\right)dx = \tfrac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+c$$

2.11
$$\int \sqrt[4]{1-2x}\,dx = -\tfrac{2}{5}\sqrt[4]{(1-2x)^5}+c$$

2.12
$$\int (2-x)^3\,dx = -\tfrac{1}{4}(2-x)^4+c$$

2.13
$$\int (4x+3)^{\frac{4}{3}}\,dx = \tfrac{3}{28}(4x+3)^{\frac{7}{3}}+c$$

2.14
$$\int \frac{5dx}{(7-2x)^3} = \frac{5}{4(7-2x)^2}+c$$

2.15
$$\int \sqrt{4x+8}\,dx = \tfrac{4}{3}\sqrt{(4x+8)^3}+c$$

2.16
$$\int \frac{4\,dx}{\sqrt[3]{2x-5}} = 3\sqrt[3]{(2x-5)^2}+c$$

2.17
$$\int 2x\sqrt{3x^2-1}\,dx = \tfrac{2}{9}\sqrt{(3x^2-1)^3}+c$$

2.18
$$\int 2x(7x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \tfrac{2}{21}(7x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$$

2.19
$$\int 4r^2\sqrt{3r^3+2}\,dr = \tfrac{8}{27}\sqrt{(3r^3+2)^3}+c$$

2.20
$$\int \frac{2t\,dt}{\sqrt[4]{1-t^2}} = -\tfrac{4}{3}\sqrt[4]{(1-t^2)^3}+c$$

2.21
$$\int \frac{8x^2\,dx}{\left(1-x^3\right)^3}=\frac{4}{3\left(1-x^3\right)^2}+c$$

2.22
$$\int 4x^3\sqrt[3]{\left(2x^4-4\right)^2}\,dx=\tfrac{3}{10}\sqrt[3]{\left(2x^4-4\right)^5}+c$$

2.23
$$\int(4x-1)\left(6x^2-3x+5\right)^{\frac{8}{5}}dx=\tfrac{5}{39}\left(6x^2-3x+5\right)^{\frac{13}{5}}+c$$

2.24
$$\int(5x^2+1)\sqrt{5x^3+3x-2}\,dx=\tfrac{2}{9}\sqrt{\left(5x^3+3x-2\right)^3}+c$$

2.25
$$\int 7e^{3x}\,dx=\tfrac{7}{3}e^{3x}+c$$

2.26
$$\int 2e^{-x}\,dx=-2e^{-x}+c$$

2.27
$$\int xe^{x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}e^{x^2}+c$$

2.28
$$\int 4x^2e^{2x^3}\,dx=\tfrac{2}{3}e^{2x^3}+c$$

2.29
$$\int 5xe^{-3x^2}\,dx=-\tfrac{5}{6}e^{-3x^2}+c$$

2.30
$$\int\frac{5\,dt}{e^{3t}}=-\frac{5}{3e^{3t}}+c$$

2.31
$$\int\frac{2dx}{e^{6x}}=-\frac{1}{3e^{6x}}+c$$

2.32
$$\int\frac{5x}{e^{3x^2}}dx=-\frac{5}{6e^{3x^2}}+c$$

2.33
$$\int\frac{7x^3}{e^{x^4}}dx=-\frac{7}{4e^{x^4}}+c$$

2.34
$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{e^{8x}}}=-\frac{3}{8\sqrt[3]{e^{8x}}}+c$$

2.35
$$\int\frac{3e^{2x}dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=$$

2.36
$$\int\frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}=ln\left|\frac{1}{e^{-x}+1}\right|+c$$

2.37
$$\int 2x\left(e^{3x^2}+3x\right)dx=\tfrac{1}{3}e^{3x^2}+2x^3+c$$

2.38
$$\int\frac{e^{5x}-5}{e^{5x}}dx=e^{-5x}+x+c$$

2.39
$$\int\frac{e^{\sqrt[3]{x}}+6}{\sqrt[3]{x^2}}dx=3e^{\sqrt[3]{x}}+18\sqrt[3]{x}+c$$

2.40
$$\int\frac{e^{\frac{5}{x^3}}}{x^4}dx=-\tfrac{1}{15}e^{\frac{5}{x^3}}+c$$

2.41
$$\int\left(e^{2x}-3\right)^2dx=\tfrac{1}{4}e^{4x}-3e^{2x}+9x+c$$

2.42
$$\int \left(e^{3x}+4\right)^2 e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{9}\left(e^{3x}+4\right)^3 + c$$

2.43
$$\int e^{-x}\sqrt{e^{-x}-7}\,dx = -\tfrac{2}{3}\sqrt{\left(e^{-x}-7\right)^3} + c$$

2.44
$$\int \left(e^{2x}-\frac{1}{e^{2x}}\right)^2 dx = \tfrac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{4e^{4x}} - 2x + c$$

2.45
$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = ln\left|e^x-1\right|^2 - x + c$$

2.46
$$\int \frac{5\,dx}{2x-4} = ln\left|\sqrt{\left(2x-4\right)^5}\right| + c$$

2.47
$$\int \frac{7x\,dx}{3x^2-1} = ln\left|\sqrt[6]{\left(3x^2-1\right)^7}\right| + c$$

2.48
$$\int \frac{5x^2\,dx}{1-2x^3} = ln\left|\frac{1}{\sqrt[6]{\left(1-2x^3\right)^5}}\right| + c$$

2.49
$$\int \frac{6x\,dx}{1-x^2} = ln\left|\frac{1}{\left(1-x^2\right)^3}\right| + c$$

2.50
$$\int \frac{\left(x+1\right)dx}{x-1} = x + ln\left|\left(x-1\right)^2\right| + c$$

2.51
$$\int \frac{\left(x^2+3x-5\right)dx}{x-1} = \tfrac{1}{2}x^2 + 4x - ln\left|x-1\right| + c$$

2.52
$$\int \frac{\left(x^2-x+1\right)dx}{x+1} = \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + ln\left|\left(x+1\right)^3\right| + c$$

2.53
$$\int 2^{3x}\,dx = \frac{2^{3x}}{ln\,8} + c$$

2.54
$$\int 4^{-2x}\,dx = -\frac{4^{-2x}}{ln\,16} + c$$

2.55
$$\int \frac{e^{-x}dx}{5-e^{-x}} = ln\left|5-e^{-x}\right| + c$$

2.56
$$\int \frac{\left(e^{3x}+e^{-3x}\right)dx}{e^{3x}-e^{-3x}} = ln\left|\sqrt[3]{e^{3x}-e^{-3x}}\right| + c$$

2.57
$$\int \frac{\left(x-1\right)dx}{3x^2-6x+1} = ln\left|\sqrt[6]{3x^2-6x+1}\right| + c$$

2.58
$$\int \frac{x^3+1}{x-1}\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + x + ln\left|\left(x-1\right)^2\right| + c$$

2.59
$$\int \frac{e^{-x}+2}{e^{-x}-5}\,dx = Ln\left|\frac{1}{\left(e^x-5\right)\sqrt[5]{\left(1-5e^x\right)^2}}\right| + c$$



2.60
$$\int 3x\cos\left(6x^2+4\right)dx=\tfrac{1}{4}\text{sen}\left(6x^2+4\right)+c$$

2.61
$$\int 5t\,\text{sen}\left(6t^2-1\right)dt=-\tfrac{5}{12}\cos\left(6t^2-1\right)+c$$

2.62
$$\int\frac{\text{sen}\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}}=-3\cos\sqrt[3]{x}+c$$

2.63
$$\int 5e^{-3x}\,\text{sen}\,e^{-3x}\,dx=\tfrac{5}{3}\cos e^{-3x}+c$$

2.64
$$\int 2\,\text{sen}^2\left(\tfrac{1}{2}x\right)dx=x-\text{sen}\,x+c$$

2.65
$$\left\{\begin{aligned}&\int 5x\,\text{sen}^3\left(2x^2+3\right)dx=\\&=-\tfrac{5}{4}\cos\left(2x^2+3\right)-\tfrac{5}{12}\cos^3\left(2x^2+3\right)+c\end{aligned}\right.$$

2.66
$$\left\{\begin{aligned}&\int\text{sen}^2 2x\cos^2 2x\,dx=\\&=\tfrac{1}{8}x-\tfrac{1}{64}\text{sen}\,8x+c\end{aligned}\right.$$

2.67
$$\left\{\begin{aligned}&\int\text{sen}\,5x\,\text{sen}\,7x\,dx=\\&=-\tfrac{1}{4}\text{sen}\left(-2x\right)-\tfrac{1}{24}\text{sen}\left(12x\right)+c\end{aligned}\right.$$

2.68
$$\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{3-4\,\text{sen}\,x}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3-4\,\text{sen}\,x}+c$$

2.69
$$\int\frac{\sqrt[3]{\cos^2 3x}\,dx}{\csc 3x}=-\tfrac{1}{5}\sqrt[3]{\cos^5 3x}+c$$

2.70
$$\int\frac{\sec^2 2x\,dx}{\sqrt{5+3\tan 2x}}=\tfrac{1}{3}\sqrt{5+3\tan 2x}+c$$

2.71
$$\int\frac{\text{sen}\,7x\,dx}{\cos 7x-1}=ln\frac{1}{\sqrt[7]{\cos 7x-1}}+c$$

2.72
$$\int 3\csc^2 2x\sqrt{\cot 2x}\,dx=-\sqrt{\left(\cot 2x\right)^3}+c$$

2.73
$$\int\frac{\left(e^x+\cos x\right)dx}{\sqrt{e^x+\text{sen}\,x}}$$

2.74
$$\left\{\begin{aligned}&\int -4\sqrt[3]{1-\tan 3x}\,\sec^2 3x\,dx=\\&=\sqrt[3]{\left(1-\tan 3x\right)^4}+c\end{aligned}\right.$$

2.75
$$\int 3x\cdot\csc x^2\cdot\cot x^2\,dx=-\tfrac{3}{2}\csc x^2+c$$

2.76
$$\int\csc^2\left(a-bx\right)dx=\tfrac{1}{b}\cot\left(a-bx\right)+c$$

2.77
$$\int\csc\tfrac{a}{b}x\cdot\cot\tfrac{a}{b}x\,dx=-\tfrac{b}{a}\csc\tfrac{a}{b}x+c$$

2.78
$$\int\frac{\text{sen}\,2x\,dx}{3+\cos 2x}=-ln\left|\sqrt{3+\cos 2x}\right|$$

2.79
$$\int\frac{\csc x\cdot\cot x}{5-4\csc x}dx=ln\left|\sqrt[4]{5-4\csc x}\right|+c$$

2.80

$$\int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\sqrt{4+\cos 2x}} = -\sqrt{4+\cos 2x}+c$$

2.81

$$\int \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}x\,dx = -\tfrac{3}{2}\cos \tfrac{2}{3}x + c$$

2.82

$$\int \sqrt{\tan^3 4x}\,\sec^2 4x\,dx = \tfrac{1}{10}\sqrt{\tan^5 4x}+c$$

2.83

$$\int \frac{\sec^2 3x\,dx}{\sqrt{1+\tan 3x}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{1+\tan 3x}+c$$

2.84

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 4x} = -\tfrac{1}{4}\cot 4x + c$$

2.85

$$\int \frac{dx}{\tan 5x} = ln\left|\sqrt[5]{\operatorname{sen} 5x}\right| + c$$

2.86

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 3x} = -\tfrac{1}{3}\cot 3x + c$$

2.87

$$\int \frac{dx}{\cos 4x} = ln\left|\sqrt[4]{\sec 4x+\tan 4x}\right| + c$$

2.88

$$\int \frac{a\,dx}{\cos^2 bx} = \tfrac{a}{b}\tan bx + c$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
$x ln\left|\sqrt[3]{x^2}\right| - \frac{2}{3}x + c$

3.2
$\frac{3}{2}x^2\ ln\left|5x\right| - \frac{3}{4}x^2 + c$

3.3
$\frac{4}{3}x^3 ln\left|\frac{2}{3}x\right| - \frac{4}{9}x^3 + c$

3.4
$\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}\ ln\left|x\right| - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

3.5
$\frac{2}{3}xe^x - \frac{2}{9}e^{3x} + c$

3.6
$-5xe^{-x} - 5e^{-x} + c$

3.7
$\frac{2^x}{ln\ 2}\left[x - \frac{1}{ln\ 2}\right] + c$

3.8
$e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$

3.9
$\frac{7}{4}e^{-4x}\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right) + c$

3.10
$\frac{1}{16}\text{sen } 8x - \frac{1}{2}x \cdot \cos 8x + c$

3.11
$\frac{1}{3}x^2 \cdot \text{sen } 3x + \frac{2}{9}x \cdot \cos 3x - \frac{2}{27}\text{sen } 3x + c$

3.12
$x \cdot \text{arc sen } 2x + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + c$

3.13
$x \cdot \text{arc cos } 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2} + c$

3.14
$x \cdot \text{arc tan } 7x - \frac{1}{14}ln\left|49x^2 + 1\right| + c$

3.15
$x\sqrt{\left(2x - 5\right)^3} - \frac{1}{5}\sqrt{\left(2x - 5\right)^5} + c$

3.16
$-\frac{4}{3}x\sqrt{\left(1 - 2x\right)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{\left(1 - 2x\right)^5} + c$

3.17
$\frac{1}{5}e^{-x}\left(2\text{sen } 2x - \cos 2x\right) + c$

3.18
$-\frac{1}{10}\csc 5x \cdot \cot 5x + \frac{1}{10}ln\left|\csc 5x - \cot 5x\right| + c$

3.19
$ln\sqrt[6]{\left|\frac{x - 3}{x + 3}\right|^7} + c$

3.20
$ln\left|\left(x - 4\right)^4\left(x + 2\right)\right| + c$

3.21
$ln\left|\sqrt[12]{\left(\frac{2x - 3}{2x + 3}\right)^5}\right| + c$



3.22

$$ln\left|(x+2)^2(x+1)^3\right|+c$$

3.23

$$ln\left|\sqrt[3]{(x+4)(x+1)^2}\right|+c$$

3.24

$$ln\left|\frac{\sqrt[28]{(x+4)^{15}}\ \sqrt[21]{x-3}}{\sqrt[12]{x^7}}\right|+c$$

3.25

$$ln\left|\frac{\sqrt{x(x+2)^3}}{x-1}\right|+c$$

3.26

$$ln\left|\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[5]{(x+5)^2}\ \sqrt[10]{x}}\right|+c$$

3.27

$$ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right|+2\text{arc tan}\,x+c$$

3.28

$$ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+x+c$$

3.29

$$ln|x-1|-\frac{4x-3}{2(x-1)^2}+c$$

3.30

$$ln\left|\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\right|-\frac{x}{2(x^2-1)}+c$$

3.31

$$x-ln\left|(x-1)^3\right|+c$$

3.32

$$ln\left|\frac{\sqrt[10]{(x-3)^{11}}}{\sqrt[20]{x^2+1}}\right|+\tfrac{7}{10}arc\ \tan x+c$$

3.33

$$ln\left|\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x^2+2}}\right|+c$$

3.34

$$ln\left|\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5}\right|-\frac{5x}{2(x^2-1)}+c$$

3.35

$$ln\left|\sqrt[9]{\frac{(x-3)^{13}}{x^4}}\right|+\frac{4}{3x}+c$$

3.36

$$ln\left|\sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}}\right|+\tfrac{1}{4}\text{arc tan}\,\frac{x}{2}+c$$

3.37

$$x+ln\left|(x-4)^4(x+2)\right|+c$$



3.38

$x + ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| + c$

3.39

$ln\left|\sqrt[5]{(x-4)^4(x+1)}\right| + c$

3.40

$\text{arc sen } x - x\sqrt{1-x^2} + c$

3.41

$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| + c$

3.42

$9ln\left|\sqrt{x^2+9}+x\right| + x\sqrt{x^2+9} + c$

3.43

$\text{arc tan } \sqrt{x^2-1} + c$

3.44

$-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$

3.45

$\frac{\sqrt{25x^2-16}}{x} + c$

3.46

$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c$

3.47

$\frac{x}{\sqrt{9-4x^2}} + c$

3.48

$ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + c$

3.49

$x\sqrt{x^2-4} + 4Ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + c$

3.50

$\text{arc sen } \frac{x}{2} + c$

3.51

$ln\left|\frac{\sqrt{16x^2+1}-1}{x}\right| + c$

3.52

$a^2\sqrt{x^2-a} + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-a)^3} + c$

3.53

$\frac{1}{16}\text{arc tan } \frac{x}{2} + \frac{x}{32+8x^2} + c$

3.54

$\frac{x^3\text{arc sen } x + \sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{9} + c$

3.55

$\frac{1}{32}x\sqrt{16x^2+9} - \frac{9}{128}ln\left|4x+\sqrt{16x^2+9}\right| + c$

3.56

$\text{arc sen } \frac{x-4}{3} + c$



3.57

$$\int \sqrt{y^2-6y+18}\,dy = \tfrac{1}{2}(y-3)\sqrt{y^2-6y+18}+\tfrac{9}{2}\ln\left|y-3+\sqrt{y^2-6y+18}\right|+c$$

3.58

$$\int \sqrt{3-4x-2x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-4x-2x^2}+\tfrac{5}{2\sqrt{2}}\,arc\ sen\sqrt{\tfrac{2}{5}}(x+1)+c$$

3.59

$$\ln\left|\sqrt{\frac{t-2}{t-4}}\right|+c$$

3.60

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{3-2x^2}+\tfrac{3}{2\sqrt{2}}\text{arc sen}\sqrt{\tfrac{2}{3}}x+c$$

3.61

$$\tfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x-1+\tfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{5x^2-10x+4}\right|+c$$

3.62

$$\tfrac{1}{2}\text{arc sen}\,(2x-4)+c$$

3.63

$$\int \frac{\sqrt{x^2-10x+9}\,dx}{(x-5)^2} = -\frac{\sqrt{x^2-10x+9}\,dx}{x-5}+\ln\left|x-5+\sqrt{x^2-10x+9}\right|+c$$

3.64

$$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-4x+5}-1}{x-2}\right|+c$$

3.65

$$\int \frac{\sqrt{4x^2+3}\,dx}{x^2} = 2\ln\left|2x+\sqrt{4x^2+3}\right|-\frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}+c$$

3.66

$$\int \sqrt{3x^2+6x+4}\,dx = \tfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{3x^2+6x+4}+\tfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3x^2+6x+4}\right|+c$$

3.67

$$\sqrt{x^2-4x-5}-3arc\ sen\frac{x-2}{3}+c$$

3.68

$$\frac{\sqrt{3x^2-1}}{x}+c$$

3.69

$$\tfrac{7}{3\sqrt{3}}\text{arc sen}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x+\tfrac{1}{6}x\sqrt{4-3x^2}+c$$

3.70

$$4\cdot\text{arc sen}\,\tfrac{1}{2}x-x\sqrt{4-x^2}+c$$

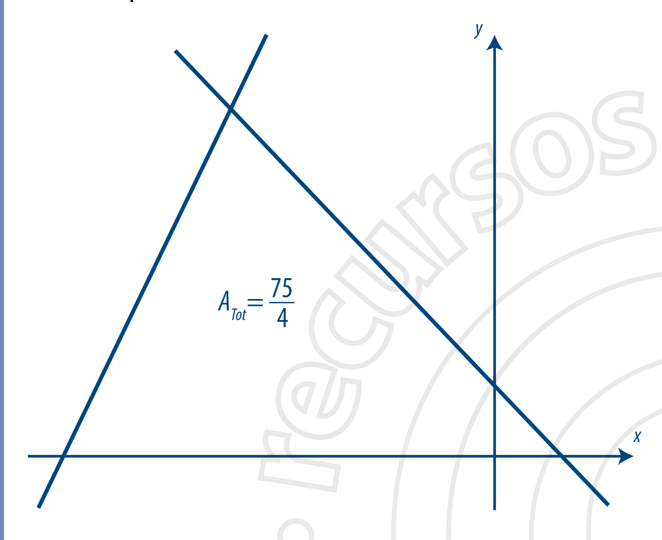


A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.



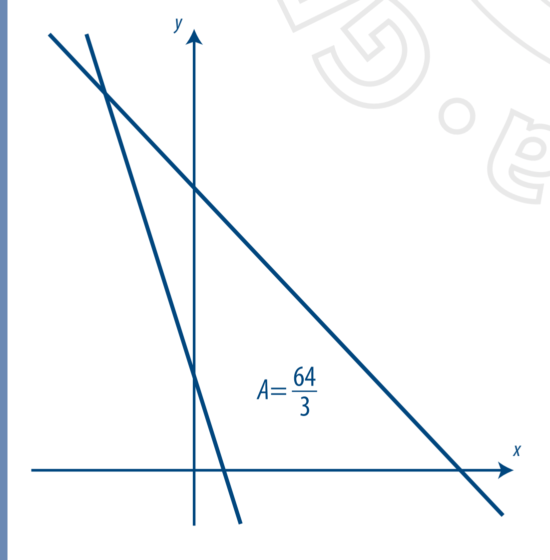
4.1

$$A_{Tot} = \frac{75}{4}$$



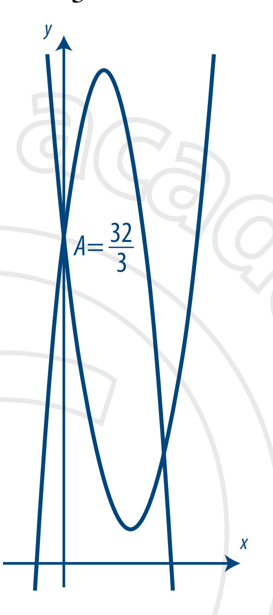
4.2

$$A = \frac{64}{3}$$



4.3

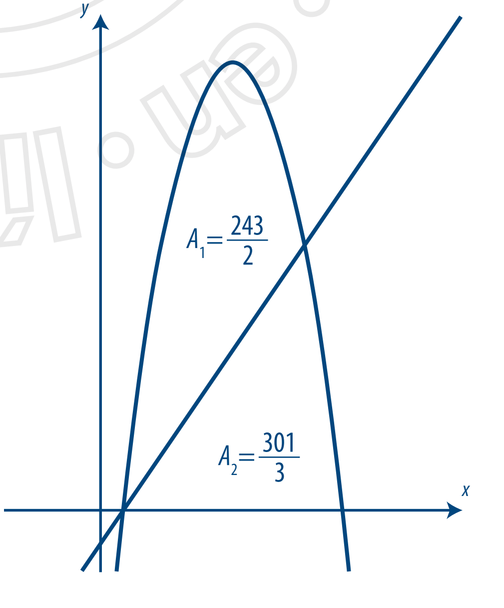
$$A = \frac{32}{3}$$





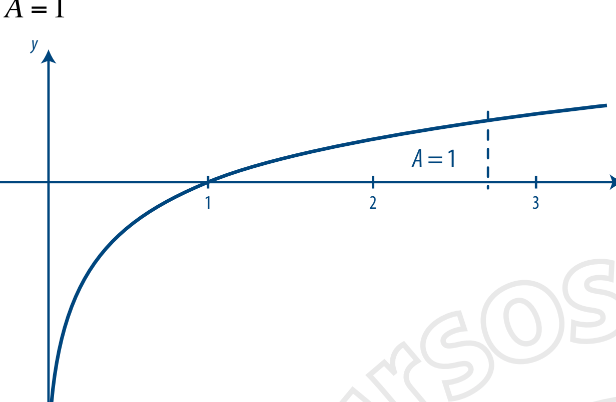
4.4

$$A_1 = \frac{243}{2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{301}{3}$$



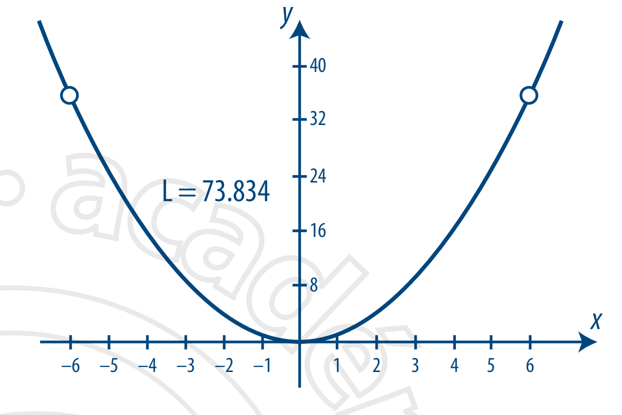
4.5

$A = 1$



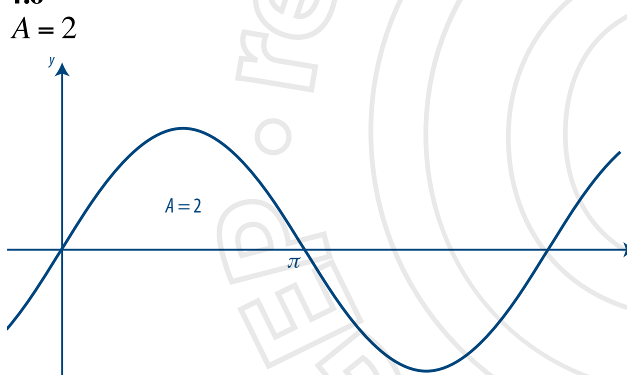
4.8

$L = 73.834$

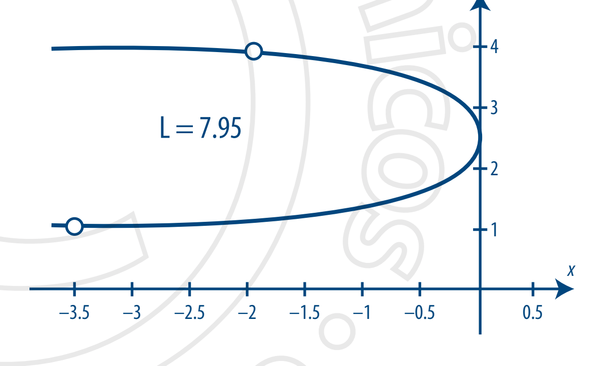


4.6

$A = 2$

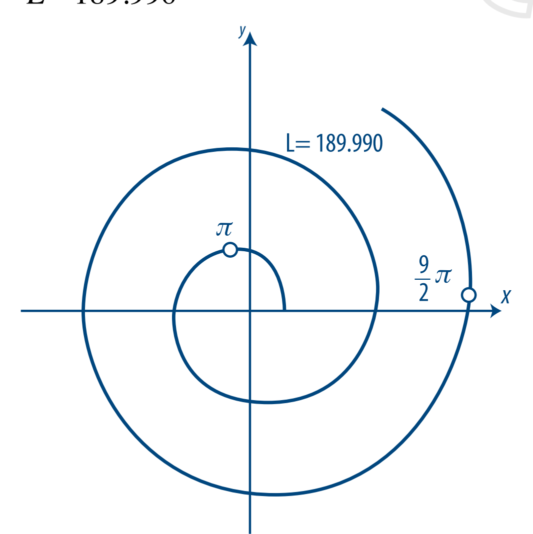


$L = 7.95$



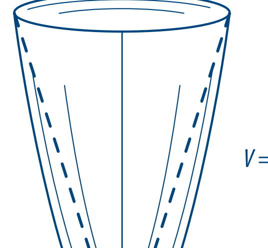
4.7

$L = 189.990$



4.9

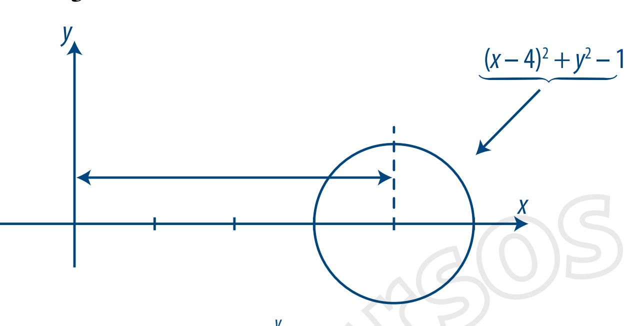
$V = \dfrac{128}{3}\pi$

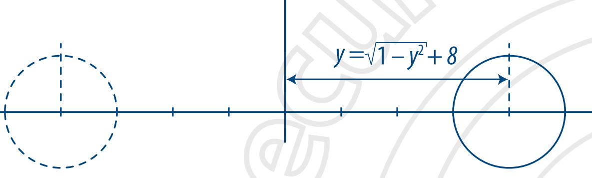


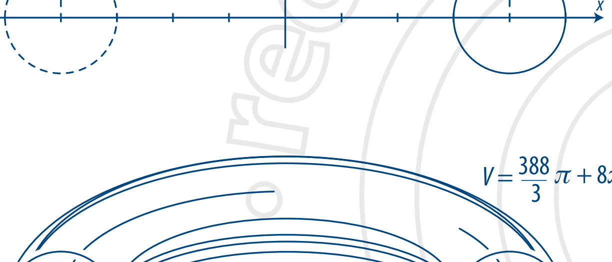


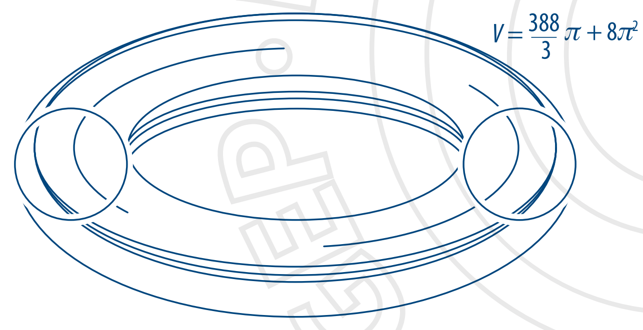
4.10

$$V = \frac{388}{3}\pi + 8\pi^2$$

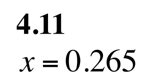








4.11



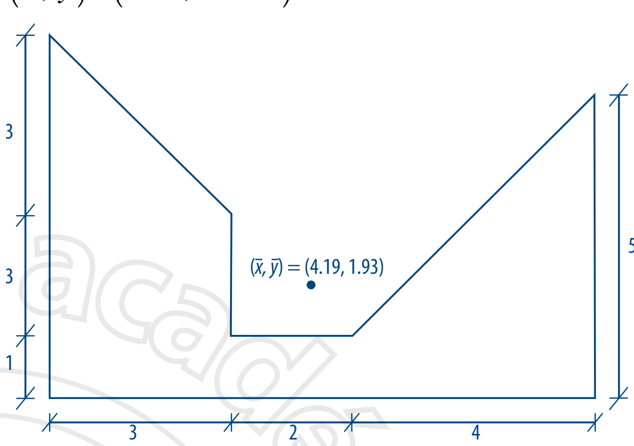
$x = 0.265$

4.12

$(\bar{x}, \bar{y}) - (1.075, \ -1.192)$

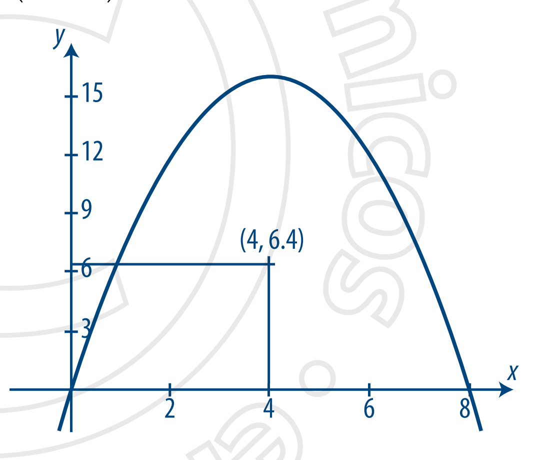
4.13

$(\bar{x}, \bar{y}) - (4.19, \ -1.93)$



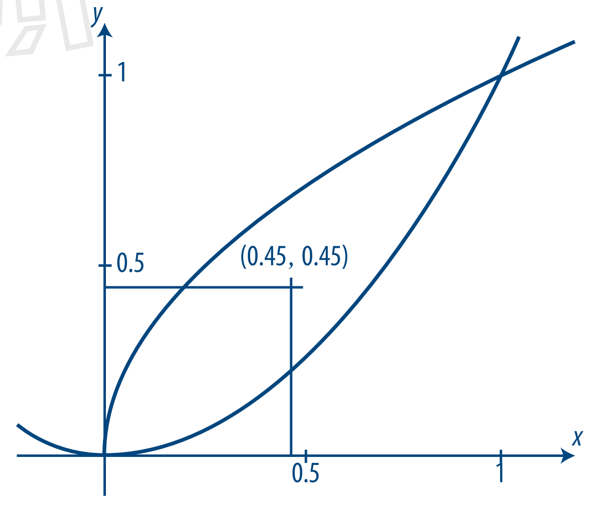
4.14

$(4, \ 6.4)$



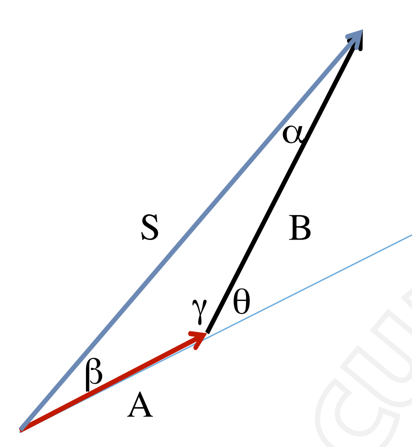
4.15

$(0.45, \ 0.45)$



Ley de los cosenos

$$S = \left|\vec{S}\right| = \left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$



Ley de los senos

$$\frac{S}{\text{sen}\theta} = \frac{A}{\text{sen}\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\beta}$$

Suma analítica de vectores

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{S} = \vec{u} + \vec{v} = \left(u_x + v_x\right)\hat{i} + \left(u_y + v_y\right)\hat{j} + \left(u_z + v_z\right)\hat{k}$$

Resta analítica de vectores

$$\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$$

$$\vec{R} = \vec{v} - \vec{u} = \left(v_x - u_x\right)\hat{i} + \left(v_y - u_y\right)\hat{j} + \left(v_z - u_z\right)\hat{k}$$

Producto de un escalar por un vector

$$q\vec{u} = qu_x\hat{i} + qu_y\hat{j} + qu_z\hat{k}$$

Producto punto

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$



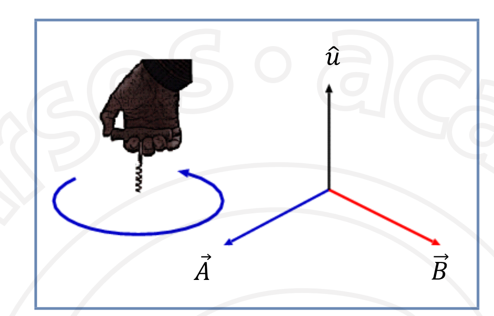
Ángulo entre vectores

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}\right)$$

Producto vectorial

$$\vec{A}\times\vec{B} = AB\ \text{sen}\,\theta\hat{u}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\hat{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$



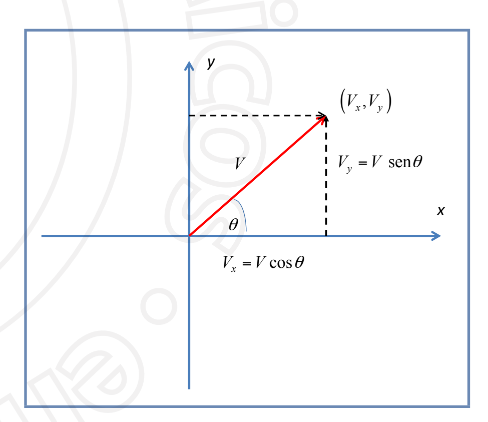
Coordenadas cartesianas → Coordenadas polares

$$\vec{V} = \left(V_x, V_y\right)$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

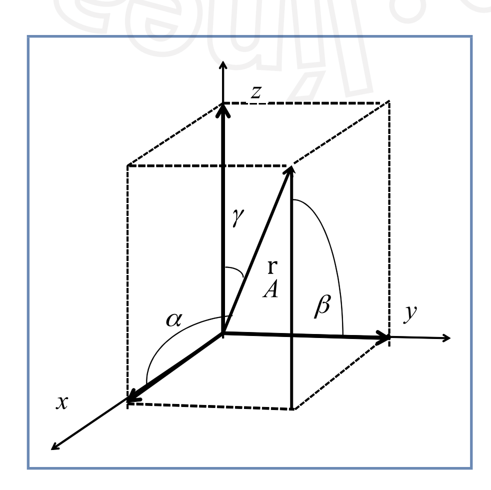
$$V_x = V\cos\theta$$
$$V_y = V\ \text{sen}\ \theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_x}\right)$$



En $\mathbb{R}^3$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$



Cosenos directores

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A} \Rightarrow A_z = A\cos\gamma$$

Ecuación vectorial de la recta

P es un punto de la recta r, el vector $\overrightarrow{Px}$ tiene la misma dirección que el vector de dirección $\vec{v}$,

$$\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{Ox} - \overrightarrow{OP} = k\vec{v}$$

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + k(u_x,u_y,u_z) = (x_0 + ku_x, y_0 + ku_y, z_0 + ku_z)$$

Ecuaciones paramétricas de la recta en $\mathbb{R}^3$

$$x = x_0 + ku_x$$
$$y = y_0 + ku_y$$
$$z = z_0 + ku_z$$

Ecuaciones continuas de la recta en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{x - x_0}{u_x} = \frac{y - y_0}{u_y} = \frac{z - z_0}{u_z}$$

Forma punto pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación continua de la recta

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Ángulo entre dos rectas

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de dirección de las rectas, entonces el ángulo entre las rectas está dado por:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{uv}\right)$$

Rectas paralelas pendientes iguales

Rectas perpendiculares $m_{r_1} = \frac{-1}{m_{r_2}}$

Rectas secantes se intersectan en un punto y pendientes diferentes

Rectas paralelas no se cortan en ningún punto y sus pendientes son iguales

Rectas coincidentes, pendientes iguales y todos sus puntos son comunes

Distancia entre dos rectas

$$d(r_1, r_2) = d(P, r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ecuación vectorial del plano $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0$

$$\overrightarrow{PX} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda_1 (u_x, u_y, u_z) + \lambda_2 (v_x, v_y, v_z)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 (u_x, u_y, u_z) + \lambda_2 (v_x, v_y, v_z)$$

Ecuaciones paramétricas del plano

$$x = x_0 + \lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x$$
$$y = y_0 + \lambda_1 u_y + \lambda_2 v_y$$
$$z = z_0 + \lambda_1 u_z + \lambda_2 v_z$$

Ecuación general o implícita del plano

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_0 & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_0 & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Derivada de una función vectorial

$$\frac{d\vec{R}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{R}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{R}(t+\Delta t)-\vec{R}(t)}{\Delta t}$$

El vector tangente unitaria $\hat{T}$, a la curva, es:

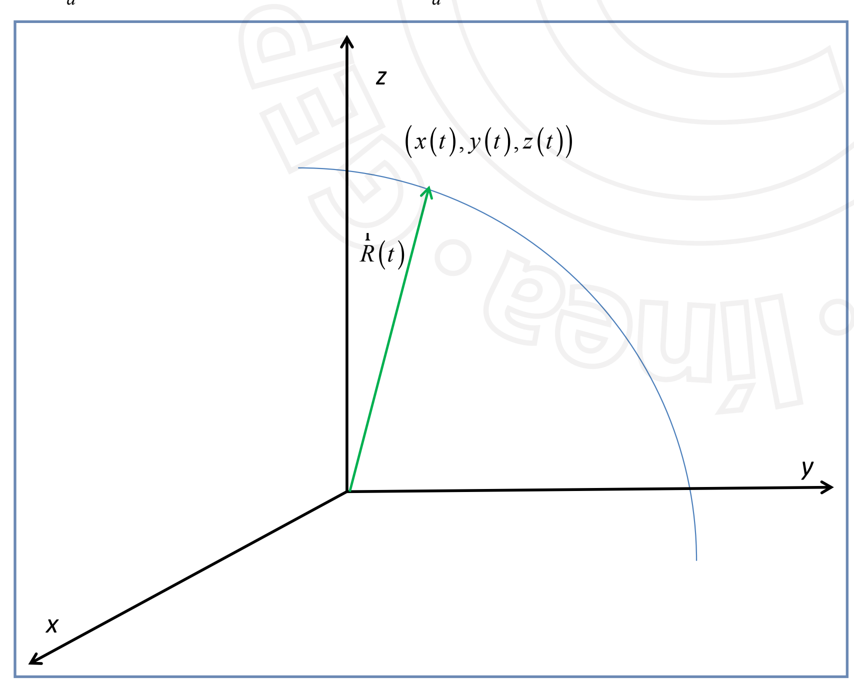
$$\hat{T}=\frac{\frac{d\vec{R}(t)}{dt}}{\left|\frac{d\vec{R}(t)}{dt}\right|}$$

La tangente horizontal de la curva es: $\frac{dy}{dt}=0$ con $\frac{dx}{dt}\neq 0$.

La tangente vertical de la curva es: $\frac{dx}{dt}=0$ con $\frac{dy}{dt}\neq 0$

La longitud de arco s , de la curva $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ con $a\leq t\leq b$ es:

$$s=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt=\int_a^b\left|\vec{R}'(t)\right|dt$$



El vector tangente unitario está dado por: $\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left|\vec{r}'(t)\right|}$





El vector normal principal es: $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{r}\,''(t)}{\left|\vec{r}\,''(t)\right|}$

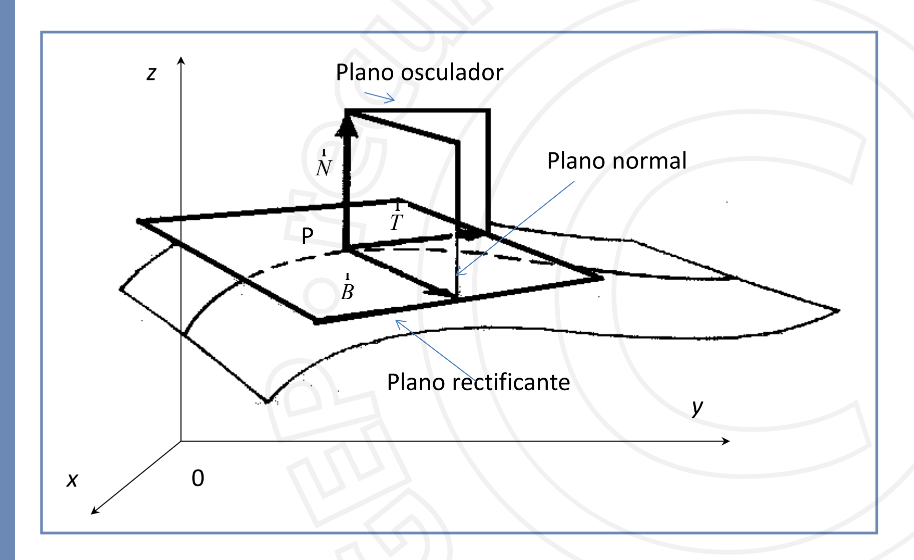
El vector binormal es: $\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$

El radio de curvatura está dado por $\rho=\dfrac{1}{\kappa}$ y $\kappa=\left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right|$

Las fórmulas de Frenet-Serret que relacionan a los vectores $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ y $\vec{B}(s)$ son:

$$\frac{d\vec{T}}{ds}=\kappa\vec{N} \quad ; \quad \frac{d\vec{N}}{ds}=\tau\vec{B}-\kappa\vec{T} \quad ; \quad \frac{d\vec{B}}{ds}=\tau\vec{N}$$

En donde el escalar se llama torsión. El recíproco de la torsión $\sigma=1/\tau$ es el radio de torsión.



Plano normal. Plano que pasa por P y tiene como vector característico a $\vec{T}(s_0)$. Su ecuación será:

$$\left(\vec{R}-\vec{R}_0\right)\cdot\vec{T}(s_0)=0$$

Plano rectificante. Plano que pasa por P y tiene como vector característico a $\vec{N}(s_0)$. Su ecuación será:

$$\left(\vec{R}-\vec{R}_0\right)\cdot\vec{N}(s_0)=0$$

Plano osculador. Plano que pasa por P y tiene como vector característico a $\vec{B}(s_0)$. Su ecuación será:

$$\left(\vec{R}-\vec{R}_0\right)\cdot\vec{B}(s_0)=0$$

Definición límite

El límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(x_0,y_0)$ es el número real L si para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que para todos los puntos (x,y) se cumple que:

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\Rightarrow|f(x,y)-L|<\varepsilon$$

Propiedades de los límites

Si existen los límites $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ y son finitos, entonces se cumple que

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(f(x,y)+g(x,y)\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)+\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(f(x,y)\cdot g(x,y)\right)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left(\lambda f(x,y)\right)=\lambda\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}$

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$ siempre que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\neq 0$

Continuidad

Se dice que una función $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0,y_0) si:

i) f está definida en (x_0,y_0).

ii) el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe.

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

Derivadas parciales

$$f_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x+h,y\right) - f\left(x,y\right)}{h}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x,y+h\right) - f\left(x,y\right)}{h}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Gradiente

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Derivada direccional

$$D_{\hat{u}} f\left(x_0, y_0\right) = \nabla f\left(x_0, y_0\right) \cdot \left(a,b\right) = \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} a + \frac{\partial f\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} b$$

Regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Puntos extremos

La matriz hessiana de *f* en x_0:

$$Hf(x_0)=\begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

Los menores de la matriz hessiana son:

$$\Delta_1 f(x_0)=f_{x_1x_1}(x_0)$$

$$\Delta_2 f(x_0)=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 f(x_0)=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & f_{x_1x_3}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & f_{x_2x_3}(x_0) \\ f_{x_3x_1}(x_0) & f_{x_3x_2}(x_0) & f_{x_3x_3}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n f(x_0)=Hf(x_0)=\begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & f_{x_1x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ f_{x_2x_1}(x_0) & f_{x_2x_2}(x_0) & \cdots & f_{x_2x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & f_{x_nx_2}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{vmatrix}$$

1) Si $\Delta_1 f(x_0)>0$ y $\left|Hf(x_0)\right|>0$, entonces *f* tiene en x_0 un mínimo relativo.

2) Si $\Delta_1 f(x_0)<0$ y $\left|Hf(x_0)\right|>0$, entonces *f* tiene en x_0 un máximo relativo.

3) Si se cumple que $\left|Hf(x_0)\right|<0$, se dice que *f* tiene en x_0 un punto de silla.

4) Si se cumple $\left|Hf(x_0)\right|=0$, no podemos afirmar nada sobre lo que ocurre en x_0, es necesario estudiar el comportamiento de la función en un entorno del punto.

Multiplicadores de Lagrange

Si un campo escalar $f\left(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)$ tiene un extremo relativo cuando está sometido a un conjunto de condiciones $g_1\left(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)=0$, …, $g_m\left(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\right)=0$ siendo $m<n$, existen entonces escalares $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n$ tales que:

$$\nabla f=\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2+\ldots+\lambda_m\nabla g_m$$

Divergencia

Sea $\vec{F}$ una función vectorial de las variables x,y,z . La divergencia de $\vec{F}$ se define como

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

siendo F_x , F_y , F_z las componentes de $\vec{F}$. La divergencia de $\vec{F}$ es una función escalar ya que es un producto punto.

Rotacional

Por otra parte, el rotacional del campo vectorial ***F*** se define como

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_y & F_z\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_z\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ F_x & F_y\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{F}=\hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

El rotacional de $\vec{F}$ es un campo vectorial.

Laplaciano

$$\nabla^2 f=\nabla\cdot\nabla f$$

El operador laplaciano de una función escalar *f* en coordenadas cartesianas es

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

El operador laplaciano de un campo vectorial está dado por:

$$\nabla^2\vec{A}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)=\left(\nabla\cdot\nabla\right)\vec{A}$$



Propiedades

i) $\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$

ii) $\nabla(cf)=c\nabla f$ con c una constante

iii) $\nabla(fg)=g\nabla f+f\nabla g$

iv) $\nabla\cdot(\vec{F}+\vec{G})=\nabla\cdot\vec{F}+\nabla\cdot\vec{G}$

v) $\nabla\times(\vec{F}+\vec{G})=\nabla\times\vec{F}+\nabla\times\vec{G}$

vi) $\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F})-\vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$

vii) $\nabla\cdot(f\vec{F})=f(\nabla\cdot\vec{F})+\vec{F}\cdot(\nabla f)$

viii) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$

ix) $\nabla\times(f\vec{F})=f\nabla\times\vec{F}+\nabla f\times\vec{F}$

x) $\nabla\times(\nabla\times\vec{F})=\nabla(\nabla\cdot\vec{F})-\nabla^2\vec{F}$

xi) $\nabla\times(\nabla f)=0$

xii) $\nabla^2(fg)=f\nabla^2 g+g\nabla^2 f+2\nabla f\cdot\nabla g$

Un campo $\vec{G}=\nabla\times\vec{F}$ que satisface $\nabla\cdot\vec{G}=0$ se llama campo solenoidal

Un campo $\vec{F}=\nabla f$ que satisface $\nabla\times\vec{F}=0$ se llama campo irrotacional

Si $f(x,y)=g(x)h(y) \Rightarrow \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy=\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)$

—

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right) \text{ con } D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b \;\; g_1(x)\le y\le g_2(x)\right\}$$

—

En general

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)\,dxdy=\iint_{D_{uv}} F\big(H(u,v),G(u,v)\big)\,|J|dudv$$

***J* es el Jacobiano**

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial u} & \dfrac{\partial H}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Integral con coordenadas polares

$$\iiint_{D_{xy}} F(x,y)\,dx\,dy=\int_0^r\int_0^{2\pi} G(r,\theta)r\;\;dr\,d\theta$$

Integral con coordenadas esféricas

$$\iiint_{D_{xyz}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^r\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi} G(r,\theta,\phi)r^2\operatorname{sen}\theta\;\;dr\,d\theta\,d\phi$$

Integral con coordenadas cilíndricas

$$\iiint_{D_{xyz}} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_0^z G(r,\theta,z)r\;\;dr\,d\theta\,dz$$

El centro de masa está dado por

$$\left(\bar{x}=\frac{\int x\,dm}{M},\quad \bar{y}=\frac{\int y\,dm}{M},\quad \bar{z}=\frac{\int z\,dm}{M}\right)$$

Momento de inercia

$$I=\int r^2\,dm=\iiint r^2\rho\,dV$$

Teorema de la divergencia

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,dV=\iint_s \vec{A}\cdot\vec{n}\,ds=\oiint_s \vec{A}\cdot d\vec{s}$$

Teorema de Stokes

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

Teorema de Green

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_C P\,dx+Q\,dy$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
$(-1,\ 1,\ -3),\ (-3,\ -7,\ 1),\ -12,\ 10\hat{i}-5\hat{j}-5\hat{k}$

1.2
$\sqrt{29};\ \cos\alpha=0.55;\ \cos\beta=0.74;\ \cos\gamma=-0.37$

1.3
$(8,\ -1,\ 5);\ (-2,\ -1,\ -9);\ (3,\ 5,\ -4)$

1.4
$\vec{u}=\left(\frac{6}{\sqrt{149}},\frac{8}{\sqrt{149}},\frac{7}{\sqrt{147}}\right)\quad \cos\beta=0.665;\beta=49^{\circ}$

1.5
$\vec{S}=(3,\ 4,\ -1);\quad \theta=25.9^{\circ}$

1.6
$\vec{u}=\left(\frac{-7}{\sqrt{94}},\frac{6}{\sqrt{94}},\frac{3}{\sqrt{94}}\right)$

1.7
1

1.9
$(1,\ \sqrt{3})$

1.10
$(-1,\ 1,\ -3),$

1.11
$\sqrt{21}$

1.12
0

1.3
$\frac{\sqrt{73}}{4}$

1.14
a) $\alpha=110.56^{\circ}$
b) $\beta=20.55^{\circ}$

1.15
a) $k=3$
b) $k=-\frac{4}{3}$
c) $k=0.9888$

1.16
$5x-6y-19=0$

1.17
a) $3x+4y-11=0$
b) $4x-3y+2=0$

1.18
$12x-5y-144=0$

1.19
$(12,\ 0)$

1.20
Paralelas

1.21
Coincidentes

1.22
Paralelas

1.23
Si, $P=(0,\ 2)$

1.24
$x = 8,\ \ y = 2 + k,\ \ z = 3$

1.25
$10x - 13y + 2z - 10 = 0$

1.26
$6x - 14y + 11z - 1 = 0$

1.27
$x - y - 2z - 9 = 0$

1.28
Secantes

1.29
Paralelos

1.30
Coincidentes

1.31
$x + 2y + z - 8 = 0$

1.32
$-x - 2y + 4 = 0,\ \ -3y + z + 2 = 0$

1.33
La recta y el plano no son paralelos.

1.34
$x + 5y - 7z + 30 = 0$

1.35
Se obtiene un plano paralelo al anterior.

1.36
$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+2}{9}$$

1.37
$5x - 13y - 7z + 32 = 0$

1.38
$2x + 2y + z - 5 = 0$

1.39
$k = 4$

1.40
$(-1,\ -4,\ -7)$

1.41
Las rectas son paralelas.

1.42
Elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

1.43
$x = 4\cos t$ y $y = 3\operatorname{sen} t$

1.44
$x = 2 + 2\sec t$ y $y = 3 + 3\tan t$

1.48
$$y = \frac{1}{x}$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$(2,\infty)$

2.2
Circunferencia de radio a.

2.3
Hélice circular de radio 2, con paso = 2π y eje paralelo al eje z.

2.4
Recta, punto de intersección $(-1,3,0)$

2.5
Parábola, punto de intersección $(0,2,4)$

2.6
Hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

2.7
$z = 3\operatorname{sen} x$ montada sobre la línea recta $y = x$, $0 \le x \le 2\pi$

2.8
Curva de Agnesi-Fermat $y = \dfrac{27}{x^2 + 9}$

2.9
Parábola $y^2 = z + 1$ contenida en el plano $x = -3$

2.11
$\vec{R}(t) = 3t\hat{\imath} + (1 + 3t)\hat{\jmath} + (2 + 3t)\,\hat{k}$ con $0 \le t \le 1$

2.12
Hélice elíptica

2.13
Hélice cónica

2.14
$2t + 4t^3$ y $(5t^4 - 1)\hat{\imath} - 6t^2\hat{\jmath}$, respectivamente

2.15
$x = -2t$, $y = t - 1$, $z = 1 + t$

2.16
a) $2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$

b) $-2\hat{\imath} + (1 - \cos 1)\,\hat{\jmath} + \ln 2\hat{k}$

2.17
b) $2m(\hat{\imath} + 3\hat{k})$

c) $\vec{R}'(t) = 6\operatorname{sen}4t\left(-\cos(2t)\hat{\imath} + \operatorname{sen}(2t)\hat{\jmath}\right)$,

$|\vec{R}'(t)| = |6\operatorname{sen}4t|$

2.18
$\dfrac{2}{3}\left[\left(2\sqrt{2} - 1\right)\hat{\imath} - \hat{k}\right]$

2.19
$\dfrac{1}{2}\ln 2\hat{\imath} + \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)\hat{\jmath} + \dfrac{\pi}{4}\hat{k}$

2.20
$\dfrac{1}{3}\hat{\imath}$

2.21
$r(t) = \left(\dfrac{1}{4}t^4 + 1\right)\hat{\imath} + \left(t^3 - 1\right)\hat{\imath}$

2.22
$6 + \hat{\imath} + \dfrac{16}{3}\hat{\jmath}$



2.23
$(e-1)\hat{i}+\left(1-e^{-1}\right)\hat{j}+\hat{k}$

2.24
$\vec{R}(t)=\left(e^{t}-t\right)\hat{i}-\text{sen}t\,\hat{j}+\frac{1}{6}t^{3}\,\hat{j}$

2.25
$e^{t}\ \hat{i}$

2.28
π

2.29
$e-e^{-1}=2\text{senh}\ 1$

2.30
10.63

2.31
8

2.33
16

2.34
8

2.35
4.816

2.37
$\left(0,\frac{5}{2}\right)$

2.38
$\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right),\ \vec{N}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{j}+\hat{k}\right),$

$\vec{B}(0)=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right)$

2.39
$\vec{T}(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{i}+\hat{j}\right),\ \vec{N}1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\hat{i}+\hat{j}\right),\ \vec{B}(1)=\hat{k}$

2.40
$\frac{1}{2}$

2.43
1

2.44
$\vec{a}=\vec{R}''(t)=\frac{dv}{dt}\vec{T}+\kappa v^{2}\vec{N}$

2.45
$\frac{1}{10}$

2.46
$\frac{1}{(45)^{\frac{1}{4}}}$

2.48
$\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-2}$

2.49
$\kappa=\frac{1}{4a}$

2.50
Plano $x\,z$, $\kappa=\frac{1}{\sqrt{2}}$

2.52
$\frac{e^{t}}{\left(1+e^{2t}\right)^{3/2}}$

GRUPO EDITORIAL PATRIA

2.53

$$\frac{4}{27}$$

2.54

$$\frac{1}{4}$$

2.55

$\hat{i}+4\hat{k}$ y $4\hat{k}$, respectivamente

2.56

$4\sqrt{6}$

2.57

$\vec{R}(2)=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$

2.58

-7.7



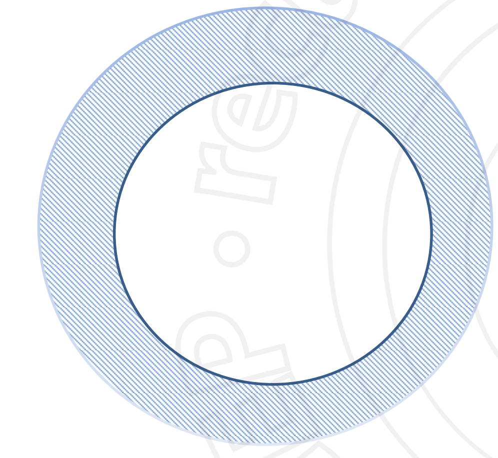
A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
1, 0

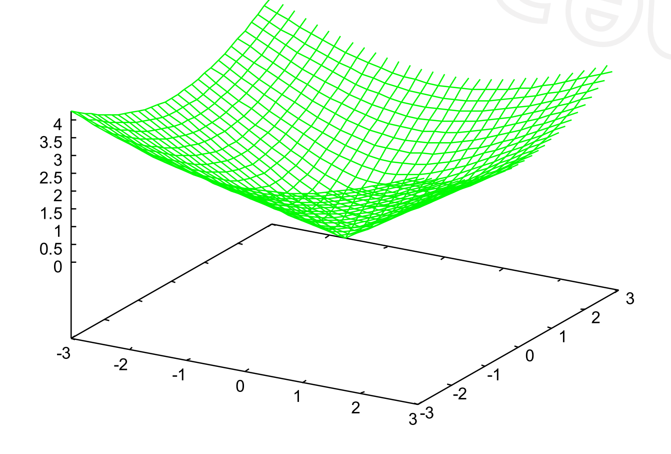
3.2
$0,\ -4,\ a^3$

3.3
Vectorial

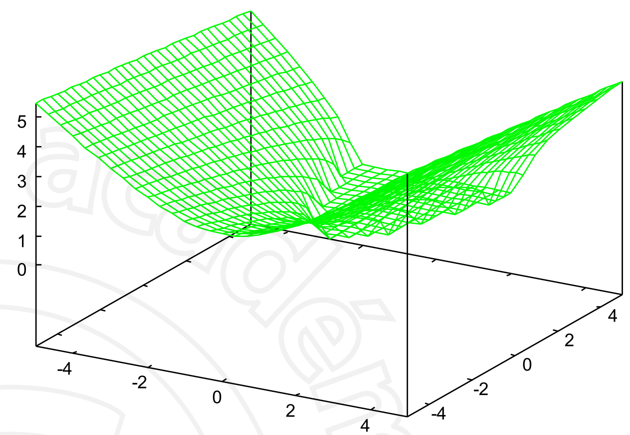
3.4
$x^2+y^2 \geq 4$ y $x^2+y^2 \leq 9$



3.6
Cono circular con vértice en $(0,0,0)$, eje z como eje de simetría, y extendiéndose en la región $z \geq 0$.



3.7
Superficie abierta tal que para z = constante, son parábolas con ejes paralelos al eje y.



3.9
Elipses concéntricas cuyos ejes son los ejes coordenados x e y.

3.10
Curvas cosenoidales $y = c\cos x$; para $c=0$ resulta un segmento rectilíneo sobre el eje x.

3.11
Plano pasando por los puntos $(0,0,1)$, $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $(0,-1,0)$

3.12
Paraboloide circular con vértice en $(0,0,3)$, el eje z como eje de simetría y abriéndose en la dirección z positiva.

3.13
Cilindro elíptico

3.14
Elipsoides

3.15
5

3.16
3

3.17
i) $f_x = 2$, $f_y = -3$
ii) $f_x = 2$, $f_y = -6y$
iii) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$
iv) $f_x = \dfrac{2y}{y^2-x^2}$, $f_y = -\dfrac{2x}{y^2-x^2}$
v) $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

3.18
i) $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$
ii) 1, 1
iii) $-\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}$
iv) 0, 4

3.20
i) 2, 6, −2, −2
ii) $2x^2-6y^2$, , $12y^2-6x^2$, $-12xy$, $-12xy$

3.26
$-1/\sqrt{2}$

3.27
a) $z = 4x$
b) $z = -6y + 18$

3.28
-4

3.29
$x = -1$, $y = 4+t$, $z = -12+t$

3.30
a) $-y\cos(x^2y^2)$ y $\cos(y^2) - x\cos(x^2y^2)$,
respectivamente
b) $-\exp(-x^3)$ y $2y\exp(-y^6)$, respectivamente.

3.31
a) 1
b) Ambas derivadas parciales valen 1

3.34
$48y^3z^5$

3.36
$-6yz^2(x+y^2-z^4)(x^2+y^2+z^4)^{-5/2}$

3.37
$2\sqrt{2}$

3.38
$1/\sqrt{3}$

3.39
−4

3.40
$x = -1$, $y = 4+t$, $z = -12+t$

3.43
$\dfrac{2(u+1)}{(u^2+v^2+2u+v)}$ y $\dfrac{(1+2v)}{(u^2+v^2+2u+v)}$,
respectivamente.

3.44
$2r\text{sen}^2\theta\cos(2\varphi)+\cos\theta$,
$r^2\text{sen}(2\theta)\cos(2\varphi) - r\text{sen}\theta$, $-2r^2\text{sen}^2\theta\text{sen}(2\varphi)$,
respectivamente.





3.49

a) $(0,0)$ es punto silla,

b) $(0,0)$ es punto silla, g tiene un máximo relativo en $(1,1)$

c) $(0,n\pi)$ son puntos silla para $n=0$, ± 1, ± 2, …

3.50

a) $(0,\pm 2,0)$

b) $x=y=z=1/3$





A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1
2

4.2
6

4.3
$\frac{4}{3}$

4.4
$\frac{11}{8}$

4.5
$e^2 - e + \frac{3}{2} - 4\ln 2$

4.6
1

4.7
7

4.8
1

4.9
$2(\cosh 1 - 1)$

4.10
$\pi/\sqrt{3} - 1$

4.11
$2\pi + \pi^3/3$

4.12
$\frac{64}{3}$

4.13
$\cosh 3 - 1$

4.14
$\frac{64}{3}$

4.15
e

4.16
$\frac{32}{15}$

4.17
$(-1,\ 0,\ e)$

4.18
$(1,\ \sqrt{3},\ 5)$

4.19
$(0,\ -3,\ 2)$

4.20
$(\sqrt{2},\ \pi/4,\ 3)$

4.21
$(\sqrt{8},\ \pi/4,\ 2)$

4.22
$(5,\ -38.86°,\ 5)$

4.23
37.16

4.24
$4\pi \ln 2$



4.25
$18\pi \ln 2$

4.26
$\sqrt{\pi}/2$

4.27
πab

4.28
$\dfrac{3\pi}{8}$

4.29
a) $\left(\sqrt{2},\ \pi/4,\ 1\right)$

b) $\left(\sqrt{3},\ 0.95,\ \pi/4\right)$

4.30
a) $\left(\sqrt{3},\ \pi/4,\ 1\right)$

b) $\left(1,\ \pi/6,\ 0\right)$

4.31
a) $z = 2$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

4.32
$128/3$

4.33
$256/5$

4.34
$14/3$

4.35
$8\pi/3$

4.36
$\left[8\pi\left(2-\sqrt{3}\right)\right]/3$

4.37
$(0.82726,\ 0.6100)$

4.38
$(8/5,\ 8/15)$

4.39
$(0,\ 0,\ 16/15)$

4.40
$(4/3,\ 0,\ 0)$

4.41
$\left(\dfrac{45}{14}\pi,\ \dfrac{45}{14}\pi\right)$

4.42
$(0,\ 0,\ 4/3)$

4.43
$(0,\ 0,\ 16/15)$

4.44
$5k$

4.45
$8\pi k/21$

4.46
$2m/9$

4.47
$4m/5$

4.48
$5m/4$

4.49
$2m/9$



4.50
8

4.51
5

4.52
$2mR^2/5$

4.53
$336k/5 = 28m/9$

4.56
-4π

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1

a) Si es una ED, es una igualdad y contiene una derivada.
b) Si es una ED, es una igualdad y tiene una derivada.
c) Si es una ED, es una igualdad y tiene una derivada.
d) Si es una ED, es una igualdad y tiene una derivada.
e) No es una ED, es una igualdad; sin embargo no tiene derivadas ni diferenciales. Sólo es una ecuación.
f) Si es una ED, es una igualdad y tiene las diferenciales *dx* y *dy*.
g) No es una ED ya que no es una igualdad, aunque tiene las diferenciales; es un diferencial pero no una ecuación.
h) Es una ED, es una igualdad y derivadas parciales.
i) Es una ED y es igualdad, ya que tiene diferenciales.
j) Es una ED ya que es una igualdad, y una derivada.

1.2

a) La variable dependiente $\boldsymbol{\theta}$ y la variable independiente t.
b) La variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y la variable independiente x.
c) La variable dependiente $\boldsymbol{T}$ y la variable independiente t.
d) La variable dependiente $\boldsymbol{p}$ y la variable independiente t.
e) La variable dependiente $\boldsymbol{N}$ y las variables independientes r y t.
f) La variable dependiente $\boldsymbol{u}$ y las variables independientes x y t.
g) La variable dependiente $\boldsymbol{u}$ y las variables independientes x y y.
h) La variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y la variable independiente x.
i) La variable dependiente $\boldsymbol{u}$ y las variables independientes x y y.
j) La variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y la variable independiente x.

1.3

a) No lineal, segundo orden.
b) No lineal, segundo orden.
c) Lineal, primer orden.
d) No lineal, segundo orden.
e) Lineal, cuarto orden.
f) Tercer orden, no lineal
g) Segundo orden no lineal
h) Lineal primer orden
i) No lineal primer orden
j) No lineal primer orden
k) No lineal segundo orden

1.4

a) Sí
b) Sí
c) No
d) Sí
e) Sí

1.5

a) Sí,
b) Sí,
c) No,
d) Sí,
e) No,
f) Sí

1.6

a) $c = \frac{1}{2}$
b) No existe la solución
c) $c = \frac{3}{2}$

1.7

$$y = a \ln\left(\frac{x_0(x-a)}{x(x_0-a)}\right) \text{con } x_0 \neq a$$

1.8

$a = 5$

1.9

$a = 2, a = 1$

1.10

$a = 3.4142, a = 0.58579$

1.11

$y'+2y=0$	$y'+2y=0$
Sea $y = e^{-2x} \Rightarrow y' = -2e^{-2x}$	Sea $y = ce^{-2x} \Rightarrow y' = -2ce^{-2x}$
sustituyendo	sustituyendo
$-2e^{-2x} + 2e^{-2x} = 0$	$-2ce^{-2x} + 2ce^{-2x} = 0$

1.12

$y'+y^2=0$	$y'+y^2=0$
Sea $y=\frac{1}{x}\Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}$	Sea $y=\frac{c}{x}\Rightarrow y'=-\frac{c}{x^2}$
sustituyendo	sustituyendo
$-\frac{1}{x^2}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=0$	$-\frac{c}{x^2}+\left(\frac{c}{x}\right)^2\neq 0$ a menos que $c = 0$ o $c = 1$.

1.13

$y'+p(x)y=0$ Puesto que $g(x)$ es solución de la ecuación diferencial $g'+pg=0$	Ahora $cg'(x)+p(x)cg(x)=0$ $c\left[g'(x)+p(x)g(x)\right]=0\Rightarrow g'(x)+p(x)g(x)=0$

1.14

$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$ $y'=-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}$ $y''=4c_1e^{-2x}+9c_2e^{-3x}$	Sustituyendo en la ecuación $y''+5y'+6y=0$
	$4c_1e^{-2x}+9c_2e^{-3x}+5\left(-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}\right)+6\left(c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}\right)=$ $4c_1e^{-2x}-10c_1e^{-2x}+6c_1e^{-2x}+9c_2e^{-3x}-15c_2e^{-3x}+6c_2e^{-3x}=0$

1.15

Del problema anterior sabemos que la solución de la ecuación diferencial $y''+5y'+6y=0$ es

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$$

Ahora la evaluamos en $y(0)=2$

$$y(0)=c_1e^{-2(0)}+c_2e^{-3(0)}=c_1+c_2=2$$

Derivando la solución

$$y'=-2c_1e^{-2x}-3c_2e^{-3x}$$

Ahora la evaluamos en $y'(0)=3$

$$y'(0)=-2c_1e^{-2(0)}-3c_2e^{-3(0)}=-2c_1-3c_2=3$$

Ahora resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} c_1+c_2=2 \\ -2c_1-3c_2=3 \end{array}\right\}\Delta=-1\Rightarrow \begin{array}{l} c_1=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{-6-3}{-1}=9 \\ c_2=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{3+4}{-1}=-7 \end{array}$$

Entonces la solución particular es:

$$y=9e^{-2x}-7e^{-3x}$$

1.16

a) La solución particular es:

$$y=-6.667e^{2x}+0.416e^{-x}+0.25e^{-3x}$$

b) La solución particular es:

$$y=-0.66667c_1e^{\frac{x}{2}}+0.66667e^{-x}$$

c) La solución particular es:

$$y=6x^2-11$$

d) La solución particular es:

$$y=\frac{x}{2}\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}x+4$$

e) La solución particular es:

$$y=e^x-0.30685-2x$$

1.17

La solución particular es:

$$y=2e^{-2x}+e^{-x}$$

1.18

La solución particular es:

$$y=-0.3333e^x+2.3333e^{2x}$$

1.19

La solución particular es:

$$y=-\frac{x^2}{2}+1.9375-2.75x+0.062e^{-4x}$$

1.20

La solución particular es

$$z=e^{2x}-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x-2\sqrt{2}\ \operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

1.21

La solución particular es:

$$y=\frac{4}{3}x^3$$

1.22

m= 0.61803, 1.618

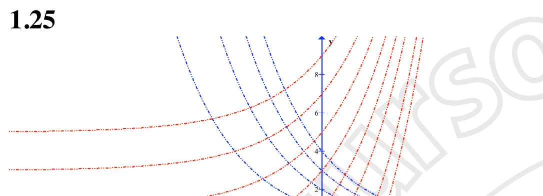
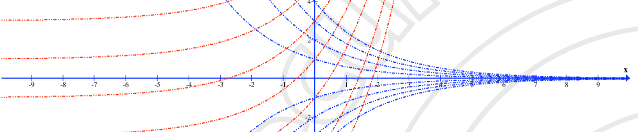
1.23

$$m = \frac{1}{4}$$

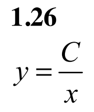
1.24

$$y = C + 4e^{x/2}$$

1.25

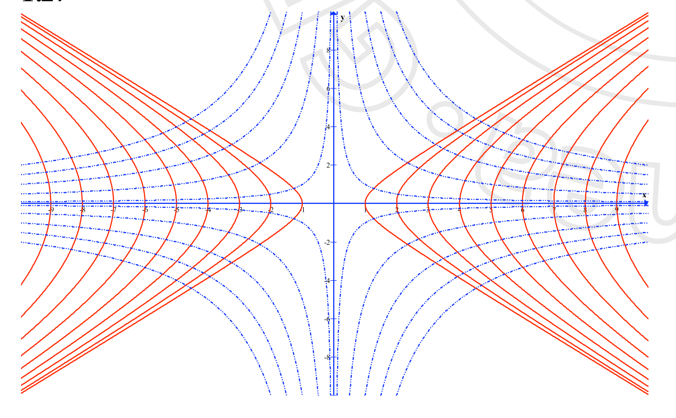



1.26



$$y = \frac{C}{x}$$

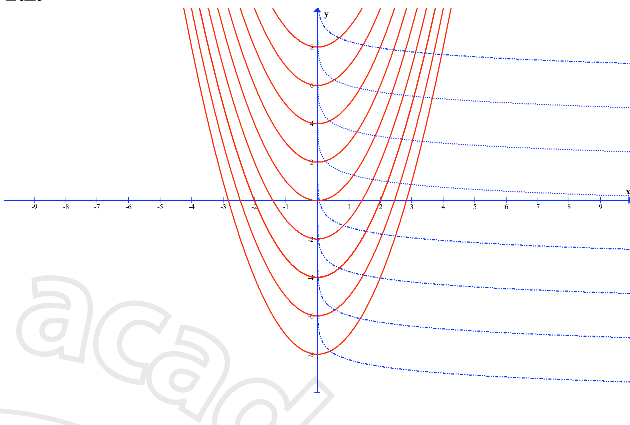
1.27



1.28

$$y = \ln \frac{C}{\sqrt{x}}$$

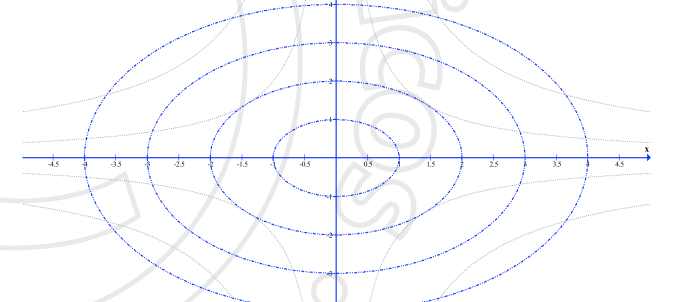
1.29



1.30

$$y = \frac{C}{x}$$

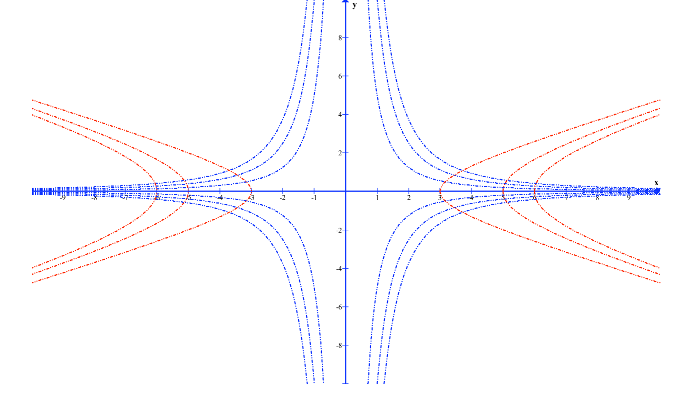
1.31



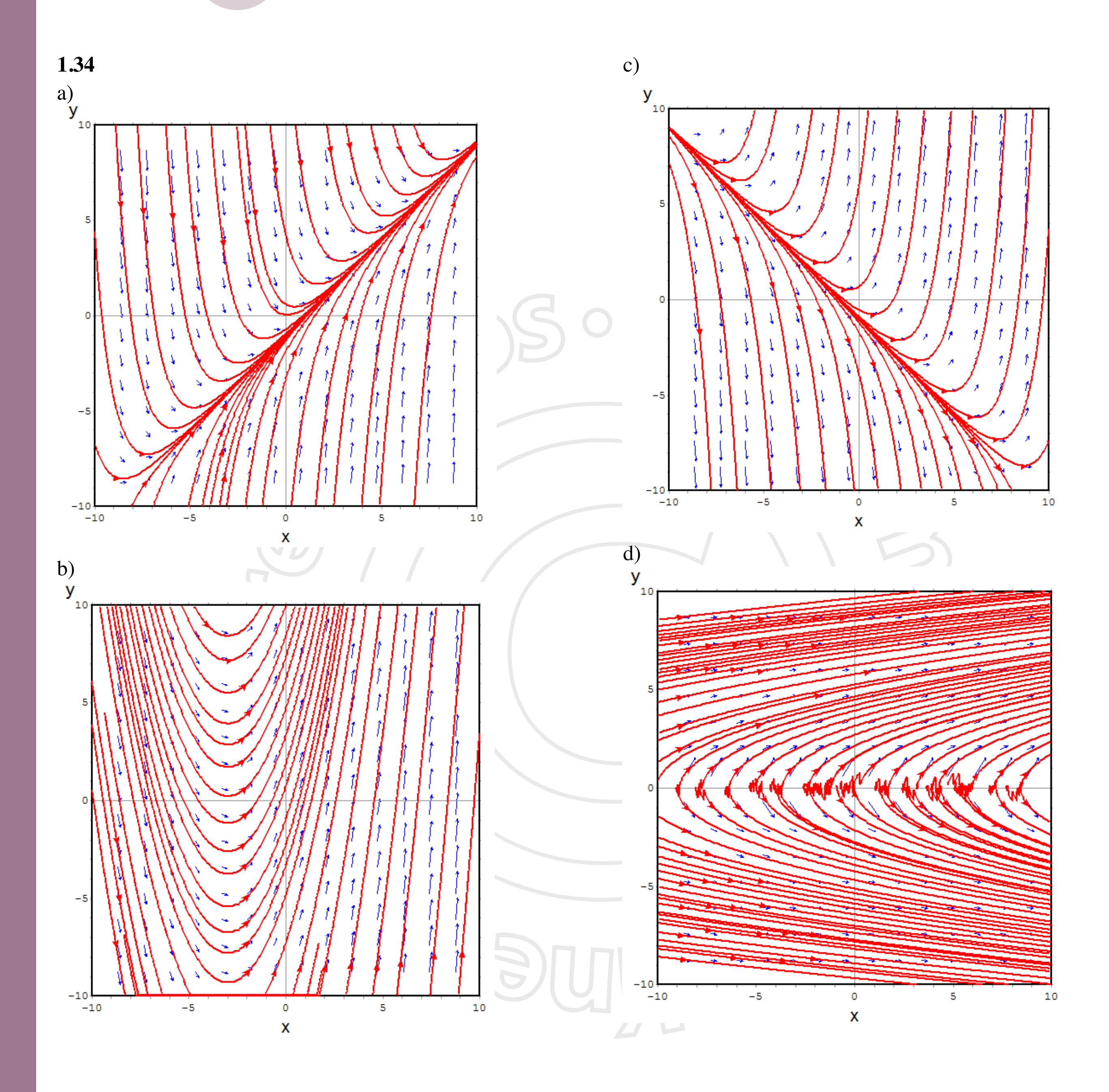
1.32

$$y = \frac{C}{x^2}$$

1.33



1.34





e)

f)

g)

h)

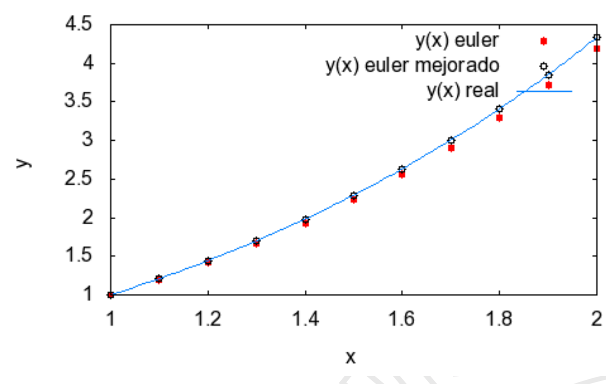
i)

1.35

Respuesta 2.23, error 2.69%

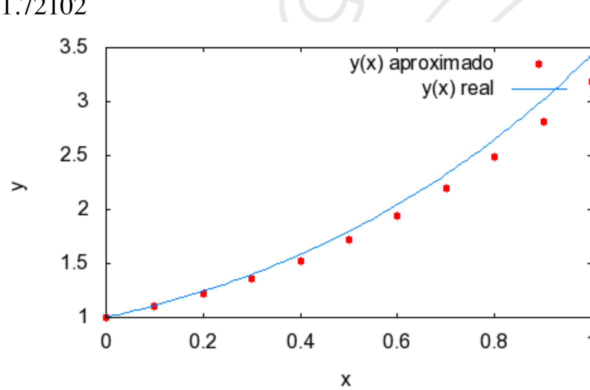
1.36

Respuesta 2.2925, error -0.035%.

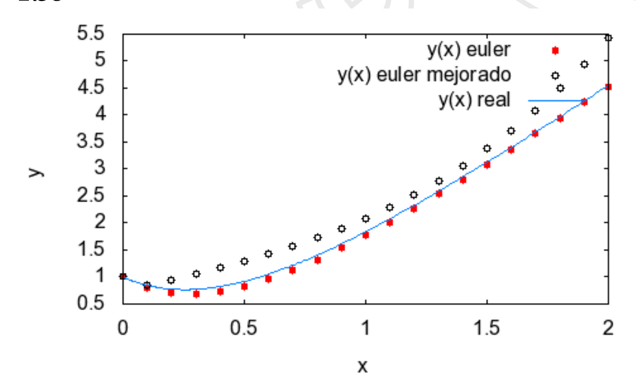


1.37

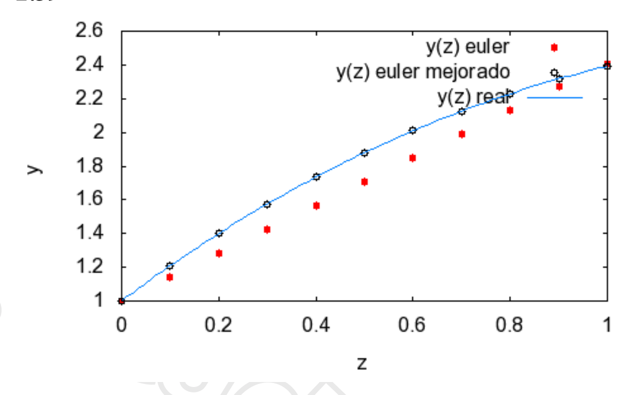
1.72102



1.38

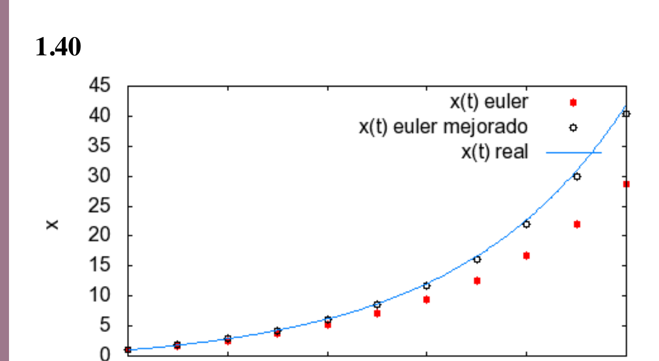


1.39



	Euler	Euler mejorado
0.0	1.0	1.0
0.1	1.141666666666667	1.208055555555556
0.2	1.283194444444445	1.399458179012346
0.3	1.424581018518519	1.574753716478052
0.4	1.565824035493827	1.734470122437938
0.5	1.706921102752058	1.879118046202473
0.6	1.847869787797925	2.009191399132503
0.7	1.988667617594557	2.125167903272049
0.8	2.1293120778878	2.227509621998131
0.9	2.269800612519263	2.316663473277081
1.0	2.410130622727917	2.393061726097443

1.40



	Euler	Euler mejorado	$x(t)=\frac{19}{9}e^{3t}+\frac{2}{3}t-\frac{10}{9}$
0.0	1.0	1.0	1.0
0.1	1.7	1.795	1.8053
0.2	2.59	2.841275	2.8689
0.3	3.727	4.225514875	4.2814
0.4	5.1851	6.064317506875	6.1647
0.5	7.06063	8.514507046746875	8.6836
0.6	9.478819	11.78701197787455	12.06
0.7	12.6024647	16.16553111024127	16.595
0.8	16.64320411	22.0316393432745	22.693
0.9	21.876165343	29.89855491670421	30.902
1.0	28.6590149459	40.45655636296716	41.958

1.41

$dA/dt = -(m - A)$

1.42

$dM/dt = -cM$

1.43

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{c}{m}v$$

1.44

a)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow (20\text{kg})\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{\text{N}}{\text{m}}x = 0$$

b)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow (20\text{kg})\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{\text{N}}{\text{m}}x + 8\frac{\text{kg}}{\text{s}}v = 0$$

1.45

$$\frac{dS}{dt} = (0.05)S$$

1.46

$\frac{dP}{dt} = CP$, C es positiva porque es crecimiento.

1.47

$\frac{dQ}{dt} = -CQ$, es -C porque es decrecimiento.

1.48

$dA/dt = (100 - 0,17)A$

1.49

$$\frac{dA(t)}{dt} = (1 - A)$$

1.50

$$\frac{dS}{dt} = 250000 + (0,1)S - 20000$$

$$\frac{dS}{dt} = 250000 + (0.1)S - 20000$$

1.51

$$\frac{dM}{dt} = 2.5 - 0.347M$$

1.52

$$\frac{dA}{dt} = 10 - 0.3A$$

1.53

$$\frac{dS}{dt} + \frac{3}{25\,\text{min}}S = 0$$

1.54

$$\frac{dB}{dt} = -\alpha A + \beta B; \quad A(0) = 10 \text{ kg},\ B(1) = 5 \text{ kg},\ A + B = 10 \text{ kg}$$

1.55

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20°C), \quad T(0) = 35°C, T(2) = 33°C$$

1.56

$$\frac{dy}{dt}-50\frac{\text{m}}{\text{s}}=-9.8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t$$

1.57

Sea N(t) cantidad de radio al tiempo t, $N(0) = N_0$, N(1600) $= N_0/2$, $\frac{dN}{dt}=KN$

1.58

Sea P(t) el número de bacterias al tiempo t, $P_0 = P(0)$, P(6) $= 2P_0$, $\frac{dP}{dt}=KP$

1.59

v(0) = 15 m/s, v(5) = 8 m/s, $\frac{dv}{dt}=-kv$

1.60

$$\frac{dv}{dt}=-g$$

1.61

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\Rightarrow v\frac{dv}{dx}=-\frac{25}{x^2},v(10)=5$$

1.62

$$\frac{dP}{dt}=0.15P-90$$

1.63

-2.7726×10^{-2}, 39.623 años

1.64

$$2\frac{di}{dt}+10i=150 \text{ con } i(0)=0$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$y' = 8 + 2 - 3x^2$

2.2
$y = \frac{81}{5}x^5 + 108x^4 + 288x^3 + 384^2 + 256x + C_4$

2.3
$y = C + \frac{1}{3}e^{3x} + x^2$

2.4
$e^y = e^x - C$

2.5
$y^2 = x + \frac{1}{2}\text{sen } 2x + C$

2.6
$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{3}\left(x^3 - 1\right)^{\frac{2}{3}} + C$

2.7
$y = C - x + x\ln x - 3x^3$

2.8
$-\cos y + e^{-x} = C$

2.9
$\frac{1}{y} = -\arctan x + C$

2.10
$\frac{1}{2}e^{-2y} + \frac{1}{3}e^{3x} = C$

2.11
6.9315×10^{-4}s, 1000 s.

2.12
60 s

2.13
4 veces la población inicial

2.14
46.02 días

2.15
10s

2.16
0.036 g/cm^3, 0.073 g/cm^3.

2.17
$y = Ce^{3x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

2.18
$y = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

2.19
$xe^{-y} + 5ye^{-y} + 5e^{-y} = C_1$

2.20
$y = \tan(x - C) - x$

2.21
$y = 2\arctan(x - C) - x$

2.22
$y^2 = 2x^2\ln(cx)$

2.23
$\left(x^3 + y^3\right)^2 = cx^9$

2.24
$\frac{y}{x} - \arctan\frac{y}{x} = \ln cx$

2.25

$$\left(\frac{y}{x}-1\right)e^{\frac{y}{x}}-\ln x=C$$

2.26

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)=C$$

2.27

$$3xy-2x^2-y^2=C_1$$

2.28

$$x^2y^2+x^3y=C_1$$

2.29

$$y^2=\frac{1}{2x^2}\left(x^4+2C\right)$$

2.30

$$y=-x\ln x+C_1x$$

2.31

$$-\frac{x^2}{2}+xy+\frac{y^2}{2}=C_1$$

2.32

$$y=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{-6x^2-24x-6C+1}$$

2.33

$$x\operatorname{sen}y+y\cos x-\frac{y^2}{2}=C$$

2.34

$$x^2y^2-3x+4y=C$$

2.35

$$(-1+\ln x)y+x\ln x=C$$

2.36

$$y^3x+y^2\cos x-\frac{x^2}{2}=C$$

2.37

Factor integrante: $\mu(x)=x^2$, Solución:

$$x\operatorname{sen}xy+x^3y^3=C$$

2.38

Factor integrante: $\mu(xy)=xy$, Solución:

$$x^2y+xy^2=C$$

2.39

Factor integrante: $\mu(xy)=e^{xy}$, Solución:

$$e^{xy}+x+y=C$$

2.40

Factor integrante: $\mu(x)=\frac{1}{x^5}$, Solución:

$$y=x^5\tan x+C_1x^5$$

2.41

Factor integrante: $\mu(x)=x^2$, Solución:

$$3x^2y=e^{3x}+C_1$$

2.42

Factor integrante: $\mu(x)=x$, $3xy=4x^2+3C_1$

2.43

Factor integrante: $\mu(x)=e^{-2x}$, $y=3+C_1e^{2x}$

2.44

Factor integrante: $\mu(x)=e^{-2x}$, $y=-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+C_1e^{2x}$



2.45

Factor integrante: $\mu(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y = e^{\frac{x^2}{2}}\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)$

2.46

Factor integrante: $\mu(x) = e^{-x^2}$, $y = e^{x^2}(\ln x + C_1)$

2.47

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\operatorname{sen} x}$,

$y = e^{-\operatorname{sen} x}(\tan x + C_1)$

2.48

Factor integrante: $\mu(x) = e^{-\sin x}$, $y = -1 + C_1 e^{\tan^{-1} x}$

2.49

Factor integrante: $\mu(x) = e^{x(\ln x - 1)}$, $y = 1 + C_1 x^{-x} e^{x}$

2.50

Factor integrante: $\mu(x) = e^{x + x^3}$, $y = 3 + C_1 e^{-x(1+x^2)}$

2.51

$\mu(x) = \sec x + \tan x$, $y = \cos x\left(\frac{x - \cos x + C_1}{1 + \operatorname{sen} x}\right)$

2.52

$\frac{1}{y} = \frac{1}{x}(\ln x + C)$

2.53

$\frac{1}{y^3} = C(1 + x^2) + 1$

2.54

$\frac{1}{y^3} = -\frac{9}{5x} + \frac{C}{x^6}$

2.55

$y^3 = -3x^2 + Cx^{\frac{3}{2}}$

2.56

$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$

2.57

$y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + C_1 e^{-10x}$

2.58

$y^2 = -x^2 + C_1 x$

2.59

$y^{-1} = -\frac{1}{3}x^4 + C_1 x$

2.60

$y^{-2} = -2xe^{2x} + C_1 e^{2x}$

2.61

$y^2 = \frac{1}{4x^{\frac{2}{3}}}\left(x^{\frac{8}{3}} + 4C_1\right)$

2.62

$y = x + \frac{2x}{-1 + 2Ce^{2x^2}}$

2.63

$y = -e^x + \frac{1}{-1 + Ce^{-x}}$

2.64

$y = \tan x + \frac{1}{-\cos x \ln(\sec x + \tan x) + C\cos x}$

2.65

$$y = -2 + \frac{1}{-1 + Ce^{-x}}$$

2.66

$$y = -3 + \frac{1}{-x + C}$$





Ana Elizabeth García, David Reich



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1

$y = Ae^{2x} + Be^{x/2}$

3.2

$y = Ae^{x/4} + Bxe^{x/4}$

3.3

$y = Ae^{-x}(\cos\sqrt{2x}) + Be^{-x}(\text{sen}\sqrt{2x})$

3.4

$y = Ae^{-x} + Be^{3x}$

3.5

$y = Ae^{-5x} + Bxe^{-5x}$

3.6

$y = Ae^{-x} + Be^{x}$

3.7

$y = Ae^{2x} + Be^{x}$

3.8

$y = Ae^{-2x\sqrt{33}-12} + Be^{2x\sqrt{33}+12}$

3.9

$y = Ae^{x(\sqrt{61}-8)} + Be^{-x(\sqrt{61}+8)}$

3.10

$Ae^{-x(2\sqrt{5}+5)} + Be^{x(2\sqrt{5}-5)}$

3.11

$A = 2$, $\omega = 30\pi$, $P = (1/15)$s, $\nu = 15$Hz

3.12

4.7746×10^{-2}m

3.13

-148.04

3.14

58. 86 N/m, 2. 2293 Hz

3.15

0.3464 m

3.16

$y = \frac{A}{x^3} + Bx^4$

3.17

$y = \frac{A}{\sqrt[3]{x}} + Bx^{\frac{2}{3}}$

3.18

$y = Ax^3 + \frac{B}{x^4}$

3.19

$y = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2}\ln\ x$

3.20

$y = Ax^2\cos(\ln\ x) + Bx^2\text{sen}(\ln\ x)$

3.21

$Ax\cos(\ln\ x) + Bx\text{sen}(\ln\ x)$

3.22

$y = \frac{A}{x} + \frac{B}{x}\ln\ x$

3.23

$y = \frac{A}{x} + Bx$

3.24

$y = \frac{A}{x^2} + Bx$



3.25

$$y=\frac{A}{\sqrt{x}}+B\sqrt{x}$$

3.26

$$y=\frac{2}{3}x\ln^3 x+C_1x\ln x+C_2x$$

3.27

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}-\frac{1}{4}e^{-x}\left(3x^2-2x^2\ln x\right)$$

3.28

$$y=C_1e^{x}+C_2x-\frac{1}{2}e^{-x}(2x-1)$$

3.29

$$y=A\cos 4x+B\operatorname{sen}4x+\frac{1}{64}\cos 4x+\frac{1}{8}x\ \operatorname{sen}4x$$

3.3

$$y=Ae^{2x}+Be^{-4x}+(\ln x)e^{2x}$$

3.31

a) D^5+16D^2

b) D^3-2D^2+5D

c) D^5

d) $D^4-2D^3-D^2+2D+10$

e) $D^6-3D^5+7D^4-13D^3+12D^2-4D$

3.32

a) $y=Ae^{2x}+Bx^{2x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$

b) $y=A(\cos\sqrt{3}x)e^{x}+B(\operatorname{sen}\sqrt{3}x)e^{x}+\frac{1}{12}e^{4x}$

c) $y=A\cos\left(2\sqrt{2}x\right)+B\operatorname{sen}\left(2\sqrt{2}x\right)+\frac{16}{7}\operatorname{sen}x$

d) $y=A\cos x+B\operatorname{sen}x-\frac{1}{4}\cos 3x$

3.33

a) $y=Ae^{x/3}+Bxe^{x/3}+x+6$

b) $y=A\cos\left(\frac{2}{3}x\right)+B\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x\right)+\frac{1}{13}e^{x}$

c) $y=A\cos 2x+B\operatorname{sen}2x-3x\cos 2x+\frac{3}{4}\operatorname{sen}2x$

d) $y=Ae^{-x\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{2}\right)}+Be^{x\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}\right)}+\frac{4}{15}\cos 2x-\frac{2}{15}\operatorname{sen}2x$

e) $y=Ae^{x\left(\sqrt{2}+2\right)}+Be^{-x\left(\sqrt{2}-2\right)}-e^{x}$

f) $y=Ae^{x}+Be^{-7x}-\frac{1}{12}e^{x}$

g) $y=Ae^{x(\sqrt{2}-2)}+Be^{-x(\sqrt{2}+2)}+\frac{21}{2}x-3x^2+\frac{1}{2}x^3-18$

h) $y=A\cos x+B\operatorname{sen}x+e^{-x}(8xe^{x}+1)$

3.34

a) $x=Ae^{3t}+Be^{-t},$
$y=\frac{1}{2}Ae^{3t}-\frac{1}{2}Be^{-t}$

b) $x=Ae^{-t}+\frac{5}{2}Be^{-t}+te^{-t}$
$y=\frac{1}{2}Ae^{-t}+Be^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}$

c) $x=Ae^{t}\cos 2t+Be^{t}\operatorname{sen}2t$
$y=\frac{1}{2}Ae^{t}\operatorname{sen}2t-\frac{1}{2}Be^{t}\cos 2t$

3.35

a) $y=A+B\ln x$

b) $y=A+B(x-1)^2$

c) $y=A-\ln x+x(B+1)-x\ln x$

d) $y=A+B(x-1)^2$

e) $y=A+Bx^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$



3.36

a) $\omega = 2, \delta = 0.927\text{rad}, R = 5$

b) $\omega = 5, \delta = 0.588\text{rad}, R = 3.6$

c) $\omega = 8, \delta = -0.46365\text{rad}, R = 4.47$

d) $\omega = 3, \delta = -\dfrac{\pi}{3}\text{rad}, R = 2$

3.37

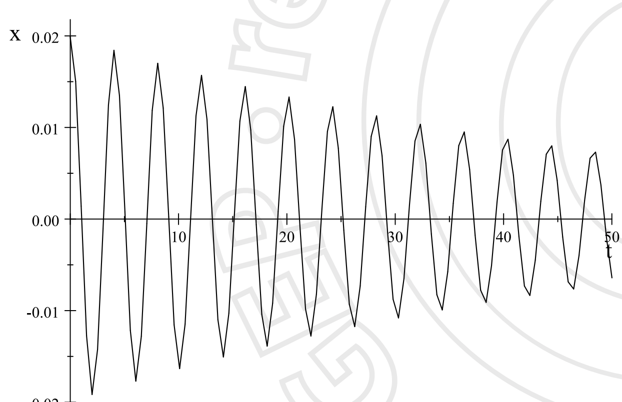
$\omega = 10.46\text{Hz}, P = 0.6\text{s}, R = .03\text{m}$

3.38

$\omega = 18.\ 074\text{Hz}, P = 0.34764\text{s}, R = 0.111\text{m}$

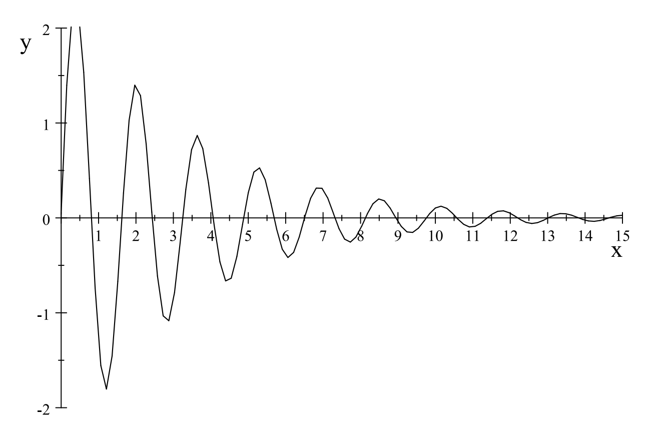
3.39

$x = .02e^{-0.02t}\cos 14t + 2.\ 8571\times 10^{-5}e^{-0.02t}\text{sen}14t$



3.40

$x = .05e^{-\frac{3}{10}t}\cos\dfrac{\sqrt{1491}}{10}t + 2.\ 5937e^{-\frac{3}{10}t}\text{sen}\dfrac{\sqrt{1491}}{10}t$



3.42

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg - k\frac{dy}{dt}, \quad \text{con } y(0) = y_0, y'(0) = 0$$

3.43

$$y = y_0 + \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k}\right), \text{ si}$$

3.44

62.018 m

3.45

$$y = y_0 - \frac{9.8t^2}{2}, \text{ no}$$

3.46

$my'' = -ky' + mg$ con $y'(0) = 4,\ y(0) = 20$

3.47

$$y = y_0 + \frac{mv_0}{k} - \frac{g}{k^2}m^2 - \frac{mv_0}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{gm}{k}t$$

, si

3.48

t= 2. 5406×10^{-2}s, y_{max}=20.022 m

3.49

$y = -4.\ 9t^2 + 4t + 20$, no

3.50

t= 2.4693 s



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\dots$$

$$e^3 = 1+3+\frac{1}{2}(3^2)+\left(\frac{1}{6}\right)(3^3)+\frac{1}{24}(3^4)=\frac{131}{8}$$

4.2.

$$\text{sen } x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9,$$

$$6.9253\times 10^{-3}$$

4.3

$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\dots$, no es buena aproximación

4.4

a)

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{120}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^5+\dots$$

b)

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\dots = 1$$

c)

$$xe^x = x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6+\frac{1}{720}x^7+\dots$$

4.5

$$y=e^{\text{sen } x}=x+x^2+\left(\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{6}\right)x^4+\left(\frac{1}{24}\right)x^5+\left(\frac{1}{120}\right)x^6+\left(\frac{1}{720}\right)x^7+\dots$$

4.6

a)no es 0 es igual a 2
b) si es igual a 0
c) si es igual a cero

4.7

a) diverge
b) converge
c) converge

4.9

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \ \forall x$$

4.10

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

4.12

$$y=C_1e^x = C_1\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{720}x^6+\dots\right)$$

4.13

$$y=C_1e^{-2x} = C_1\left(1-2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\frac{2}{3}x^4+\dots\right)$$

4.14

$$y=C_1\left(1-2x^2-\frac{x^4}{8}+\dots\right)+C_2\left(x+\frac{1}{6}x^3+\dots\right)$$

4.15

$$\rho=2, \ -2<x<2$$

4.17

$$\rho=\frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

4.18

$$\text{sen } 2x = 2x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5-\frac{8}{315}x^7+\dots$$

4.19

$\cot x = \frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5+\dots$, porque hay indeterminaciones en las divisiones

4.20

$$y=2\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\dots\right)+1\left(x+\frac{x^3}{3}+\dots\right)$$



4.20

$$y = -(1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \ldots) + 3(x - \frac{1}{4}x^3 + \ldots)$$

4.22

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

4.23

$$e^{2tx - x^2} = 1 + 2tx + x^2(2t^2 - 1) + x^3\left(\frac{2t}{3}(2t^2 - 3)\right) + x^4\left(\frac{1}{6}(-12t^2 + 4t^4 + 3)\right)$$

$$+ x^5\left(\frac{1}{15}\left(4t^5 - 20t^3 + 15t\right)\right) + x^6\left(\frac{4}{45}t^6 - \frac{2}{3}t^4 + t^2 - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{n!}x^n \Rightarrow \begin{cases} \frac{H_0(t)}{0!}x^0 = 1 \Rightarrow H_0(t) = 1 \\ \frac{H_1(t)}{1!}x^1 = 2tx \Rightarrow H_1(t) = 2t \\ \frac{H_2(t)}{2!}x^2 = x^2(2t^2 - 1) \Rightarrow H_2(t) = 4t^2 - 2 \\ \frac{H_3(t)}{3!}x^3 = x^3\left(\frac{2t}{3}(2t^2 - 3)\right) \Rightarrow H_3(t) = 8t^3 - 12t \\ \frac{H_4(t)}{4!}x^4 = \frac{x^4}{6}(-12t^2 + 4t^4 + 3) \Rightarrow H_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12 \\ \frac{H_5(t)}{5!}x^5 = \frac{x^5}{15}\left(4t^5 - 20t^3 + 15t\right) \Rightarrow H_5(t) = 32t^5 - 160t^3 + 120 \end{cases}$$

4.25

$$y = C_1 - \frac{1}{2}C_1x^2\lambda + C_1x^4\left(\frac{\lambda^2}{24} - \frac{\lambda}{6}\right) + C_2x + C_2x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{\lambda}{6}\right) + \ldots,$$

4.26

$$y = \frac{1}{24}C_1(-12t^2\alpha^2 - 5t^4\alpha^2 - 2t^4\alpha^3 + t^4\alpha^4 + 12t^2\alpha + 6t^4\alpha + 24) - \frac{1}{6}C_2t(t^2\alpha^2 - t^2\alpha - 2t^2 - 6)$$

4.27

$$y = C_1 + \frac{1}{6}x^3C_1 + C_2x + C_2\frac{1}{12}x^4 + \ldots$$



4.28

$$y = C_1 + xC_2 \mp \frac{1}{6}k^2x^3C_1 \mp \frac{1}{12}k^2x^4C_2 \ldots$$

4.29

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

4.30

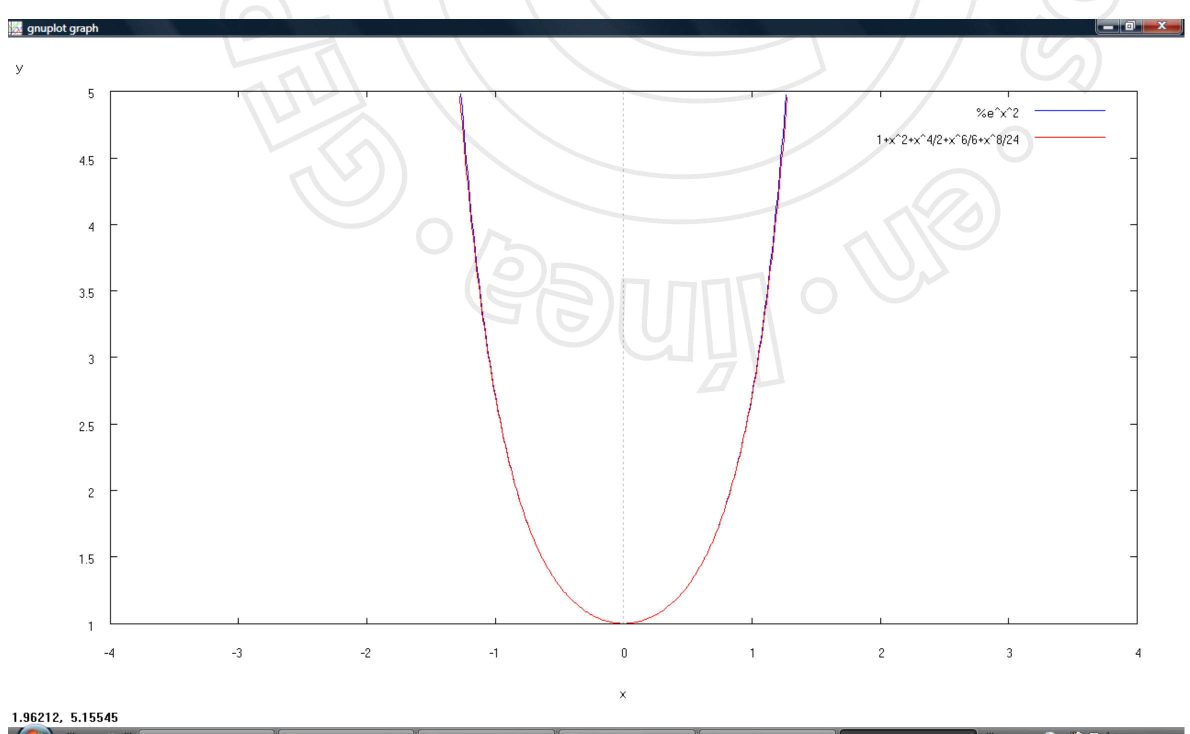
$$P_0(x) = \frac{1}{2}, P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, P_2(x) = \frac{3}{4}\sqrt{10}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right), P_3(x) = \frac{1}{4}\sqrt{2}\sqrt{7}\left(5x^3 - 3x\right), P_4(x) = \left(\frac{105}{1096}\sqrt{137}\right)\left(-\frac{6}{7}x + x^4 - \frac{3}{35}\right), P_5(x) = \sqrt{\frac{11}{2}}\left(\frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x\right)$$

4.34

```
(%i43) f(x):=exp(x^2);
       taylor(f(x),x,0,5);
       plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,8)],[x,-4,4],[y,1,5]);
```

(%o43) $f(x) := \exp(x^2)$

(%o44)/T/ $1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \ldots$



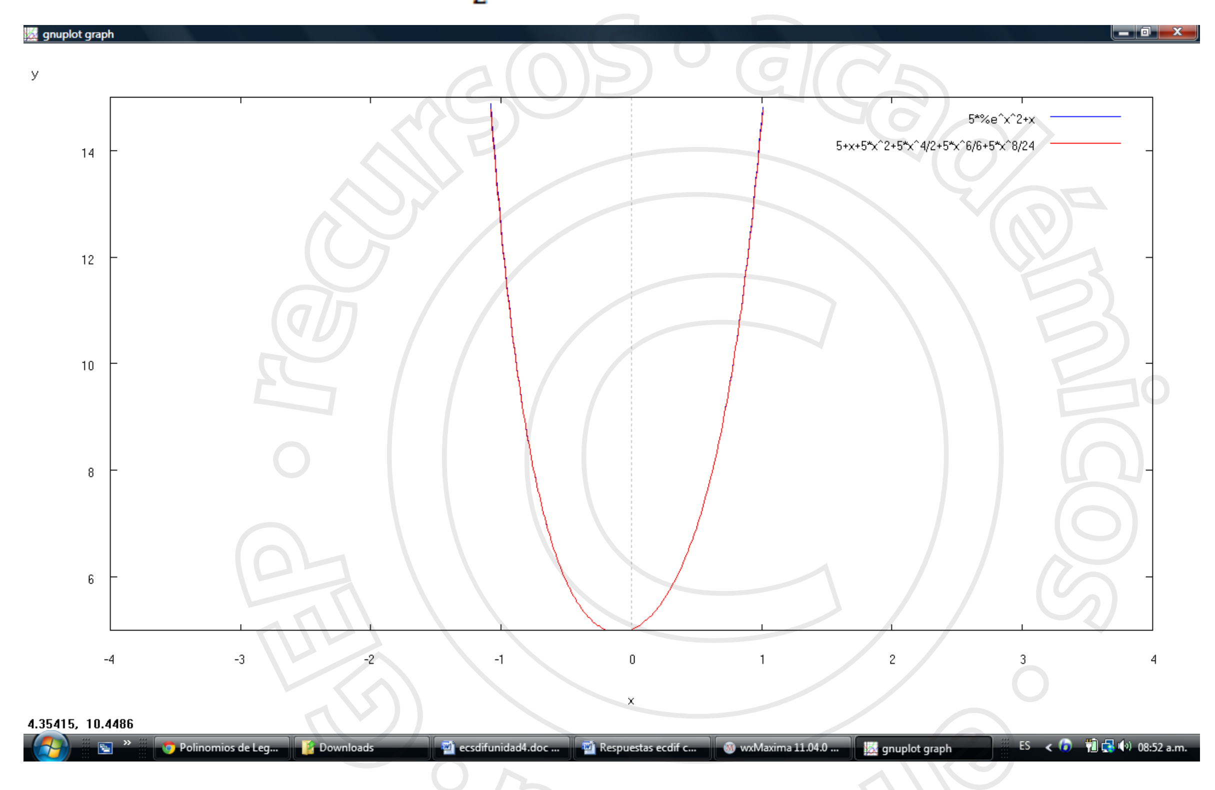


4.35

```
(%i52) f(x):=x+5*exp(x^2);
       taylor(f(x),x,0,5);
       plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,8)],[x,-4,4],[y,5,15]);
```

(%o52) $f(x):=x+5\,\exp(x^2)$

(%o53)/T/ $5+x+5\,x^2+\dfrac{5\,x^4}{2}+...$

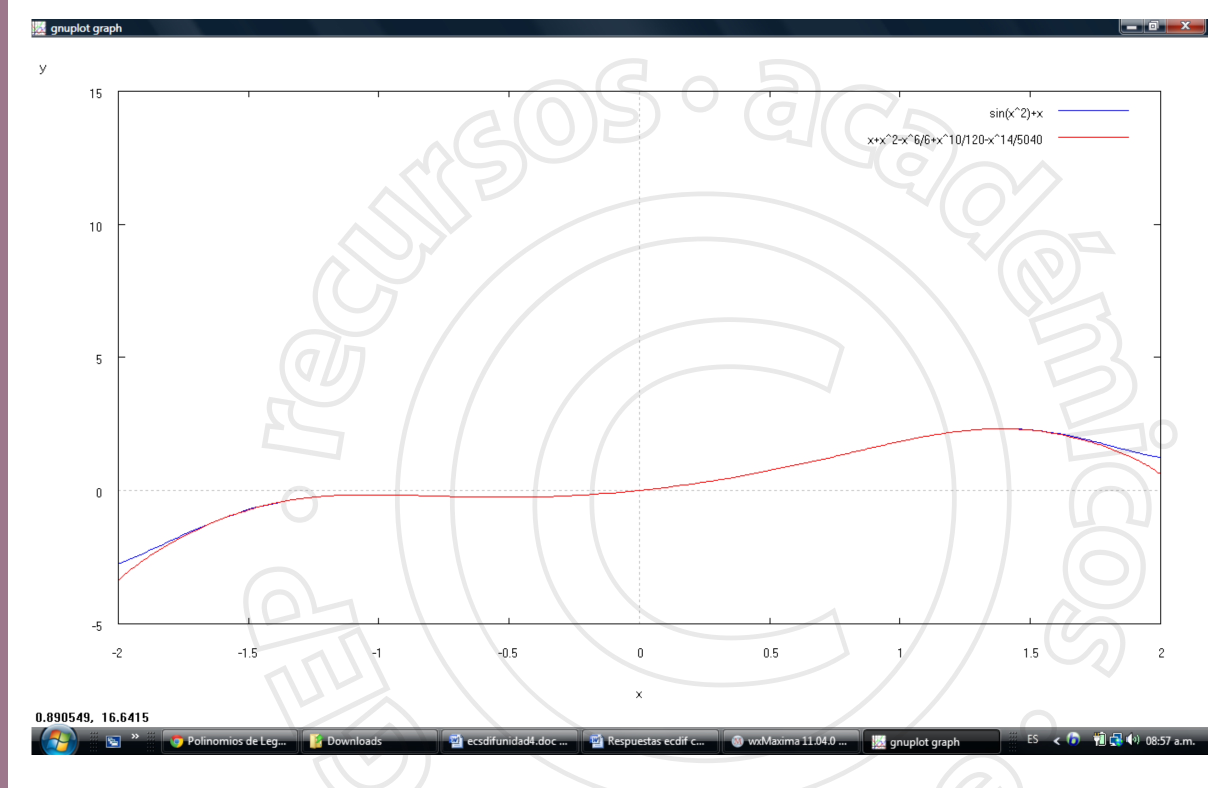


4.36

```
(%i64) f(x):=x+sin(x^2);
       taylor(f(x),x,0,5);
       plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,15)],[x,-2,2],[y,-5,15]);
```

(%o64) $f(x):=x+\sin(x^2)$

(%o65)/T/ $x+x^2+...$





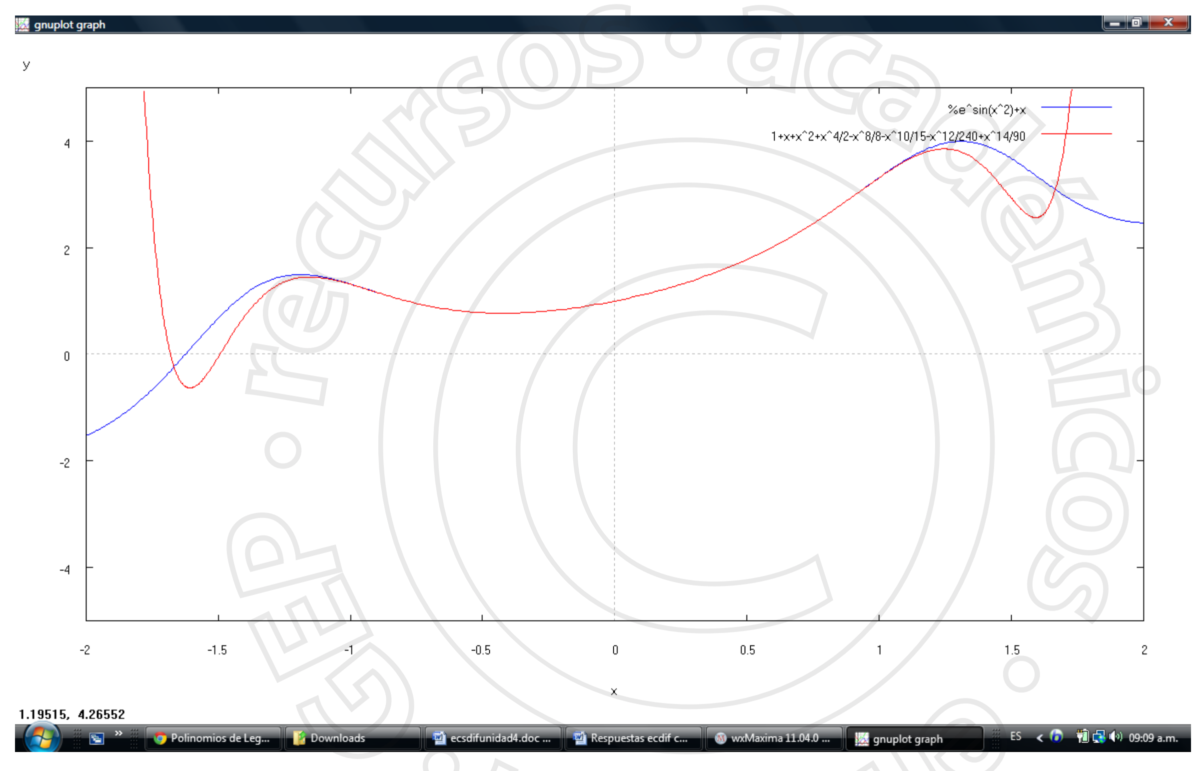


4.37

```
(%i85) f(x):=x+exp(sin(x^2));
       taylor(f(x),x,0,15);
       plot2d([f(x),taylor(f(x),x,0,15)],[x,-2,2],[y,-5,5]);
```

(%o85) $f(x):=x+\exp\left(\sin(x^2)\right)$

(%o86)/T/ $1+x+x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^8}{8}-\frac{x^{10}}{15}-\frac{x^{12}}{240}+\frac{x^{14}}{90}+...$





4.38

```
(%i94) f(x):=6*exp(x)+exp(sin(x^2));
       taylor(f(x),x,0,30);
```

(%o94) $f(x):=6\exp(x)+\exp\left(\sin(x^2)\right)$

(%o95)/T/ $7+6x+4x^2+x^3+\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{20}+\frac{x^6}{120}+\frac{x^7}{840}-\frac{839x^8}{6720}+\frac{x^9}{60480}-\frac{40319x^{10}}{604800}+\frac{x^{11}}{6652800}-\frac{332639x}{7983360}$
$+\frac{x^{13}}{1037836800}+\frac{161441281x^{14}}{14529715200}+\frac{x^{15}}{217945728000}+\frac{18767548801x^{16}}{3487131648000}+\frac{x^{17}}{59281238016000}+$
$\frac{188194406401x^{18}}{1067062284288000}+\frac{x^{19}}{20274183401472000}-\frac{329746005388799x^{20}}{405483668029440000}+\frac{x^{21}}{8515157028618240000}-$
$\frac{59470937977651199x^{22}}{187333454629601280000}+\frac{x^{23}}{4308669456480829440000}+\frac{1289466222921676801x^{24}}{103408066955539906560000}+$
$\frac{x^{25}}{2585201673888497664000000}+\frac{3339443346581422080001x^{26}}{67215243521100939264000000}+\frac{x^{27}}{1814811575069725360128000000}+$
$\frac{721126828663792911360001x^{28}}{50814724101952310083584000000}+\frac{x^{29}}{1473626998956616992423936000000}-$
$\frac{98645625591971347169279999x^{30}}{44208809968698509772718080000000}+\ldots$

4.39

a)

```
(%i15) 'sin(x) = niceindices(powerseries(sin(x), x, 0));
```

(%o15) $\sin(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

b)

```
(%i16) 'cos(x) = niceindices(powerseries(cos(x), x, 0));
```

(%o16) $\cos(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$

c)

```
(%i19) 'exp(x) = niceindices(powerseries(exp(x), x, 0));
```

(%o19) $\%e^{x}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$

4.40

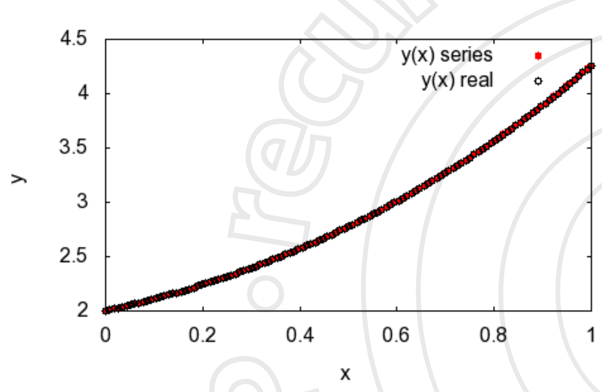
$$y = 1 + x - x^3 - \frac{1}{2}x^4$$

4.41

$$y = x - (x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 - \frac{1}{60}(x-1)^5 + \ldots$$

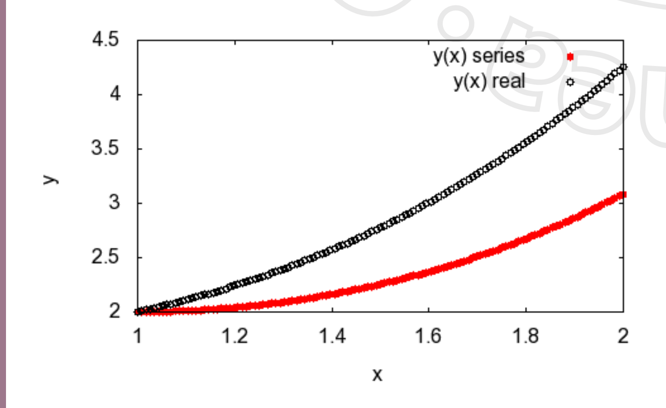
4.42

$$y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$



4.43

$$y = 1 + x + +(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{6} + + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120}$$

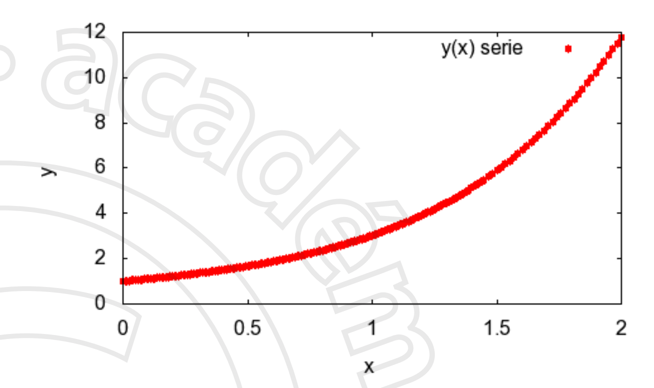


4.44

$$y = x + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 + \frac{5}{12}(x-1)^4 + \frac{13}{60}(x-1)^5$$

4.45

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{15}x^5$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1

a) $\dfrac{1}{s-3}$

b) $\dfrac{b}{b^2+s^2}+\dfrac{s}{a^2+s^2}$

c) $\dfrac{8}{s-1}$

d) $\dfrac{25}{s-w}$

5.2

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}\,dt=-\alpha\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt=\alpha\Gamma(\alpha)$$

5.3

$\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$

5.4

$\dfrac{3}{2}\sqrt{\pi},\dfrac{15}{8}\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}$

5.5

$$\mathcal{L}(t^\alpha)=\int_0^\infty t^\alpha e^{-st}\,dt=\int_0^\infty\left(\frac{u}{s}\right)^\alpha e^{-u}\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{\alpha+1}}\int_0^\infty u^\alpha e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

5.6

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}\,dt=1$$

$$\Gamma(n-1)=\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt=\left[-t^n e^{-t}\right]_0^\infty+n\int t^n e^{-t}\,dt=n\int_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\,dt=n\left[-e^{-t}t^{n-1}\right]_0^\infty+n(n+1)\int_0^\infty t^{n-2}e^{-t}\,dt=n(n-1)\ldots(n-(n-1))\int_0^\infty e^{-t}\,dt=n!$$

5.7

$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}},\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}},\ \dfrac{3}{4}\dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}},\ \dfrac{15}{8}\dfrac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{7}{2}}}$

5.8

$\dfrac{1}{2}t^2,\dfrac{1}{8}t+\dfrac{1}{16}e^{-2t}-\dfrac{1}{8}t^2e^{-2t}-\dfrac{1}{16},t^2e^{-2t},-\dfrac{3}{4}t-\dfrac{1}{8}\cos 2t-\dfrac{3}{8}\operatorname{sen}2t-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{8}$

5.9

$t-2t^4,\dfrac{1}{6}t^3+\dfrac{3}{2}t^2+3t,t+e^{2t}-1,\dfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}$

5.10

a) $\dfrac{1}{5}\cos 2t-\dfrac{1}{5}\cos 3t$

b) $\dfrac{2}{9}e^{2t}-\dfrac{2}{9}e^{2t}\left(\cos 3t-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}3t\right)$

5.11

$$L\left\{\operatorname{sen}(2t)e^{3t}\right\}=\frac{2}{s^2-6s+13}$$

5.12

$$y''-2y'=e^t\operatorname{sen}t\Rightarrow s^2Y(s)-2sY(s)=\frac{1}{(s-1)^2+1}$$

5.13

$\dfrac{1}{(s+6)^2}$



5.14
$$\frac{6}{(s+2)^4}$$

5.15
$$\frac{3658800}{(s+7)^{11}}$$

5.16
$$\frac{3}{(s-1)^2+9}$$

5.17
$$\frac{(s+2)}{(s+2)^2+16}$$

5.18
$$\frac{3}{(s-5)^2-9}$$

5.19
$$\frac{(s+1)}{(s+1)^2-9}$$

5.20
$$\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{2}{(s-3)^2}+\frac{1}{(s-4)^2}$$

5.21
$$\frac{1}{s-2}-\frac{2}{(s-2)^2}+\frac{2}{(s-2)^2}$$

5.22
$$\frac{2}{\left((s+1)^2+4\right)(s+1)}$$

5.23
$$\frac{(s^2-6s+11)}{\left((s-3)^2+4\right)(s-3)}$$

5.24
$$\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

5.25
$$\frac{1}{6}t^3e^t$$

5.26
$$(\operatorname{sen} t)e^{3t}$$

5.27
$$\frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$$

5.28
$$(\cos t)e^{-2t}-2(\operatorname{sen} t)e^{-2t}$$

5.29
$$2e^{-3t}\left(\cos 5t-\frac{1}{10}\operatorname{sen} 5t\right)$$

5.30
$$-e^{-t}(t-1)$$

5.31
$$5e^{2t}(2t+1)$$

5.32
$$3-3e^{-t}-t$$

5.33
$$\delta_0(t)-2e^{-2t}+te^{-2t}$$

5.34
$$\frac{1}{s^2}e^{-s}$$

5.35
$$\frac{e^{-2s}}{s+1}$$

5.36
$$\frac{1}{2}(t-2)^2 u(t-2)$$

5.37
$$e^{-2t}+2e^{4-2t}u(t-2)+e^{8-2t}u(t-4)$$

5.38
$$-(\operatorname{sen} t)u(t-\pi)$$

5.39
$$-u\left(t-\frac{1}{2}\pi\right)\cos 2t$$

5.40
$$-u(t-1)\left(e^{1-t}-1\right)$$

5.41
$$\frac{s^2}{\left(s^2+4\right)^2}-\frac{1}{s^2+4}$$

5.42
$$6\frac{s}{\left(s^2-9\right)^2}$$

5.43
$$8\frac{s^2}{\left(s^2+1\right)^3}-\frac{2}{\left(s^2-1\right)^2}$$

5.44
$$8\frac{s^3}{\left(s^2+1\right)^3}-6\frac{s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

5.45
$$\frac{2s-4}{\left((s-2)^2+36\right)^2}(s-2)-\frac{1}{(s-2)^2+36}$$

5.46
$$\frac{2s+6}{\left((s+3)^2+9\right)^2}(s+3)-\frac{1}{(+3)^2+9}$$

5.47
$$\frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$$

5.48
$$(\cos t)e^{-t}$$

5.49
Se deriva n veces ambos lados de la ecuación
$$\varphi(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$\frac{d\varphi(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=-\int_0^\infty te^{-st}f(t)dt$$
$$\frac{d^2\varphi(s)}{ds^2}=\int_0^\infty t^2e^{-st}f(t)dt$$
$$\vdots$$
$$\frac{d^n\varphi(s)}{ds^n}=(-)^n\int_0^\infty t^ne^{-st}f(t)dt=(-)^n L\left(t^nf(t)\right)$$

5.50
$$\frac{1}{t}\left(e^{-t}-e^{3t}\right)$$

5.51
$$-\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$$

5.52
$$-\frac{1}{t}\operatorname{sen} t$$



5.53

$$\frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$$

5.54

$$\frac{4}{t}\cos^3 t \operatorname{sen} t - \frac{4}{t}\cos t \operatorname{sen}^3 t + 1$$

5.55

Integramos por partes a

$L\left(\int_a^t f(x)dx\right) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_a^t f(x)dx\right]dt$, haciendo

$$u = \int_a^t f(x)dx$$

$$dv = e^{-st}dt$$

Entonces

$$L\left(\int_a^t f(x)dx\right) = -\frac{1}{s}e^{-st}\left[\int_a^t f(x)dx\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\left[\int_a^t f(x)dx\right]_0^\infty + \frac{1}{s}L(f(t))$$

Como $\int_a^t f(x)dx$ es de orden exponencial, el primer término en esta expresión tiende a cero cuando $t \to \infty$ ya que s es suficientemente grande y por lo tanto

$$L\left(\int_a^t f(x)dx\right) = \frac{1}{s}\int_0^a f(x)dx + \frac{1}{s}L(f(t))$$

5.56

$$\frac{a}{a^2 + s^2}$$

5.57

$$\frac{s+1}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

5.58

$$\frac{2}{s^4 + 2s^2 + 1}$$

5.59

$$-\frac{1}{s^2 - s^3}$$

5.60

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t - \frac{1}{4}$$

5.61

$$y = \frac{5}{18}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{8}{9}e^{-\frac{1}{2}t}$$

5.62

$$y = \frac{13}{60}e^t + \frac{3}{130}\cos 3t - \frac{13}{20}e^{-t} + \frac{16}{39}e^{-2t} - \operatorname{sen} 3t$$

5.63

$$y = \cos t - \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$$



5.64

(%i1) edo: ('diff(y,x)+y*(x-1))=0;

(%o1) $\frac{d}{dx} y+(x-1)y=0$

(%i2) ode2(edo,y,x);

(%o2) $y=\%c\,\%e^{x-\frac{x^2}{2}}$

(%i3) ic1(%,x=0,y=2);

(%o3) $y=2\,\%e^{x-\frac{x^2}{2}}$

5.65

(%i1) edo: ('diff(y,x,2)+'diff(y,x)=7);

(%o1) $\frac{d^2}{dx^2} y+\frac{d}{dx} y=7$

(%i2) ode2(edo,y,x);

(%o2) $y=\%k2\,\%e^{-x}+7\,x+\%k1-7$

(%i4) ic2(%,x=0,y=2,'diff(y,x)=1);

(%o4) $y=6\,\%e^{-x}+7\,x-4$

5.66

(%i3) edo: ('diff(y,x,2)+'diff(y,x)-y=exp(x));

(%o3) $\frac{d^2}{dx^2} y+\frac{d}{dx} y-y=\%e^x$

(%i4) ode2(edo,y,x);

(%o4) $y=\%k1\,\%e^{\frac{(\sqrt{5}-1)\,x}{2}}+\%k2\,\%e^{\frac{(-\sqrt{5}-1)\,x}{2}}+\%e^x$

(%i5) ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=1);

(%o5) $y=\%e^x$



5.67

(%i1) edo:('diff(y,x,2)+5*'diff(y,x)+2*y=exp(x));

(%o1) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+5\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+2\,y=\%e^x$

(%i2) ode2(edo,y,x);

(%o2) $y=\%k1\,\%e^{\frac{(\sqrt{17}-5)\,x}{2}}+\%k2\,\%e^{\frac{(-\sqrt{17}-5)\,x}{2}}+\frac{\%e^x}{8}$

(%i3) ic2(%,x=0,y=0,'diff(y,x)=3);

(%o3) $y=\frac{(41\sqrt{17}-17)\,\%e^{\frac{(\sqrt{17}-5)\,x}{2}}}{272}-\frac{(41\sqrt{17}+17)\,\%e^{\frac{(-\sqrt{17}-5)\,x}{2}}}{272}+\frac{\%e^x}{8}$

5.68

(%i7) edo:('diff(y,x,2)+'diff(y,x)+2*y=x);

(%o7) $\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+\frac{d}{d\,x}\,y+2\,y=x$

(%i8) ode2(edo,y,x);

(%o8) $y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\%k1\,\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)+\%k2\,\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)\right)+\frac{2\,x-1}{4}$

(%i9) ic2(%,x=0,y=2,'diff(y,x)=2);

(%o9) $y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{3\sqrt{7}\,\sin\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)}{4}+\frac{9\,\cos\left(\frac{\sqrt{7}\,x}{2}\right)}{4}\right)+\frac{2\,x-1}{4}$



5.69.

(%i1) `edo:('diff(y,x,2)+'diff(y,x)+y=cos(x));`

(%o1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+\frac{d}{d\,x}\,y+y=\cos(x)$$

(%i2) `ode2(edo,y,x);`

(%o2) $$y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\%k1\,\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)+\%k2\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right)+\sin(x)$$

(%i3) `ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=0);`

(%o3) $$y=\%e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)-\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)+\sin(x)$$

5.70

(%i1) `edo:('diff(y,x,2)+3*'diff(y,x)+10*y=x*cos(x));`

(%o1) $$\frac{d^2}{d\,x^2}\,y+3\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)+10\,y=x\,\cos(x)$$

(%i2) `ode2(edo,y,x);`

(%o2) $$y=\%e^{-\frac{3\,x}{2}}\left(\%k1\,\sin\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)+\%k2\,\cos\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)\right)+\frac{(15\,x-1)\sin(x)+(45\,x-18)\cos(x)}{450}$$

(%i3) `ic2(%,x=0,y=0,'diff(y,x)=0);`

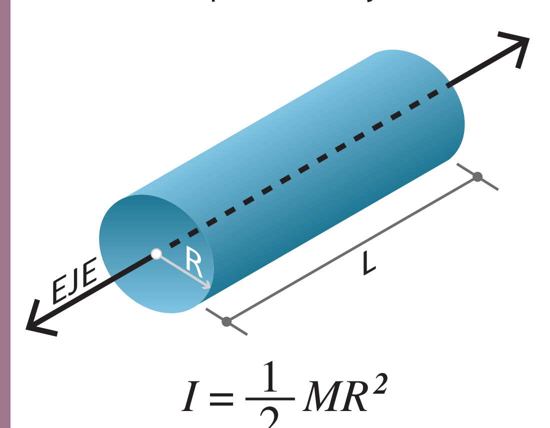
(%o3) $$y=\%e^{-\frac{3\,x}{2}}\left(\frac{\cos\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)}{25}-\frac{17\,\sin\left(\frac{\sqrt{31}\,x}{2}\right)}{225\,\sqrt{31}}\right)+\frac{(15\,x-1)\sin(x)+(45\,x-18)\cos(x)}{450}$$



Momento de inercia en algunos cuerpos rígidos

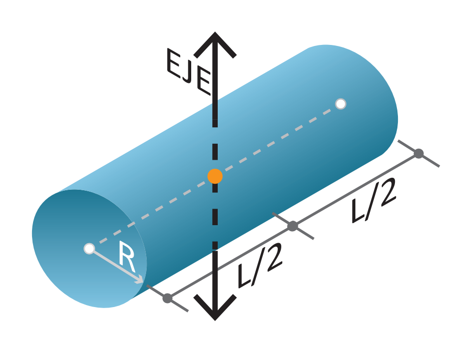
CILINDRO MACIZO

Respecto a su eje



$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

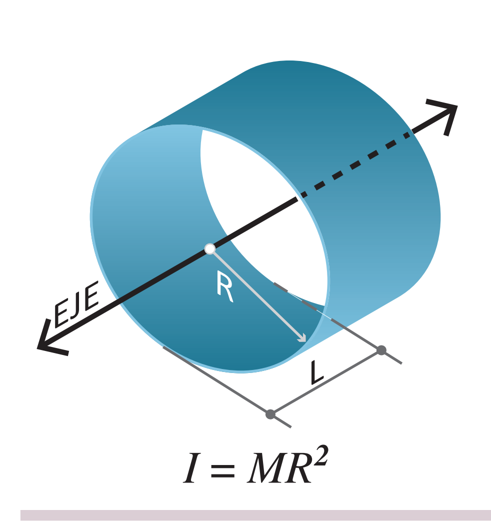
Respecto a eje por su centro



$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

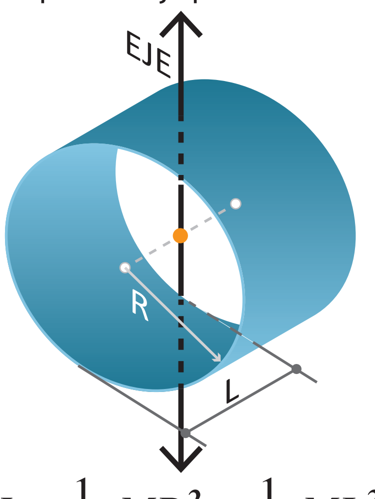
CAPA CILÍNDRICA

Respecto a su eje



$$I = MR^2$$

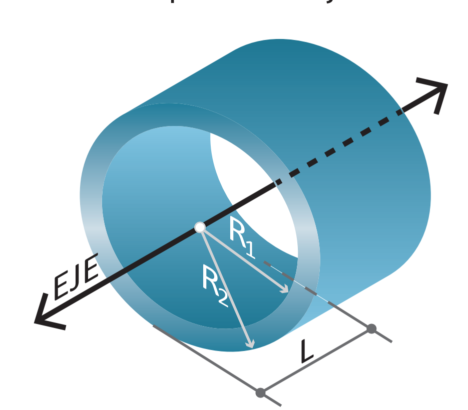
Respecto a eje por su centro



$$I = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$

CILINDRO HUECO

Respecto a su eje



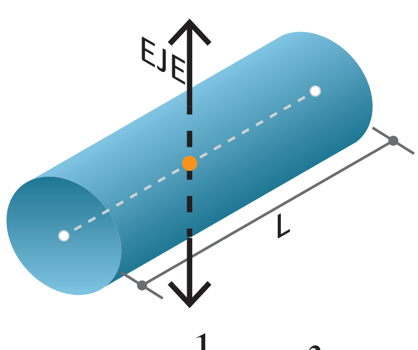
$$I = \frac{1}{2} M \left(R_1^2 + R_2^2\right)$$



Momento de inercia en algunos cuerpos rígidos

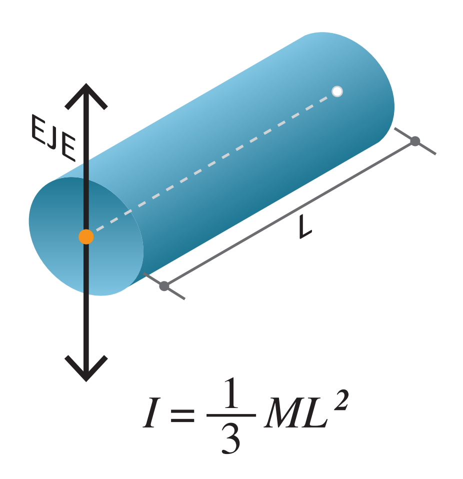
VARILLA DELGADA

Respecto a eje perendicular por centro



$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

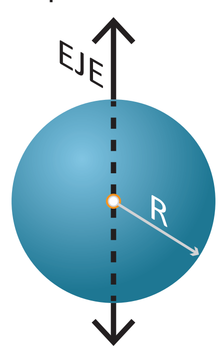
Respecto a eje por su centro



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

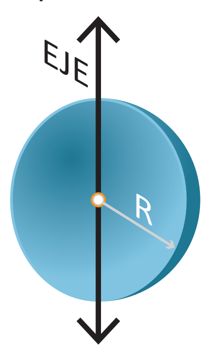
ESFERA

Maciza respecto a un diámetro



$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

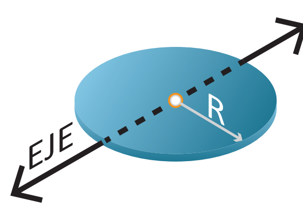
Corteza respecto a un diámetro



$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

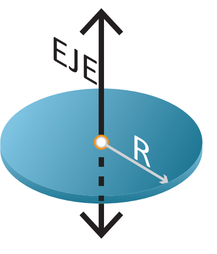
DISCO

Respecto a un diámetro



$$I = \frac{1}{4} MR^2$$

Respecto a eje perendicular en su centro



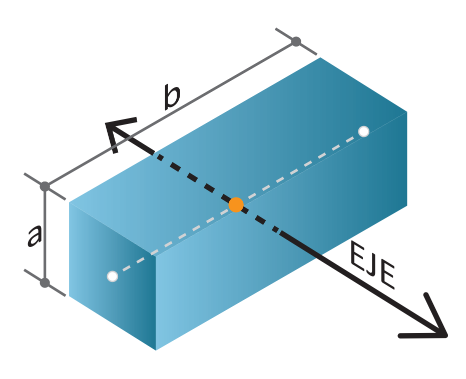
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



Momento de inercia en algunos cuerpos rígidos

PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR MACIZO

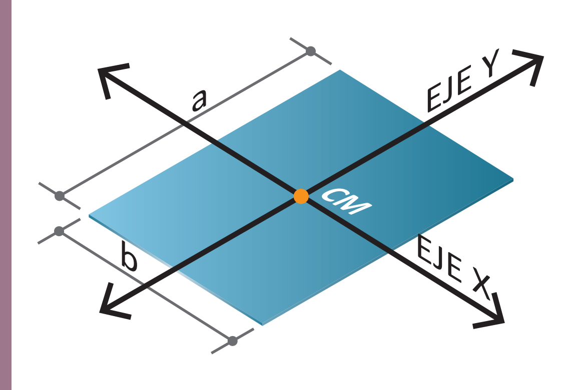
Eje por su centro y perpendicular a una cara



$$I = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right)$$

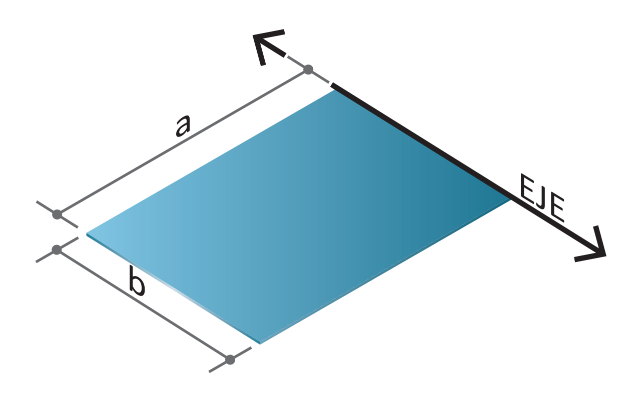
PLACA PLANA RECTANGULAR

Eje por su centro de masa paralelo a un lado



$$I_y = \frac{1}{12} Mb^2 \qquad I_x = \frac{1}{12} Ma^2$$

Eje por un lado



$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$

NORMA OFICIAL MEXICANA

NOM-008-SCFI-2002

SISTEMA GENERAL DE UNIDADES DE MEDIDA

GENERAL SYSTEM OF UNITS

P R E F A C I O

En la elaboración de esta norma oficial mexicana participaron las siguientes instituciones, organismos y empresas:

- ASOCIACIÓN DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN, A.C. (ANCE)
- ASOCIACIÓN MEXICANA DE ALMACENES GENERALES DE DEPOSITO (AMAGDE)
- CÁMARA NACIONAL DE LA INDUSTRIA ELECTRÓNICA, TELECOMUNICACIONES E INFORMÁTICA
- CENTRO DE ESTUDIOS TECNOLÓGICOS, Industrial y de Servicios No. 26
- CENTRO NACIONAL DE METROLOGÍA (CENAM)
- COMISIÓN FEDERAL DE ELECTRICIDAD
  Laboratorio de Pruebas de Equipos y Materiales
- COMITÉ CONSULTIVO NACIONAL DE NORMALIZACIÓN DE PREVENCIÓN Y CONTROL DE ENFERMEDADES
- COMITÉ TÉCNICO DE NORMALIZACIÓN NACIONAL DE METROLOGÍA
- DIRECCIÓN GENERAL DE MARINA MERCANTE
- ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA
  Plantel No. 3 "Justo Sierra"
- INSTITUTO MEXICANO DE NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN, A.C.
- INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGACIONES NUCLEARES
- INSTITUTO NACIONAL DE NORMALIZACIÓN TEXTIL, A.C.
- INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
  Escuela Superior de Ingeniería y Arquitectura, Unidad Tecamachalco
  Coordinación de Metrología, Normas y Calidad Industrial
  Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Unidad Azcapotzalco
- NORMALIZACIÓN Y CERTIFICACIÓN ELECTRÓNICA, A.C.
- PETRÓLEOS MEXICANOS
  Comité de Normalización de Petróleos Mexicanos y Organismos Subsidiarios
- PROCURADURÍA FEDERAL DEL CONSUMIDOR
- SECRETARÍA DEL MEDIO AMBIENTE Y RECURSOS NATURALES
  Subsecretaría de Recursos Naturales
  Instituto Nacional de Ecología
  Comisión Nacional del Agua
- SECRETARÍA DE COMUNICACIONES Y TRANSPORTES
  Dirección General de Política de Telecomunicaciones
- SECRETARÍA DE AGRICULTURA, GANADERÍA Y DESARROLLO RURAL
  Dirección General de Sanidad Vegetal
  Dirección General de Sanidad Animal
- SUNBEAM MEXICANA, S.A. DE C.V.

NORMA OFICIAL MEXICANA

NOM-008-SCFI-2002

SISTEMA GENERAL DE UNIDADES DE MEDIDA

INTRODUCCIÓN

Esta norma oficial mexicana tiene como propósito, establecer un lenguaje común que responda a las exigencias actuales de las actividades científicas, tecnológicas, educativas, industriales y comerciales, al alcance de todos los sectores del país.

La elaboración de esta norma oficial mexicana se basó principalmente en las resoluciones y acuerdos que sobre el Sistema Internacional de Unidades (SI) se han tenido en la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM), hasta su 21a. Convención realizada en el año 1999.

El "SI" es el primer sistema de unidades de medición compatible, esencialmente completo y armonizado internacionalmente, está fundamentado en 7 unidades de base, cuya materialización y reproducción objetiva de los patrones correspondientes, facilita a todas las naciones que lo adopten para la estructuración de sus sistemas metrológicos a los más altos niveles de exactitud. Además, al compararlo con otros sistemas de unidades, se manifiestan otras ventajas entre las que se encuentran la facilidad de su aprendizaje y la simplificación en la formación de las unidades derivadas.

1 OBJETIVO Y CAMPO DE APLICACIÓN

Esta norma oficial mexicana establece las definiciones, símbolos y reglas de escritura de las unidades del Sistema Internacional de Unidades (SI) y otras unidades fuera de este Sistema que acepte la CGPM, que en conjunto, constituyen el Sistema General de Unidades de Medida, utilizado en los diferentes campos de la ciencia, la tecnología, la industria, la educación y el comercio.

2 REFERENCIAS

Para la correcta aplicación de esta norma se debe consultar la siguiente norma mexicana vigente o la que la sustituya

NMX-Z-055-1997:IMNC	Metrología-Vocabulario de términos fundamentales generales, Declaratoria de vigencia publicada en el Diario Oficial de la Federación el día 17 de enero de 1997.

3 DEFINICIONES FUNDAMENTALES

Para los efectos de esta norma, se aplican las definiciones contenidas en la norma referida en el inciso 2, Referencias, y las siguientes:

3.1 Sistema Internacional de Unidades (SI)

Sistema coherente de unidades adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM).

Este sistema está compuesto por:

- unidades SI de base;
- unidades SI derivadas

3.2 Unidades SI de base

Unidades de medida de las magnitudes de base del Sistema Internacional de Unidades.

3.3 Magnitud

Atributo de un fenómeno, cuerpo o sustancia que es susceptible a ser distinguido cualitativamente y determinado cuantitativamente.

3.4 Sistema coherente de unidades (de medida)

Sistema de unidades compuesto por un conjunto de unidades de base y de unidades derivadas compatibles.

3.5 Magnitudes de base

Son magnitudes que dentro de un "sistema de magnitudes" se aceptan por convención, como independientes unas de otras.

3.6 Unidades SI derivadas

Son unidades que se forman combinando entre sí las unidades de base, o bien, combinando éstas con las unidades derivadas, según expresiones algebraicas que relacionan las magnitudes correspondientes de acuerdo a leyes simples de la física.

4 TABLAS DE UNIDADES

4.1 Unidades SI de base

Las unidades de base del SI son 7, correspondiendo a las siguientes magnitudes: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura termodinámica, intensidad luminosa y cantidad de sustancia. Los nombres de las unidades son respectivamente: metro, kilogramo, segundo, ampere, kelvin, candela y mol. Las magnitudes, unidades, símbolos y definiciones se describen en la Tabla 1.

4.2 Unidades SI derivadas

Estas unidades se obtienen a partir de las unidades de base, se expresan utilizando los símbolos matemáticos de multiplicación y división. Se pueden distinguir tres clases de unidades: la primera, la forman aquellas unidades SI derivadas expresadas a partir de unidades de base de las cuales se indican algunos ejemplos en la Tablas 2 y 3; la segunda la forman las unidades SI derivadas que reciben un nombre especial y símbolo particular, la relación completa se cita en la Tabla 4; la tercera la forman las unidades SI derivadas expresadas con nombres especiales, algunos ejemplos de ellas se indican en la Tabla 5.

Existe gran cantidad de unidades derivadas que se emplean en las áreas científicas, para una mayor facilidad de consulta, se han agrupado en 10 tablas, correspondiendo a un número equivalente de campos de las más importantes de la física, de acuerdo a la relación siguiente:

Tabla 6 Principales magnitudes y unidades de espacio y tiempo.

Tabla 7 Principales magnitudes y unidades de fenómenos periódicos y conexos.

Tabla 8 Principales magnitudes y unidades de mecánica.

Nota sobre las unidades de dimensión 1 (uno)

La unidad coherente de cualquier magnitud adimensional es el número 1 (uno), cuando se expresa el valor de dicha magnitud, la unidad 1(uno) generalmente no se escribe en forma explícita.

No deben utilizarse prefijos para formar múltiplos o submultiplos de la unidad, en lugar de prefijos deben usarse potencias de 10

5 UNIDADES QUE NO PERTENECEN AL SI

Existen algunas unidades que no pertenecen al SI, por ser de uso común, la CGPM las ha clasificado en tres categorías:

- unidades que se conservan para usarse con el SI;
- unidades que pueden usarse temporalmente con el SI.
- unidades que no deben utilizarse con el SI.

5.1 Unidades que se conservan para usarse con el SI

Son unidades de amplio uso, por lo que se considera apropiado conservarlas; sin embargo, se recomienda no combinarlas con las unidades del SI para no perder las ventajas de la coherencia, la relación de estas unidades se establecen en la Tabla 16.

5.2 Unidades que pueden usarse temporalmente con el SI

Son unidades cuyo empleo debe evitarse, se mantienen temporalmente en virtud de su gran uso actual, pero se recomienda no emplearlas conjuntamente con las unidades SI, la relación de estas unidades se establece en la Tabla 17.

5.3 Unidades que no deben utilizarse con el SI

Existen otras unidades que no pertenecen al SI; actualmente tienen cierto uso, algunas de ellas derivadas del sistema CGS, dichas unidades no corresponden a ninguna de las categorías antes mencionadas en esta norma por lo que no deben utilizarse en virtud de que hacen perder la coherencia del SI; se recomienda utilizar en su lugar, las unidades respectivas del SI. En la tabla 18 se dan algunos ejemplos de estas unidades.

6 PREFIJOS

La Tabla 19 contiene la relación de los nombres y los símbolos de los prefijos para formar los múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades, cubriendo un intervalo que va desde 10^{-24} a 10^{24}.

7 REGLAS GENERALES PARA LA ESCRITURA DE LOS SÍMBOLOS DE LAS UNIDADES DEL SI

Las reglas para la escritura apropiada de los símbolos de las unidades y de los prefijos, se establecen en la Tabla 20.

8 REGLAS PARA LA ESCRITURA DE LOS NÚMEROS Y SU SIGNO DECIMAL

La Tabla 21 contiene estas reglas de acuerdo con las recomendaciones de la Organización Internacional de Normalización (ISO).

Tabla 1.- Nombres, símbolos y definiciones de las unidades SI de base

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
longitud	metro	m	Es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299 792 458 de segundo [17a. CGPM (1983) Resolución 1]
masa	kilogramo	kg	Es la masa igual a la del prototipo internacional del kilogramo [1a. y 3a. CGPM (1889 y 1901)]
tiempo	segundo	s	Es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133 [13a. CGPM (1967), Resolución 1]
corriente eléctrica	ampere	A	Es la intensidad de una corriente constante que mantenida en dos conductores paralelos rectilíneos de longitud infinita, cuya área de sección circular es despreciable, colocados a un metro de distancia entre sí, en el vacío, producirá entre estos conductores una fuerza igual a $2x10^{-7}$ newton por metro de longitud [9a. CGPM, (1948), Resolución 2]
temperatura termodinámica	kelvin	K	Es la fracción 1/273,16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua [13a. CGPM (1967) Resolución 4]
cantidad de sustancia	mol	mol	Es la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales como existan átomos en 0,012 kg de carbono 12 [14a. CGPM (1971), Resolución 3]
intensidad luminosa	candela	cd	Es la intensidad luminosa en una dirección dada de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540x10^{12}$ hertz y cuya intensidad energética en esa dirección es 1/683 watt por esterradián [16a. CGPM (1979), Resolución 3]

Tabla 2.- Nombres de las magnitudes, símbolos y definiciones de las unidades SI derivadas

Magnitud	Unidad	Símbolo	Definición
ángulo plano	radián	rad	Es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo, y que interceptan sobre la circunferencia de este círculo un arco de longitud igual a la del radio (ISO-31/1)
ángulo sólido	esterradián	sr	Es el ángulo sólido que tiene su vértice en el centro de una esfera, y, que intercepta sobre la superficie de esta esfera una área igual a la de un cuadrado que tiene por lado el radio de la esfera (ISO-31/1)

Tabla 3.- Ejemplo de unidades SI derivadas sin nombre especial

Magnitud	Unidades SI	
	Nombre	Símbolo
superficie	metro cuadrado	m^2
volumen	metro cúbico	m^3
velocidad	metro por segundo	m/s
aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2
número de ondas	metro a la menos uno	m^{-1}
masa volúmica, densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
volumen específico	metro cúbico por kilogramo	m^3/kg
densidad de corriente	ampere por metro cuadrado	A/m^2
intensidad de campo eléctrico	ampere por metro	A/m
concentración (de cantidad de sustancia)	mol por metro cúbico	mol/m^3
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2

Tabla 4.- Unidades SI derivadas que tienen nombre y símbolo especial

Magnitud	Nombre de la unidad SI derivada	Símbolo	Expresión en unidades SI de base	Expresión en otras unidades SI
frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}	
fuerza	newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$	
presión, tensión mecánica	pascal	Pa	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$	N/m^2
trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$	$N \cdot m$
potencia, flujo energético	watt	W	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$	J/s
carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb	C	$s \cdot A$	
diferencia de potencial, tensión eléctrica, potencial eléctrico, fuerza electromotriz	volt	V	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$	W/A
capacitancia	farad	F	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	C/V
resistencia eléctrica	ohm	Ω	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$	V/A
conductancia eléctrica	siemens	S	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$	A/V
flujo magnético[1]	weber	Wb	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	$V \cdot s$
inducción magnética[2]	tesla	T	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$	Wb/m^2
Inductancia	henry	H	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$	Wb/A
flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$	
luminosidad[3]	lux	lx	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$	lm/m^2
actividad nuclear	becquerel	Bq	s^{-1}	
dosis absorbida	gray	Gy	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg
temperatura Celsius	grado Celsius	°C		K
dosis equivalente	sievert	Sv	$m^2 \cdot s^{-2}$	J/kg

[1] También llamado flujo de inducción magnética.
[2] También llamada densidad de flujo magnético.
[3] También llamada iluminanción

Tabla 5.- Ejemplos de unidades SI derivadas expresadas por medio de nombres especiales

Magnitud	Unidad SI		Expresión en unidades SI de base
	Nombre	Símbolo	
viscosidad dinámica	pascal segundo	Pa · s	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-1}$
momento de una fuerza	newton metro	N·m	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-2}$
tensión superficial	newton por metro	N/m	$kg \cdot s^{-2}$
densidad de flujo de calor, irradiancia	watt por metro cuadrado	W/m^2	$kg \cdot s^{-3}$
capacidad calorífica, entropía	joule por kelvin	J/K	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
capacidad calorífica específica, entropía específica	joule por kilogramo kelvin	J/(kg·K)	$m^{2} \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$
energía específica	joule por kilogramo	J/kg	$m^{2} \cdot s^{-2}$
conductividad térmica	watt por metro kelvin	W/(m·K)	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}$
densidad energética	joule por metro cúbico	J/m^3	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
fuerza del campo eléctrico	volt por metro	V/m	$m \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
densidad de carga eléctrica	coulomb por metro cúbico	C/m^3	$m^{-3} \cdot s \cdot A$
densidad de flujo eléctrico	coulomb por metro cuadrado	C/m^2	$m^{-2} \cdot s \cdot A$
permitividad	farad por metro	F/m	$m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^{4} \cdot A^{2}$
permeabilidad	henry por metro	H/m	$m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
energía molar	joule por mol	J/mol	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot mol^{-1}$
entropía molar, capacidad calorífica molar	joule por mol kelvin	J/(mol·K)	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
exposición (rayos x y γ)	coulomb por kilogramo	C/kg	$kg^{-1} \cdot s \cdot A$
rapidez de dosis absorbida	gray por segundo	Gy/s	$m^{2} \cdot s^{-3}$

Tabla 6.- Principales magnitudes y unidades de espacio y tiempo

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
ángulo plano	$\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, \varphi$, etc.	El ángulo comprendido entre dos semirrectas que parten del mismo punto, se define como la relación de la longitud del arco intersectado por estas rectas sobre el círculo (con centro en aquel punto), a la del radio del círculo	radián (véase Tabla 2)	rad
ángulo sólido	Ω	El ángulo sólido de un cono se define como la relación del área cortada sobre una superficie esférica (con su centro en el vértice del cono) al cuadrado de la longitud del radio de la esfera	esterradián (véase Tabla 2)	sr
longitud ancho altura espesor radio diámetro longitud de trayectoria	l, (L) b h d, δ r d, D s		metro (véase Tabla 1)	m
área o superficie	A, (S)		metro cuadrado	m^2
volumen	V		metro cúbico	m^3
tiempo, intervalo de tiempo, duración	t		segundo (Véase Tabla 1)	s
velocidad angular	ω	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	radián por segundo	rad/s
aceleración angular	α	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	radián por segundo al cuadrado	rad/s^2
velocidad	u, v, w, c	$v = \frac{ds}{dt}$	metro por segundo	m/s

Tabla 6.- Principales magnitudes y unidades de espacio y tiempo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
aceleración	a	$a = \frac{dv}{dt}$	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
aceleración de caída libre, aceleración debida a la gravedad	g	Nota: la aceleración normal de caída libre es: $g_n = 9{,}806\ 65\ m/s^2$ (Conferencia General de Pesas y Medidas 1901)		

Tabla 7.- Magnitudes y unidades de fenómenos periódicos y conexos

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
período, tiempo periódico	T	Tiempo de un ciclo	segundo	s
constante de tiempo de un magnitud que varía exponencialmente	τ	Tiempo después del cual la magnitud podría alcanzar su límite si se mantiene su velocidad inicial de variación	segundo	s
frecuencia frecuencia de rotación(1)	f, ν n (1)	$f = 1/T$ Número de revoluciones dividido por el tiempo	hertz segundo recíproco	Hz s^{-1}
frecuencia angular frecuencia circular, pulsatancia	ω	$\omega = 2\pi f$	radián por segundo segundo recíproco	rad/s s^{-1}
longitud de onda	λ	Distancia, en la dirección de propagación de una onda periódica, entre dos puntos en donde, en un instante dado, la diferencia de fase es 2π	metro	m
número de onda número de onda circular	σ k	$\sigma = 1/\lambda$ $k = 2\pi\sigma$	metro recíproco metro recíproco	m^{-1} m^{-1}
diferencia de nivel de amplitud, diferencia de nivel de campo diferencia de nivel de potencia	L_F L_P	$L_F = \ln (F_1 / F_2)$ Donde F_1 y F_2 representan dos amplitudes de la misma clase $L_P = 1/2 \ln (P_1 / P_2)$ Donde P_1 y P_2 representan dos potencias	neper* decibel*	Np* dB*
coeficiente de amortiguamiento	δ	Si una magnitud es una función del tiempo y está determinada por: $F(t) = Ae^{-\delta t} \cos[\omega(t - t_o)]$ Entonces δ es el coeficiente de amortiguamiento	segundo recíproco	s^{-1}

Tabla 7.- Magnitudes y unidades de fenómenos periódicos y conexos
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
decremento logarítmico	Λ	Producto del coeficiente de amortiguamiento y el período	neper*	Np*
coeficiente de atenuación	α	Si una magnitud es una función de la distancia x y está dada por: $F(x) = Ae^{-\alpha x} \cos[\beta (x - x_o)]$	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de fase	β	Entonces α es el coeficiente de atenuación y β es el coeficiente de fase		
coeficiente de propagación	γ	$\gamma = \alpha + j \beta$		

NOTAS:

(1) Para la frecuencia de rotación, también se usan las unidades "revoluciones por minuto" (r/min) y "revoluciones por segundo" (r/s)

*** Estas no son unidades del SI pero se mantienen para usarse con unidades del SI**

1 Np es la diferencia de nivel de amplitud cuando ln $(F_1 / F_2) = 1$

1 dB es la diferencia de nivel de amplitud cuando 20 lg $(F_1 / F_2) = 1$

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
masa	m		kilogramo (véase Tabla 1)	kg
densidad (masa volúmica)	ρ	Masa dividida por el volumen	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
densidad relativa	d	Relación de la densidad de una sustancia con respecto a la densidad de una sustancia de referencia bajo condiciones que deben ser especificadas para ambas sustancias	uno	1
volumen específico	v	Volumen dividido por la masa	metro cúbico por kilogramo	m^3/kg
densidad lineal	ρ_l	Masa dividida por la longitud	kilogramo por metro	kg/m
densidad superficial	ρ_A, (ρ_S)	Masa dividida por el área	kilogramo por metro cuadrado	kg/m^2
cantidad de movimiento, momentum	p	Producto de la masa y la velocidad	kilogramo metro por segundo	kg•m/s
momento de momentum, momentum angular	L	El momento de momentum de una partícula con respecto a un punto es igual al producto vectorial del radio vector dirigido del punto hacia la partícula, y el momentum de la partícula	kilogramo metro cuadrado por segundo	$kg \bullet m^2/s$
momento de inercia (momento dinámico de inercia)	I, J	El momento (dinámico) de inercia de un cuerpo con respecto a un eje, se define como la suma (la integral) de los productos de sus masas elementales, por los cuadrados de las distancias de dichas masas al eje	kilogramo metro cuadrado	$kg \bullet m^2$
fuerza	F	La fuerza resultante aplicada sobre un cuerpo es igual a la razón de cambio del momentum del cuerpo	newton	N

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
peso	G, (P), (W)	El peso de un cuerpo en un determinado sistema de referencia se define como la fuerza que, aplicada al cuerpo, le proporciona una aceleración igual a la aceleración local de caída libre en ese sistema de referencia		
constante gravitacional	G, (f)	La fuerza gravitacional entre dos partículas es: $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde r es la distancia entre las partículas, m_1 y m_2 son sus masas y la constante gravitacional es: $G = (6{,}672\ 59 \pm 0{,}010) \times 10^{-11}\ N \bullet m^2/kg^2$	newton metro cuadrado por kilogramo cuadrado	$N \bullet m^2/kg^2$
momento de una fuerza	M	El momento de una fuerza referido a un punto es igual al producto vectorial del radio vector, dirigido desde dicho punto a cualquier otro punto situado sobre la línea de acción de la fuerza, por la fuerza	newton metro	N•m
momento torsional, momento de un par	T	Suma de los momentos de dos fuerzas de igual magnitud y dirección opuesta que no actúan a lo largo de la misma línea		
presión	P	La fuerza dividida por el área	pascal	Pa
esfuerzo normal	σ			
esfuerzo al corte	τ			
módulo de elasticidad	E	$E = \sigma/\varepsilon$	pascal	Pa
módulo de rigidez, módulo de corte	G	$G = \tau/\gamma$		
módulo de compresión	K	$K = -p/\vartheta$		

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
compresibilidad	x	$x = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$	pascal recíproco	Pa^{-1}
momento segundo axial de área	I_a, (I)	El momento segundo axial de área de una área plana, referido a un eje en el mismo plano, es la suma (integral) de los productos de sus elementos de área y los cuadrados de sus distancias medidas desde el eje	metro a la cuarta potencia	m^4
momento segundo polar de área	I_p	El momento segundo polar de área de una área plana con respecto a un punto localizado en el mismo plano, se define como la integral de los productos de sus elementos de área y los cuadrados de las distancias del punto a dichos elementos de área		
módulo de sección	Z, W	El módulo de sección de un área plana o sección con respecto a un eje situado en el mismo plano, se define como el momento segundo axial de área dividido por la distancia desde el eje hasta el punto más lejano de la superficie plana	metro cúbico	m^3
viscosidad dinámica	η, (μ)	$\tau_{xz} = \eta(dv_x/dz)$ donde τ_{xz} es el esfuerzo cortante de un fluido en movimiento con un gradiente de velocidad dv_x/dz perpendicular plano de corte	pascal segundo	Pa•s
viscosidad cinemática	ν	$\nu = \eta/\rho$ donde ρ es la densidad	metro cuadrado por segundo	m^2/s
tensión superficial	γ, σ	Se define como la fuerza perpendicular a un elemento de línea en una superficie, dividida por la longitud de dicho elemento de línea	newton por metro	N/m

Tabla 8.- Magnitudes y unidades de mecánica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
trabajo	W, (A)	Fuerza multiplicada por el desplazamiento en la dirección de la fuerza	joule	J
energía	E			
energía potencial	E_p, V, Φ			
energía cinética	E_k, T			
potencia	P	Tasa de transferencia de energía	watt	W
gasto masa, flujo masa	q_m	Masa de materia la cual atraviesa una superficie determinada dividida por el tiempo	kilogramo por segundo	kg/s
gasto volumétrico, flujo volumétrico	q_v	Volumen de materia el cual atraviesa una superficie determnada por el tiempo	metro cúbico por segundo	m^3/s

Tabla 9.- Magnitudes y unidades de calor

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
temperatura termodinámica	T, θ	La temperatura termodinámica se define según los principios de la termodinámica	kelvin (véase Tabla 1)	K
temperatura Celsius	t, ϑ	$t = T - T_o$ Donde T_o es fijada convencionalmente como T_o = 273,15 K	grado Celsius	°C
coeficiente de dilatación lineal	α_l	$\alpha_\ell = \frac{1}{l}\frac{dl}{dT}$	kelvin recíproco	K^{-1}
coeficiente de dilatación cúbica	α_V	$\alpha_V = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT}$		
coeficiente de presión relativa	α_p	$\alpha_P = \frac{1}{p}\frac{dp}{dT}$		
coeficiente de presión	β	$\beta = dp/dt$	pascal por kelvin	Pa/K
compresibilidad isotérmica	κ_T	$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$	pascal recíproco	Pa^{-1}
compresibilidad isentrópica	κ_S	$\kappa_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S$		
calor, cantidad de calor	Q		joule	J
flujo térmico	Φ	Flujo de calor a través de una superficie	watt	W
densidad de flujo térmico	q, φ	Flujo térmico dividido por el área considerada	watt por metro cuadrado	W/m^2
conductividad térmica	λ, (x)	Densidad de flujo térmico dividido por el gradiente de temperatura	watt por metro kelvin	W/(m•K)

Tabla 9.- Magnitudes y unidades de calor
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
coeficiente de transferencia de calor	h, k, K, α	Densidad de flujo térmico dividido por la diferencia de temperaturas	watt por metro cuadrado kelvin	$W/(m^2 \bullet K)$
aislamiento térmico, coeficiente de aislamiento térmico	M	Diferencia de temperaturas dividida por la densidad de flujo térmico	metro cuadrado kelvin por watt	$(m^2 \bullet K)/W$
resistencia térmica	R	Diferencia de temperatura dividida por el flujo térmico	kelvin por watt	K/W
difusividad térmica	a	$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ donde: λ es la conductividad térmica; ρ es la densidad; c_p es la capacidad térmica específica a presión constante	metro cuadrado por segundo	m^2/s
capacidad térmica	C	Cuando la temperatura de un sistema se incremente una cantidad diferencial dT, como resultado de la adición de una pequeña cantidad de calor dQ, la magnitud dQ/dT es la capacidad térmica	joule por kelvin	J/K
capacidad térmica específica capacidad térmica específica a presión constante capacidad térmica específica a volumen constante capacidad térmica específica a saturación	c c_p c_v c_{sat}	Capacidad térmica dividida por la masa	joule por kilogramo kelvin	$J/(kg \bullet K)$

Tabla 9.- Magnitudes y unidades de calor
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
entropía	S	Cuando una cantidad pequeña de calor dQ es recibida por un sistema cuya temperatura termodinámica es T, la entropía del sistema se incrementa en dQ/T, considerando que ningún cambio irreversible tiene lugar en el sistema	joule por kelvin	J/K
entropía específica	s	Entropía dividida por la masa	joule por kilogramo kelvin	J/(kg•K)
energía interna	U, (E)		joule	J
entalpía	H, (I)	H = U + pV		
energía libre Helmholtz, función Helmholtz	A, F	A = U - TS		
energía libre Gibbs, función Gibbs	G	G = U + pV -TS G = H - TS		
energía interna específica	u, (e)	Energía interna dividida por la masa	joule por kilogramo	J/kg
entalpía específica	h	Entalpía dividida por la masa		
energía libre específica Helmholtz, función específica Helmholtz	a, f	Energía libre Helmholtz dividida por la masa		
energía libre específica Gibbs, función específica Gibbs	g	Energía libre Gibbs dividida por la masa		
función Massieu	J	J = - A/T	joule por kelvin	J/K
función Planck	Y	Y = - G/T	joule por kelvin	J/K

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
corriente eléctrica	I		ampere (ver tabla 1)	A
carga eléctrica, cantidad de electricidad	Q	Integral de la corriente eléctrica con respecto al tiempo	coulomb	C
densidad de carga densidad volumétrica de carga	ρ, (η)	Carga dividida por el volumen	coulomb por metro cúbico	C/m^3
densidad superficial de carga	σ	Carga dividida por el área superficial	coulomb por metro cuadrado	C/m^2
intensidad de campo eléctrico	E, (K)	Fuerza ejercida por un campo eléctrico sobre una carga eléctrica puntual, dividida por el valor de la carga	volt por metro	V/m
potencial eléctrico	V, φ	Para campos electrostáticos, una magnitud escalar, en la cual el gradiente tiene signo contrario y es igual al valor de la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,V$	volt	V
diferencia de potencial, tensión eléctrica	U, (V)	La tensión entre dos puntos 1 y 2 es la integral de línea desde el punto 1 hasta el punto 2 de la intensidad de campo eléctrico $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_s\,ds$		
fuerza electromotriz	E	La fuerza electromotriz de una fuente es la energía suministrada por la fuente dividida por la carga eléctrica que pasa a través de la fuente		
densidad de flujo eléctrico, desplazamiento	D	La densidad de flujo eléctrico es una magnitud vectorial, cuya divergencia es igual a la densidad de la carga	coulomb por metro cuadrado	C/m^2
flujo eléctrico, (flujo de desplazamiento)	ψ	El flujo eléctrico a través de un elemento de superficie es el producto escalar del elemento de superficie y la densidad de flujo eléctrico	coulomb	C
capacitancia	C	Carga dividida por la diferencia de potencial eléctrico	farad	F

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
permitividad permitividad del vacío, constante eléctrica	ε ε_0	Densidad de flujo eléctrico dividido por la intensidad de campo eléctrico $\varepsilon_0 = 1 / (\mu_0 c_0^2)$ $\varepsilon_0 = 8{,}854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$ F/m	farad por metro	F/m
permitividad relativa	ε_T	$\varepsilon_T = \varepsilon / \varepsilon_0$	uno	1
susceptibilidad eléctrica	χ , χ_e	$\chi = \varepsilon_T - 1$	uno	1
polarización eléctrica	P	$P = D - \varepsilon_0 E$	coulomb por metro cuadrado	C/m^2
momento dipolo eléctrico	p, (p_e)	El momento dipolo eléctrico es una magnitud vectorial, cuyo producto vectorial con la intensidad de campo eléctrico es igual al momento torsional	coulomb metro	C•m
densidad de corriente	J, (S)	Es una magnitud vectorial cuya integral evaluada para una superficie especificada, es igual a la corriente total que circula a través de dicha superficie	ampere por metro cuadrado	A/m^2
densidad lineal de corriente	A, (α)	Corriente dividida por el espesor de la placa conductora	ampere por metro	A/m
intensidad de campo magnético	H	La intensidad de campo magnético es una magnitud vectorial axial cuya rotacional es igual a la densidad de corriente, incluyendo a la corriente de desplazamiento	ampere por metro	A/m
diferencia de potencial magnético fuerza magnetomotriz corriente totalizada	U_m F, F_m Θ	La diferencia de potencial magnético entre el punto y el punto 2 es igual a la integral de línea, desde el punto 1 hasta punto 2 de la intensidad de campo magnético a lo largo de su trayectoria. $F = \oint H \bullet dr$ Corriente eléctrica neta de conducción neta a través de un bucle cerrado	ampere	A

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
densidad de flujo magnético, inducción magnética	B	La densidad de flujo magnético es una magnitud vectorial axial tal que la fuerza ejercida sobre un elemento de corriente, es igual al producto vectorial de este elemento y la densidad de flujo magnético	tesla	T
flujo magnético	Φ	El flujo magnético que atraviesa un elemento de superficie es igual al producto escalar del elemento de superficie y la densidad de flujo magnético	weber	Wb
potencial vectorial magnético	A	El potencial vectorial magnético es una magnitud vectorial, cuya rotacional es igual a la densidad de flujo magnético	weber por metro	Wb/m
autoinductancia inductancia mutua	L M, L_{12}	En una espiral conductora, es igual al flujo magnético de la espiral, causada por la corriente que circula a través de ella, dividido por esa corriente En dos espirales conductoras es el flujo magnético a través de una espiral producido por la corriente circulante en la otra espiral dividido por el valor de esta corriente	henry	H
coeficiente de acoplamiento coeficiente de dispersión	k, (x) σ	$k = \lvert L_{12} \rvert / \sqrt{L_{12}}$ $\sigma = 1 - k^2$	uno	1
permeabilidad permeabilidad del vacío, constante magnética	μ μ_0	Densidad de flujo magnético, dividida por la intensidad de campo magnético $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m $\mu_0 = (12{,}566\ 370\ 614) \times 10^{-7}$ H/m	henry por metro	H/m
permeabilidad relativa	μ_r	$\mu_r = \mu / \mu_0$	uno	1
susceptibilidad magnética	x, (χ_m)	$x = \mu_r - 1$	uno	1

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
momento electromagnético (momento magnético)	m	El momento electromagnético es una magnitud vectorial, cuyo producto vectorial con la densidad del flujo magnético es igual al momento torsional	ampere metro cuadrado	$A \bullet m^2$
magnetización	M, (H_j)	$M = (B/\mu_0) - H$	ampere por metro	A/m
polarización magnética	J, (B_j)	$J = B - \mu_0 H$	tesla	T
densidad de energía electromagnética	w	Energía del campo electromagnético dividida por el volumen	joule por metro cúbico	J/m^3
vector de Poynting	S	El vector de Poynting es igual al producto vectorial de la intensidad de campo eléctrico y la intensidad de campo magnético	watt por metro cuadrado	W/m^2
velocidad de propagación de ondas electromagnéticas en el vacío	c_o	$c_o = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}}$ c_o = 299 792 458 m/s	metro por segundo	m/s
resistencia (a la corriente continua)	R	La diferencia de potencial eléctrico dividida por la corriente, cuando no existe fuerza electromotriz en el conductor	ohm	Ω
conductancia (a la corriente continua)	G	G = 1/R	siemens	S
potencia (a la corriente continua)	P	P = UI	watt	W
resistividad	ρ	Intensidad de campo eléctrico dividido por la densidad de corriente cuando no existe fuerza electromotriz dentro del conductor	ohm metro	Ω•m
conductividad	γ, σ	γ = 1/ρ el símbolo κ se utiliza en electroquímica	siemens por metro	S/m
reluctancia	R, R_m	Diferencia de potencial magnético dividido por el flujo magnético	henry a la menos uno	H^{-1}
permeancia	Λ, (P)	$\Lambda = 1/R_m$	henry	H

Tabla 10. - Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
diferencia de fase desplazamiento de fase	φ	Cuando $u = u_m \cos \omega t$ e $i = i_m \cos(\omega t - \varphi)$ φ es el desplazamiento de fase	radian uno	rad 1
impedancia, (impedancia compleja) módulo de impedancia (impedancia)	Z IZI	La representación compleja de la diferencia de potencial, dividida por la representación compleja de la corriente $\|Z\| = \sqrt{R^2 + X^2}$	ohm	Ω
reactancia resistencia resistencia (en corriente alterna)	X R R	Parte imaginaria de la impedancia $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ La diferencia de potencial eléctrico dividido por la corriente, cuando no haya fuerza electromotriz en el conductor (véase resistencia a la corriente continua) Parte real de la impedancia	ohm	Ω
factor de calidad	Q	Para un sistema no radiante si Z = R + jX entonces: Q = IXI / R	uno	1
admitancia (admitancia compleja) módulo de admitancia (admitancia) susceptancia conductancia	Y IYI B G	Y = 1/ Z $IYI = \sqrt{G^2 + B^2}$ Parte imaginaria de la admitancia Parte real de la admitancia (véase conductancia a la corriente continua)	siemens	S

Tabla 10.- Magnitudes y unidades de electricidad y magnetismo
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
potencia activa o potencia instantánea	P	Producto de la corriente y la diferencia de potencial $P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt$ Cuando: $u = u_m \cos \omega t = \sqrt{2}\ U \cos \omega t$ e $i = i_m \cos (\omega t - \varphi) = \sqrt{2}\ I \cos (\omega t - \varphi)$ se tiene que: iu, es la potencia instantánea (símbolo p) IU cos φ, es la potencia activa (símbolo P)	watt	W
potencia aparente	S (P_S)	IU es la potencia aparente	voltampere	VA
potencia reactiva	Q (P_Q)	IU sen φ es la potencia reactiva	var	var
factor de potencia	λ	El nombre "factor de potencia" (símbolo λ) se usa para la relación P/S	uno	1

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
frecuencia	f, v	Número de ciclos dividido por el tiempo	hertz	Hz
frecuencia circular	ω	$\omega = 2\pi f$	segundo recíproco	s^{-1}
longitud de onda	λ	La distancia en la dirección de propagación de una onda periódica entre dos puntos sucesivos cuya fase es la misma	metro	m
número de onda número de onda circular	σ k	$\sigma = 1/\lambda$ $k = 2\pi\sigma$	metro recíproco	m^{-1}
velocidad de propagación de ondas electromagnéticas en el vacío	c, c_0	c = 299 792 458 m/s	metro por segundo	m/s
energía radiante	Q, W (U, Q_e)	Energía emitida, transferida o recibida como radiación	joule	J
densidad de energía radiante	w, (u)	Energía radiante en un elemento de volumen, dividido por ese elemento	joule por metro cúbico	J/m^3
concentración espectral de densidad de energía radiante (en términos de longitud de onda)	w_λ	La densidad de energía radiante en un intervalo infinitesimal de longitud de onda, dividido por el alcance de ese intervalo	joule por metro a la cuarta potencia	J/m^4
potencia radiante, flujo de energía radiante	P, Φ, (Φ_e)	Potencia emitida, transferida o recibida como radiación	watt	W
densidad de flujo radiante, razón de flujo de energía radiante	φ, ψ	En un punto en el espacio, el flujo de energía radiante incidente sobre una esfera pequeña, dividida por el área de la sección transversal de esa esfera	watt por metro cuadrado	W/m^2
intensidad radiante	I, (I_e)	Para una fuente en una dirección determinada, la potencia radiante que fluye hacia el exterior de la fuente o un elemento de la fuente, en un elemento de ángulo sólido que contenga a la dirección dada, dividida por dicho elemento de ángulo sólido	watt por esterradián	W/sr
radiancia	L, (L_e)	En un punto de una superficie y en una dirección determinada, la intensidad radiante de un elemento de esa superficie, dividida por el área de la proyección ortogonal de dicho elemento sobre un plano perpendicular a la dirección dada	watt por esterradián metro cuadrado	$W/(sr \bullet m^2)$

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
excitancia radiante	M, (M_e)	En un punto de una superficie, el flujo de energía radiante que fluye hacia el exterior de un elemento de esa superficie, dividido por el área de dicho elemento	watt por metro cuadrado	W/m^2
irradiancia	E, (E_e)	En un punto de una superficie, el flujo de energía radiante que incide sobre un elemento de esa superficie, dividida por el área de dicho elemento	watt por metro cuadrado	W/m^2
constante de Stefan Boltzmann	σ	La constante σ en la expresión para la excitancia radiante de un radiador total (cuerpo negro), a la temperatura termodinámica T. $M = \sigma \bullet T^4$	watt por metro cuadrado kelvin a la cuarta potencia	$W/(m^2 \bullet k^4)$
primera constante de radiación	c_1	Las constantes c_1 y c_2 en la expresión para la concentración espectral de la excitancia radiante de un radiador total a la temperatura termodinámica T: $$M_\lambda = c_1 f(\lambda, T) = c_1 \frac{\lambda^{-5}}{\exp(c_2 / \lambda T) - 1}$$ $c_1 = 2\pi hc^2$ $c_2 = hc / k$	watt metro cuadrado	$W \bullet m^2$
segunda constante de radiación	c_2		metro kelvin	$m \bullet K$
emisividad	ε	Relación de la excitancia radiante de un radiador térmico a la de un radiador total (cuerpo negro) a la misma temperatura	uno	1
emisividad espectral, emisividad a una longitud de onda específica	ε(λ)	Relación de la concentración espectral de la excitancia radiante de un radiador térmico a la de un radiador total (cuerpo negro) a la misma temperatura		
emisividad espectral direccional	ε(λ, ϑ, φ)	Relación de la concentración espectral de radiancia en una dirección dada ϑ, φ, de un radiador térmico a la de un radiador total (cuerpo negro) a la misma temperatura		
intensidad luminosa	I, (I_V)		candela (véase Tabla 1)	cd

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
flujo luminoso	ϕ, (ϕ_V)	El flujo luminoso $d\phi$ de una fuente de intensidad luminosa I dentro de un elemento de ángulo sólido $d\Omega$ es: $d\phi = I\, d\Omega$	lumen	lm
cantidad de luz	Q, (Q_V)	Integral en función del tiempo del flujo luminoso	lumen segundo	lm•s
luminancia	L, (L_V)	La luminancia un punto de una superficie y en una dirección dada, se define como la intensidad luminosa de un elemento de esa superficie, dividida por el área de la proyección ortogonal de este elemento sobre un plano perpendicular a la dirección considerada	candela por metro cuadrado	cd/m
excitancia luminosa	M, (M_V)	La excitancia luminosa en un punto de una superficie, se define como el flujo luminoso que fluye hacia el exterior de un elemento de la superficie, dividido por el área de ese elemento	lumen por metro cuadrado	lm/m^2
luminosidad (iluminancia)	E, (E_V)	La luminosidad en un punto de una superficie, se define como el flujo luminoso que incide sobre un elemento de la superficie dividido por el área de ese elemento	lux	lx
exposición de luz	H	$H = \int E dt$	lux segundo	lx•s
eficacia luminosa	K	$K = \frac{\phi_v}{\phi_e}$	lumen por watt	lm/W
eficacia espectral luminosa, eficacia luminosa a una longitud de onda específica	K(λ)	$K(\lambda) = \frac{\phi_{v\lambda}}{\phi_{e\lambda}}$		
eficacia luminosa espectral máxima	K_m	El valor máximo de K(λ)		

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
eficiencia luminosa	V	$V = \frac{K}{K_m}$	uno	1
eficiencia luminosa espectral, eficiencia luminosa a una longitud de onda específicada	$V(\lambda)$	$V(\lambda) = \frac{K(\lambda)}{K_m}$		
valores triestímulos espectrales CIE	$\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)$	Valores triestímulos de las componentes espectrales de un estímulo equienergético en el sistema tricomático (XYZ). Estas funciones son aplicables a campos observación entre 1° y 4°. En este sistema: $\bar{y}(\lambda) \overset{def}{=} V(\lambda)$	uno	1
coordenadas de cromaticidad	x, y, z	Para luz cuya concentración espectral de flujo radiante sea $X = \frac{\int \varphi(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda}{\int \varphi(\lambda)\bar{x}(\lambda)d\lambda + \int \varphi(\lambda)\bar{y}(\lambda)d\lambda + \int \varphi(\lambda)\bar{z}(\lambda)d\lambda}$ Análogamente se definen expresiones para y y z. Para fuentes de luz $\varphi(\lambda) = \phi_{e\lambda}(\lambda) / \phi_{e\lambda}(\lambda_0)$ (flujo radiante espectral relativo) Para colores de objetos se calcula por uno de los tres productos $\varphi(\lambda) = \frac{\phi_{e\lambda}(\lambda)}{\phi_{e\lambda}(\lambda_o)} * \begin{Bmatrix} \rho(\lambda) \\ \tau(\lambda) \\ \beta(\lambda) \end{Bmatrix}$	uno	1

Tabla 11.- Magnitudes y unidades de luz y radiaciones electromagnéticas
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
absorbancia espectral	$\alpha(\lambda)$	Relación de las concentraciones espectrales de los flujos radiantes absorbido e incidente	uno	1
reflectancia espectral	$\rho(\lambda)$	Relación de las concentraciones espectrales de los flujos radiantes reflejado e incidente		
transmitancia espectral	$\tau(\lambda)$	Relación de las concentraciones espectrales de los flujos radiantes transmitido e incidente	uno	1
coeficiente de radiancia espectral	$\beta(\lambda)$	El factor de radiancia espectral en un punto de una superficie y en una dirección dada, es el cociente entre las concentraciones espectrales de radiancia de un cuerpo no radiante por sí mismo y de un difusor perfecto, igualmente irradiados		
coeficiente de atenuación lineal, coeficiente de extinción lineal	μ	La disminución relativa en la concentración espectral del flujo luminoso o radiante de un haz colimado de radiación electromagnética al cruzar un medio laminar de espesor infinitesimal, dividida por la longitud atravesada	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de absorción lineal	a	La parte del coeficiente de atenuación debida a la absorción		
coeficiente de absorción molar	x	x = a / c donde c es la concentración de cantidad de sustancia	metro cuadrado por mol	m^2/mol
índice de refracción	n	El índice de refracción de un medio no absorbente para una radiación electromagnética de frecuencia dada, es la relación entre la velocidad de las ondas (o de la radiación) en el vacío a la velocidad de fase en el medio	uno	1

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
período, tiempo periódico	T	Tiempo de un ciclo	segundo	s
frecuencia	f, v	$f = 1 / T$	hertz	Hz
intervalo de frecuencia		El intervalo de frecuencia entre dos tonos es el logaritmo de la relación entre la frecuencia más alta y la frecuencia más baja	octava*	
frecuencia angular frecuencia circular, pulsantancia	ω	$\omega = 2\pi f$	segundo recíproco	s^{-1}
longitud de onda	λ		metro	m
número de onda circular	k	$k = 2\pi/\lambda = 2\pi\sigma$ donde $\sigma = 1/\lambda$	metro recíproco	m^{-1}
densidad	ρ	Masa dividida por el volumen	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
presión estática presión acústica	Ps p, (p_a)	Presión que existiría en ausencia de ondas sonoras La diferencia entre la presión total instantánea y la presión estática	pascal	Pa
desplazamiento de una partícula de sonido	ξ, ($\times$)	Desplazamiento instantáneo de una partícula del medio, referido a la posición que ocuparía en ausencia de ondas sonoras	metro	m
velocidad de una partícula de sonido	u, v	$u = \partial\xi / \partial t$	metro por segundo	m/s
aceleración de una partícula de sonido	a	$a = \partial u / \partial t$	metro por segundo al cuadrado	m/s^2
gasto volumétrico, velocidad del volumen	q, U	Razón instantánea de flujo de volumen debido a la onda sonora	metro cúbico por segundo	m^3/s

*** Esta unidad no es del SI pero se acepta temporalmente su uso con el SI**

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
velocidad del sonido	c, (c_a)	Velocidad de una onda sonora	metro por segundo	m/s
densidad de energía del sonido	w, (w_a), (e)	La energía de sonido promedio en un volumen dado, dividida por dicho volumen	joule por metro cúbico	J/m^3
flujo de energía del sonido, potencia del sonido	P, (Pa)	Energía del sonido transferida en un cierto intervalo de tiempo, dividida por la duración de ese intervalo	watt	W
intensidad del sonido	I, J	Para flujo unidireccional de energía de sonido, el flujo de energía de sonido a través de una superficie normal a la dirección de propagación, dividido por el área de esa superficie	watt por metro cuadrado	W/m^2
impedancia característica de un medio impedancia acústica específica	Z_C Z_S	Para un punto en un medio y una onda progresiva plana, la representación compleja de la presión de sonido dividida por la representación compleja de la velocidad de partícula En una superficie, la representación compleja de la presión de sonido dividida por la representación compleja de la velocidad de partícula	pascal segundo por metro	Pa•s/m
impedancia acústica	Z_a	En una superficie, la representación compleja de la presión de sonido dividida por la representación compleja de la razón de flujo de volumen	pascal segundo por metro cúbico	$Pa•s/m^3$
impedancia mecánica	Z_m	La representación compleja de la fuerza total aplicada a una superficie (o a un punto) de un sistema mecánico, dividida por la representación compleja de la velocidad promedio de la partícula en esa superficie (o de la velocidad de la partícula en ese punto) en la dirección de la fuerza	newton segundo por metro	N•s/m
nivel de presión acústica	L_p	$L_p = \ln (p/p_0) = \ln 10 \bullet \lg (p/p_0)$ donde p es el valor cuadrático medio de la presión acústica y el valor de referencia p_0 es igual a 20 µPa	decibel	dB

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
nivel de potencia acústica	L_W	$L_W = ½ \ln(P/P_0) = ½ \ln 10 \bullet \lg(P/P_0)$ donde P es el valor cuadrático de la potencia acústica y la potencia de referencia es igual a 1 pW	decibel	dB
coeficiente de amortiguamiento	δ	Si una magnitud es una función del tiempo t, dada por: $F(t) = Ae^{-\delta t} \cdot \cos[\omega(t - t_0)]$ entonces δ es el coeficiente de amortiguamiento	segundo recíproco	s^{-1}
constante de tiempo, tiempo de relajación	τ	$\tau = 1 / \delta$ donde δ es el coeficiente de amortiguamiento	segundo	s
decrecimiento logarítmico	Λ	Producto del coeficiente de amortiguamiento por el período	néper	Np
coeficiente de atenuación	α	Si una magnitud es una función de la distancia x y está dada por: $F(x) = Ae^{-\alpha x} \cos[\beta(x - x_0)]$ entonces α es el coeficiente de atenuación y β es el coeficiente de fase	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de fase	β		metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de propagación	γ	$\gamma = \alpha + j\beta$		
coeficiente de disipación	δ, (ψ)	Relación entre el flujo de energía acústica disipado y el flujo de energía acústica incidente	uno	1
coeficiente de reflexión	r, ρ	Relación entre el flujo de energía acústica reflejado y el flujo de energía acústica incidente		
coeficiente de transmisión	τ	Relación entre el flujo de energía acústica transmitido y el flujo de energía acústica incidente		
coeficiente de absorción acústica	α, (α_a)	$\alpha = \delta + \tau$		

Tabla 12.– Magnitudes y unidades de acústica
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
índice de reducción acústica, pérdida de transmisión acústica	R	$R = ½ \ln(1/\tau) = ½ \ln 10 \bullet \lg(1/\tau)$ en donde τ es el coeficiente de transmisión	decibel	dB
área de absorción equivalente de una superficie u objeto	A	Es el área de una superficie que tiene un coeficiente de absorción igual a 1, y que absorbe la misma potencia en el mismo campo sonoro difuso, considerando los efectos de la difracción como despreciables	metro cuadrado	m^2
tiempo de reverberación	T	El tiempo que se requiere para que la densidad de energía de sonido promedio dentro de un recinto cerrado disminuya hasta 10^{-6} veces su valor inicial (o sea 60 dB), después de que la fuente ha dejado de producir ondas sonoras	segundo	s
nivel de sonoridad	L_N	El nivel de sonoridad, en un punto de un campo sonoro, viene definido por: $L_N = \ln\left(\frac{P_{eff}}{P_o}\right)_{1kHz} = \ln 10 \bullet \lg\left(\frac{P_{eff}}{P_o}\right)$ en donde P_{eff} es la presión acústica eficaz (valor cuadrático medio) de un tono puro normalizado de 1 kHz, que un observador normal en condiciones de escucha normalizada juzga igualmente sonoro que el campo considerado, siendo $P_0 = 20\ \mu Pa$	fon*	
sonoridad	N	La sonoridad es la estimación auditiva de un observador normal de la relación entre la intensidad del sonido considerado y el de un sonido de referencia que tiene un nivel de sonoridad de 40 fons	son*	

*** Estas no son unidades del SI pero se acepta temporalmente su uso.**

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
cantidad de sustancia	n, (v)		mol (véase tabla 1)	mol
constante de Avogadro	L, N_A	Número de moléculas dividido por la cantidad de sustancia $N_A = N/n = (6{,}022\ 141\ 99 \pm 0{,}000\ 000\ 47)\ 10^{23}\ mol^{-1}$	mol recíproco	mol^{-1}
masa molar	M	Masa dividida por la cantidad de sustancia	kilogramo por mol	kg/mol
volumen molar	V_m	Volumen dividido por la cantidad de sustancia	metro cúbico por mol	m^3/mol
energía interna molar	U_m	Energía interna dividida por la cantidad de sustancia	joule por mol	J/mol
capacidad térmica molar	C_m	Capacidad térmica dividida por la cantidad de sustancia	joule por mol kelvin	J/(mol·K)
entropía molar	S_m	Entropía dividida por la cantidad de sustancia	joule por mol kelvin	J/(mol·K)
densidad numérica de moléculas concentración molecular de la sustancia B	n C_B	El número de moléculas o partículas dividido por el volumen El número de moléculas de la sustancia B dividido por el volumen de la mezcla	metro cúbico recíproco	m^{-3}
densidad concentración en masa de la sustancia B	ρ ρ_B	Masa dividida por el volumen Masa de la sustancia B dividida por el volumen de la mezcla	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
concentración de la sustancia B, concentración de la cantidad de la sustancia del componente B	c_B	Cantidad de sustancia de componente B dividida por el volumen de la mezcla	mol por metro cúbico	mol/m^3

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
molalidad de la sustancia soluto B	b_B, m_B	La cantidad de sustancia de soluto de la sustancia B en una solución dividida por la masa del solvente	mol por kilogramo	mol/kg
potencial químico de la sustancia B	μ_B	Para una mezcla con sustancias componentes B, C, . . ., $\mu_B = (\partial G/\partial n_B)_{T, p, nC, \ldots,}$ donde n_B es la cantidad de la sustancia B; y G es la función Gibbs	joule por mol	J/mol
presión parcial de la sustancia B (en una mezcla gaseosa)	p_B	Para una mezcla gaseosa, $p_B = x_B \bullet p$ donde p es la presión	pascal	Pa
fugacidad de la sustancia B (en una mezcla gaseosa)	P_B, f_B	Para una mezcla gaseosa, f_B es proporcional a la actividad absoluta B. El factor de proporcionalidad, que es función únicamente de la temperatura queda determinado por la condición de que a temperatura y composición constantes p_B/p_B tiende a 1 para un gas infinitamente diluido	pascal	Pa
presión osmótica	Π	El exceso de presión que se requiere para mantener el equilibrio osmótico entre una solución y el disolvente puro, separados por una membrana permeable sólo para el disolvente	pascal	Pa
afinidad (de una reacción química)	A	$A = -\Sigma v_B \bullet \mu_B$	joule por mol	J/mol
masa de una molécula	m		kilogramo	kg
momento dipolo eléctrico de una molécula	ρ, μ	El momento de dipolo eléctrico de una molécula es una magnitud vectorial cuyo producto vectorial con la intensidad de campo eléctrico es igual al par	coulomb metro	C•m
polarizabilidad eléctrico de una molécula	α	Momento de dipolo eléctrico inducido dividido por la intensidad de campo eléctrico	coulomb metro cuadrado por volt	$C \bullet m^2/V$

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
constante molar de los gases	R	La constante universal de proporcionalidad en la ley de un gas ideal $pV_m = RT$ R = (8,314 472 ± 0,000 015) J/(mol•K)	joule por mol kelvin	J/mol•K
constante de Boltzmann	k	$k = R / N_A$ k = (1,380 650 3 ± 0,000 002 4) $\times 10^{-23}$ J/K	joule por kelvin	J/K
trayectoria libre media	l , λ	Para una molécula, la distancia promedio entre dos colisiones sucesivas	metro	m
coeficiente de difusión	D	$C_B (v_B) = - D$ **grad** C_B donde C_B es la concentración molecular local del constituyente B en la mezcla y (v_B) es la velocidad media local de las moléculas de B	metro cuadrado por segundo	m^2/s
coeficiente de difusión térmica	D_T	$D_T = k_T \bullet D$	metro cuadrado por segundo	m^2/s
número atómico	Z	Número de protones contenidos en el núcleo de un elemento químico		
carga elemental	e	La carga eléctrica de un protón La carga eléctrica de un electrón es igual a "-e" e = (1,602 176 462 ± 0,000 000 063) $\times 10^{-19}$ C	coulomb	C
número de carga de un ion, electrovalencia	z	Coeficiente entre la carga de un ion y la carga elemental	uno	1
constante de Faraday	F	$F = N_A e$ F = (96 485,341 5 ± 0,003 9) C/mol	coulomb por mol	C/mol

Tabla 13.– Magnitudes y unidades de físico-química y físico-moelcular
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
fuerza iónica	I	La fuerza iónica de una solución de define como $I = (1/2)\ \Sigma z_i^2 m_i$ donde la sumatoria incluye a todos los iones con molalidad m_i	mol por kilogramo	mol/kg
Conductividad electrolítica	x , σ	La densidad de corriente electrolítica dividida por la intensidad de campo eléctrico	siemens por metro	S/m
conductividad molar	Λ_m	Conductividad dividida por la concentración	siemens metro cuadrado por mol	$S \bullet m^2/mol$

Anexo A

Nombres y símbolos de los elementos químicos

Número atómico	Nombre	Símbolo
1	hidrógeno	H
2	helio	He
3	litio	Li
4	berilio	Be
5	boro	B
6	carbono	C
7	nitrógeno	N
8	oxígeno	O
9	flúor	F
10	neón	Ne
11	sodio	Na
12	magnesio	Mg
13	aluminio	Al
14	silicio	Si
15	fósforo	P
16	azufre	S
17	cloro	Cl
18	argón	Ar
19	potasio	K
20	calcio	Ca
21	escandio	Sc
22	titanio	Ti
23	vanadio	V
24	cromo	Cr
25	manganeso	Mn
26	hierro	Fe
27	cobalto	Co
28	níquel	Ni
29	cobre	Cu
30	zinc, cinc	Zn
31	galio	Ga

Número atómico	Nombre	Símbolo
32	germanio	Ge
33	arsénico	As
34	selenio	Se
35	bromo	Br
36	criptón	Kr
37	rubidio	Rb
38	estroncio	Sr
39	ytrio	Y
40	circonio	Zr
41	niobio	Nb
42	molibdeno	Mo
43	tecnecio	Tc
44	rutenio	Ru
45	rodio	Rh
46	paladio	Pd
47	plata	Ag
48	cadmio	Cd
49	indio	In
50	estaño	Sn
51	antimonio	Sb
52	teluro, telurio	Te
53	yodo	I
54	xenón	Xe
55	cesio	Cs
56	bario	Ba
57	lantano	La
58	cerio	Ce
59	praseodimio	Pr
60	neodimio	Nd
61	prometio	Pm
62	samario	Sm
63	europio	Eu

Anexo A

Nombres y símbolos de los elementos químicos
(continuación)

Número atómico	Nombre	Símbolo
64	gadolinio	Gd
65	terbio	Tb
66	disprosio	Dy
67	holmio	Ho
68	erbio	Er
69	tulio	Tm
70	iterbio	Yb
71	lutecio	Lu
72	hafnio	Hf
73	tántalo, tantalio	Ta
74	volframio, wolframio	W
75	renio	Re
76	osmio	Os
77	iridio	Ir
78	platino	Pt
79	oro	Au
80	mercurio	Hg
81	talio	Tl
82	plomo	Pb
83	bismuto	Bi
84	polonio	Po
85	ástato	At
86	radón	Rn
87	francio	Fr

Número atómico	Nombre	Símbolo
88	radio	Ra
89	actinio	Ac
90	torio	Th
91	protactinio	Pa
92	uranio	U
93	neptunio	Np
94	plutonio	Pu
95	americio	Am
96	curio	Cm
97	berquelio	Bk
98	californio	Cf
99	einstenio	Es
100	fermio	Fm
101	mendelevio	Md
102	nobelio	No
103	lawrencio	Lr
104	unilquadio	Unq
105	unilpentio	Unp
106	unilexhio	Unh
107	unilseptio	Uns
108	uniloctio	Uno
109	unilenio	Une
110	ununilio	Uun
111	unununio	Uuu

Anexo B

Símbolo de los elementos químicos y de los nuclidos

Los símbolos de los elementos químicos deben escribirse en caracteres rectos. El símbolo no va seguido de punto.

Ejemplos: H He C Ca

Los subíndices o superíndices que afectan al símbolo de los nuclidos o moléculas, deben tener los siguientes significados y posiciones:

El número másico de un nuclido se coloca como superíndice izquierdo; por ejemplo:

^{14}N

El número de átomos de un nuclido en una molécula se coloca en la posición del subíndice derecho; por ejemplo:

$^{14}N_2$

El número atómico puede colocarse en la posición de subíndice izquierdo; por ejemplo:

$_{64}Gd$

Cuando sea necesario, un estado de ionización o un estado excitado puede indicarse mediante un superíndice derecho.

Ejemplos:

Estado de ionización:	Na^+ , PO_4^{3-} o $(PO_4)^{3-}$
Estado electrónico excitado.	He* , NO*
Estado nuclear excitado:	$^{110}Ag^*$ o bien $^{110}Ag^m$

Anexo C

pH

El pH se define operacionalmente. Para una disolución X, se mide la fuerza electromotriz E_X de la pila galvánica.

electrodo de referencia | disolución concentrada de KCl | disolución X | H_2 | Pt

y, análogamente, se mide la fuerza electromotriz de una pila galvánica que difiere de la anterior únicamente en la sustitución de la disolución X de pH desconocido, designado por pH(X), por una disolución patrón S, cuyo pH es pH(S). En estas condiciones,

$$pH(X) = pH(S) + (E_S - E_X)F / (RT \ln 10).$$

El pH así definido carece de dimensiones.

El Manual de la IUPAC sobre los símbolos y la terminología para las magnitudes y unidades de química física (1997) da los valores de pH(S) para varias disoluciones patrón.

El pH no tiene un significado fundamental; su definición es una definición práctica. Sin embargo, en el intervalo restringido de disoluciones acuosas diluidas que tienen concentraciones en cantidad de sustancia inferiores a 0,1 mol/dm^3 y no son ni fuertemente ácidas ni fuertemente alcalinas ($2 < pH < 12$), la definición es tal que,

$$pH = -\lg[c(H^+)y_1 / (mol.dm^{-3})] \pm 0{,}02$$

donde $c(H^+)$ indica la concentración en cantidad de sustancia del ion hidrógeno H^+ e y_1 indica el coeficiente de actividad de un electrólito monovalente típico en la disolución.

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
número atómico, número protónico	Z	Número de protones contenidos en el núcleo de un elemento químico	uno	1
número neutrónico	N	Número de neutrones contenidos en el núcleo de un nuclido	uno	1
número nucleónico número másico	A	Número de nucleones contenidos en el núcleo de un nuclido	uno	1
masa del átomo, masa nuclídica	m_a, m(X)	Masa en reposo de un átomo en estado fundamental Para el ^{1}H $m(^1H) = (1{,}673\,534\,0 \pm 0{,}000\,001\,0) \times 10^{-27}$ kg $= (1{,}007\,825\,048 \pm 0{,}000\,000\,012)$ u*	kilogramo unidad de masa atómica (unificada)	kg u*
constante de masa atómica (unificada)	m_u	1/12 de la masa en reposo de un átomo neutro del nuclido ^{12}C en el estado fundamental $m_u = (1{,}660\,540\,2 \pm 0{,}000\,001\,0) \times 10^{-27}$ kg = 1 u* m_a / m_u = se llama masa nuclídica relativa		
masa (en reposo) del electrón	m_e	$m_e = (9{,}109\,381\,88 \pm 0{,}000\,000\,72) \times 10^{-31}$ kg	kilogramo	kg
masa (en reposo) del protón	m_p	$m_p = (1{,}672\,621\,58 \pm 0{,}000\,000\,13) \times 10^{-27}$ kg		
masa (en reposo) del neutrón	m_n	$m_n = (1{,}674\,927\,16 \pm 0{,}000\,000\,13) \times 10^{-27}$ kg		
carga elemental	e	La carga eléctrica de un protón es: $e = (1{,}602\,176\,462 \pm 0{,}000\,000\,49) \times 10^{-19}$ C	coulomb	C

*** Esta unidad no es del SI pero se permite su uso temporalmente.**

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
constante de Plank	h	Cuanto elemental de acción $h = (6{,}626\ 068\ 76 \pm 0{,}000\ 000\ 52) \times 10^{-34}$ J•s $\hbar = h/2\pi$	joule segundo	J•s
radio de Bohr	a_0	$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ $a_0 = (0{,}529\ 177\ 2083 \pm 0{,}000\ 000\ 001924) \times 10^{-10}$ m	metro	m
constante de Rydberg	R_∞	$R_\infty = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_0 hc}$ $= (10\ 973\ 731{,}\ 568\ 549 \pm 0{,}000\ 083)$ m^{-1}	metro recíproco	m^{-1}
energía de Hartree	E_h	$E_h = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} = 2R_\infty \bullet hc$ $= (4{,}359\ 743\ 81 \pm 0{,}000\ 000\ 34) \times 10^{-18}$ J	joule	J
momento magnético de una partícula o núcleo	μ	Valor medio del componente electromagnético en la dirección del campo magnético en el estado cuántico correspondiente al número cuántico magnético máximo	ampere metro cuadrado	A•m^2
magnetón de Bohr	μ_B	$\mu_B = eh/2m_e$ $= (9{,}274\ 015\ 4 \pm 0{,}000\ 003\ 1) \times 10^{-24}$ A•m^2		
magnetón nuclear	μ_N	$\mu_N = eh/2m_p = (m_e/m_p)\mu_B$ $= (5{,}050\ 786\ 6 \pm 0{,}000\ 0001\ 7) \times 10^{-27}$ A•m^2		
coeficiente giromagnético (razón giromagnética)	γ	$\gamma = \frac{\mu}{Jh}$ en donde J es el número cuántico del momento angular	ampere metro cuadrado por joule segundo	A•m^2/(J•s)

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
factor g del átomo o del electrón	g	$\gamma = -g \frac{\mu_B}{h} = -g \frac{e}{2m_e}$	uno	1
factor g del núcleo o de la partícula nuclear	g	$\gamma = g \frac{\mu_N}{h} = g \frac{e}{2m_p}$		
frecuencia angular de Larmor (frecuencia circular de Larmor)	ω_L	$\omega_L = \frac{e}{2m_e} B$ donde B es la densidad de flujo magnético	radian por segundo	rad/s
frecuencia angular de precesión nuclear	ω_N	$\omega_N = \gamma B$	segundo recíproco	s^{-1}
frecuencia angular ciclotrónica (frecuencia circular ciclotrónica)	ω_C	$\omega_c = \frac{q}{m} B$ donde: q/m es la razón de carga a la masa de la partícula B es la densidad de flujo magnético	segundo recíproco	s^{-1}
momento cuadrupolar nuclear	Q	Valor esperado de la magnitud $(1/e)\int\left(3z^2 - r^2\right) \bullet \rho(x, y, z)dV$ en el estado cuántico con el espín nuclear en la dirección (z) del campo; ρ(x, y, z) es la densidad de carga nuclear y "e" es la carga elemental	metro cuadrado	m^2
radio nuclear	R	El radio promedio del volumen en el que la materia nuclear es incluida	metro	m

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
número cuántico de momento angular orbital, número cuántico secundario, número cuántico acimutal	l_i, L		uno	1
número cuántico de espín	s_i, S		uno	1
número cuántico de espín total	j_i, J		uno	
número cuántico de espín nuclear	I		uno	1
número cuántico de estructura hiperfina	F		uno	1
número cuántico principal	n		uno	1
número cuántico magnético	m_i, M		uno	1
radio del electrón	r_e	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2}$ $= 2{,}817\ 940\ 92 \pm 0{,}000\ 000\ 38\ 1 \times 10^{-15}$ m	metro	m
longitud de onda de Comptón	λ_C	$\lambda_C = 2\pi h / mc = h/mc$ donde m es la masa en reposo de la partícula	metro	m
exceso de masa defecto de masa	Δ B	$\Delta = m_a - Am_u$ $B = Zm(^1H) + Nm_n - m_a$	kilogramo	kg
exceso relativo de masa defecto relativo de masa	Δ_r B_r	$\Delta_r = \Delta/m_u$ $B_r = B/m_u$	uno	1

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
fracción de empaquetamiento fracción de enlace, energía de enlace por nucleón	f b	$f = \Delta_r / A$ $b = B_r / A$	uno	1
vida promedio	τ	Para decaimiento exponencial, el tiempo promedio requerido para reducir el número N de átomos o núcleos de un estado específico hasta N/e	segundo	s
ancho de nivel	Γ	$\Gamma = \frac{h}{\tau}$	joule	J
actividad (radiactividad)	A	El número promedio de transiciones nucleares espontáneas ocurridas en una cierta cantidad de un radionuclido dentro de un corto intervalo de tiempo, dividido por el valor de ese intervalo	becquerel	Bq
actividad específica en una muestra	a	La actividad de un nuclido radioactivo presente en una muestra, dividida por la masa total de la muestra	becquerel por kilogramo	Bq/kg
constante de desintegración, constante de decaimiento	λ	La constante de decaimiento es la probabilidad de decaimiento en un pequeño intervalo de tiempo dividido por este intervalo. $dN/dt = - \lambda N$ donde: N es el número de átomos radiactivos en el tiempo t $\lambda = 1/\tau$	segundo recíproco	s^{-1}
vida media	$T_{½}$	Para declinación exponencial, el tiempo promedio requerido para la desintegración de la mitad de los átomos de una muestra de un nuclido radiactivo	segundo	s
energía de desintegración alfa	Q_α	La suma de la energía cinética de la partícula α producida en el proceso de desintegración y la energía residual del átomo producido en el marco de referencia en que el núcleo emisor está en reposo antes de su desintegración	joule	J

Tabla 14.– Magnitudes y unidades de física atómica y física nuclear
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
energía máxima de partícula beta	E_β	La energía máxima del espectro de energía en un proceso de desintegración beta	joule	J
energía de desintegración beta	Q_β	La suma de la energía máxima de partícula beta E_β y la energía residual del átomo producido en el marco de referencia en que el núcleo emisor se encuentra en reposo antes de su desintegración	joule	J

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
energía de reacción	Q	En una reacción nuclear, la suma de las energías cinética y radiante de los productos de la reacción, menos la suma de las energías cinética y radiante de los reactivos.	joule	J
energía de resonancia	E_r , E_{res}	La energía cinética de una partícula incidente, en el marco de la referencia del objetivo, correspondiente a una resonancia en una reacción nuclear	joule	J
sección transversal	σ	Para una entidad objetivo especificada y para una reacción o proceso especificado por partículas incidentes cargadas o descargadas de energía y tipo especificado, la sección transversal es el cociente de la probabilidad de esta reacción o proceso para esta entidad objetivo y la fluencia de partícula de las partículas incidentes	metro cuadrado	m^2
sección transversal total	σ_{tot} , σ_T	La suma de todas las secciones transversales correspondientes a las diversas reacciones o procesos ocurridos entre la partícula incidente y la partícula objetivo		
sección transversal angular	σ_Ω	Sección transversal necesaria para disparar o dispersar una partícula dentro de un elemento de ángulo sólido, dividido por dicho elemento $\sigma = \int \sigma_\Omega d\Omega$	metro cuadrado por esterradián	m^2/sr
sección transversal espectral	σ_E	Sección transversal para un proceso en el que la energía de la partícula disparada o dispersada está en un elemento de energía, dividida por ese elemento $\sigma = \int \sigma_E dE$	metro cuadrado por joule	m^2/J
sección transversal angular espectral	$\sigma_{\Omega,E}$	Sección transversal necesaria para disparar o dispersar una partícula dentro de un elemento de ángulo sólido, con energía en un elemento de energía, dividida por el producto de estos dos elementos $\sigma = \iint \sigma_{\Omega,E}\, d\Omega\, dE$	metro cuadrado por esterradián joule	$m^2/(sr\bullet J)$

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
sección transversal macroscópica, densidad de sección transversal	Σ	La suma de las secciones transversales de una reacción o proceso de un tipo específico, para todos los átomos de un volumen dado, dividida por ese volumen	metro recíproco	m^{-1}
sección transversal macroscópica total, densidad de sección transversal total	Σ_{tot}, Σ_T	La suma total de las secciones transversales para todos los átomos en un volumen dado, dividido por ese volumen		
fluencia de partícula	Φ	En un punto dado del espacio, el número de partículas incidentes sobre una pequeña esfera en un intervalo de tiempo, dividido por el área de la sección transversal de esa esfera	metro cuadrado recíproco	m^{-2}
tasa de fluencia de partículas, densidad de flujo de partículas	φ	$\varphi = \frac{d\,\phi}{dt}$	metro cuadrado recíproco por segundo	m^{-2}/s
fluencia de energía	ψ	En un punto dado en el espacio, la suma de las energías, excluyendo la energía en reposo, de todas las partículas incidentes sobre una pequeña esfera en un intervalo de tiempo, dividida por el área seccional transversal de esa esfera	joule por metro cuadrado	J/m^2
tasa de fluencia de energía, densidad de flujo de energía	ψ	$\psi = \frac{d\,\psi}{dt}$	watt por metro cuadrado	W/m^2
densidad de corriente de partículas	J, (S)	La integral de una magnitud vectorial cuya componente normal sobre cualquier superficie, es igual al número "neto" de partículas pasando a través de esa superficie en un pequeño intervalo de tiempo, dividido por ese intervalo	metro cuadrado recíproco por segundo	m^{-2}/s
coeficiente de atenuación lineal	μ, μ_l	$\mu = -(\frac{1}{J})\frac{dJ}{dx}$ donde J es la densidad de corriente de un haz de partículas paralelo a la dirección x	metro recíproco	m^{-1}
coeficiente de atenuación másica	μ_m	El coeficiente de atenuación lineal dividido por la densidad de masa de la sustancia	metro cuadrado por kilogramo	m^2/kg

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
coeficiente de atenuación molar	μ_c	$\mu_c = \mu/c$ donde c es la concentración de cantidad de sustancia	metro cuadrado por mol	m^2/mol
coeficiente de atenuación atómica	μ_a, μ_{at}	$\mu_a = \mu/n$ donde n es la densidad numérica de átomos en la sustancia	metro cuadrado	m^2
espesor medio, valor medio de espesor, capa hemirreductora	$d_{1/2}$	El espesor de la capa atenuadora que reduce la densidad de corriente de un haz unidireccional a la mitad de su valor inicial	metro	m
potencia de detención lineal total, poder de frenado lineal total	S , S_1	Para una partícula cargada ionizante de energía E, moviéndose en la dirección x $S = - dE/dx$	joule por metro	J/m
potencia de detención atómica total, poder de frenado atómico total	S_a	$S_a = S/n$ donde n es la densidad numérica de átomos en la sustancia	joule metro cuadrado	$J \bullet m^2$
potencia de detención másica total, poder frenado másico total	S_m	La potencia de detención lineal total dividida por la densidad de masa de la sustancia	joule metro cuadrado por kilogramo	$J \bullet m^2/kg$
alcance lineal medio	R , R_l	La distancia que una partícula penetra en una sustancia dada, bajo condiciones específicas promediadas de un grupo de partículas que tiene la misma energía	metro	m
alcance másico medio	R_ρ, (R_m)	El alcance lineal medio multiplicado por la densidad de masa de la sustancia	kilogramo por metro cuadrado	kg/m^2
ionización lineal por una partícula	N_{il}	El número de cargas elementales del mismo signo, producidas en un elemento de la longitud de la trayectoria de una partícula cargada ionizante dividido por ese elemento	metro recíproco	m^{-1}
pérdida promedio de energía por par de iones formados	W_j	La energía cinética inicial de una partícula cargada ionizante, dividida por la ionización total de esa partícula	joule	J
movilidad	μ	La velocidad de arrastre promedio impartida por un campo eléctrico o una partícula cargada en un medio, dividido por la intensidad del campo	metro cuadrado por volt segundo	$m^2/(V \bullet s)$

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
densidad numérica de iones, densidad de iones	n^+, n^-	El número de iones positivos o negativos de un elemento de volumen, dividido por ese elemento	metro cúbico recíproco	m^{-3}
coeficiente de recombinación	α	Coeficiente en la Ley de recombinación $-\frac{dn^+}{dx} = -\frac{dn^-}{dt} = \alpha n^+ n^-$	metro cúbico por segundo	m^3/s
densidad numérica de neutrones	n	El número de neutrones libres en un elemento de volumen, dividido por ese elemento	metro cúbico recíproco	m^{-3}
rapidez del neutrón	v	La magnitud de la velocidad neutrónica	metro por segundo	m/s
densidad de flujo de neutrones, rapidez de flujo de neutrones	φ	En un punto dado en el espacio, el número de neutrones incidentes sobre una pequeña esfera, en un pequeño intervalo de tiempo, dividido por el área de sección transversal de esa esfera y por el intervalo de tiempo	metro cuadrado recíproco por segundo	m^{-2}/s
coeficiente de difusión, coeficiente de difusión para la densidad numérica de neutrones	D, D_n	$J_x = -D_n \partial n/\partial x$ donde: J_x es la componente x de la densidad de corriente de neutrones n es la densidad numérica de neutrones	metro cuadrado por segundo	m^2/s
coeficiente de difusión para la densidad de flujo de neutrones, coeficiente de difusión para rapidez de fluencia de neutrones	D_φ, (D)	$J_x = -D_\phi \partial \phi/\partial x$ donde: J_x es la componente x de la densidad de corriente neutrónica ϕ es la densidad de flujo neutrónico	metro	m
densidad total de una fuente de neutrones	S	Razón de la producción de neutrones en un elemento de volumen, dividido por ese elemento	segundo recíproco metro cúbico recíproco	$s^{-1} \bullet m^{-3}$
densidad de frenado	q	La densidad numérica de neutrones retardados, pasando un valor de energía dado, durante un corto intervalo de tiempo, dividida por dicho intervalo	metro cúbico recíproco por segundo	m^{-3}/s

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	Símbolo de la magnitud	Definición de la magnitud	Unidad SI	Símbolo de la unidad SI
probabilidad de escape a la resonancia	p	En medio infinito, probabilidad de que un neutrón, al frenarse a través de una zona energética donde existen resonancias, la rebase sin ser absorbido	uno	1
letargía	u	En el frenado de neutrones, logaritmo neperiano del cociente entre una energía de referencia E_0, normalmente la máxima del neutrón, y la que este posee, E	uno	1
decaimiento logarítmico medio	ξ	Valor medio de la disminución del logaritmo neperiano de la energía de los neutrones en sus condiciones elásticas con núcleos cuya energía cinética es despreciable comparada con la de los neutrones	uno	1
trayectoria libre promedio	l, λ	La distancia promedio que viaja una partícula entre dos reacciones o procesos específicos sucesivos	metro	m
área de retardamiento	L^2_s, L^2_{sl}	En un medio homogéneo infinito, la sexta parte de la distancia cuadrática media entre la fuente de un neutrón y el punto donde el neutrón alcanza una energía determinada	metro cuadrado	m^2
área de difusión	L^2	En un medio homogéneo infinito, la sexta parte de la distancia cuadrática media entre el punto donde el neutrón entra a una clase especificada y el punto donde abandona esta clase		
área de migración	M^2	La suma del área de retardamiento de energía de fisión a energía térmica y el área de difusión para neutrones térmicos		
longitud de retardamiento	L_s, L_{sl}	La raíz cuadrada del área de retardamiento	metro	m
longitud de difusión	L	La raíz cuadrada del área de difusión		
longitud de migración	M	La raíz cuadrada del área de migración		
rendimiento neutrónico de la fisión	v	En la fisión de un núclido determinado, promedio del número de neutrones, lo mismo inmediatos que diferidos, emitidos en cada fisión	uno	1
rendimiento neutrónico de la absorción	η	Promedio del número de neutrones de fisión, lo mismo inmediatos que diferidos, emitido por cada neutrón que se absorbe en un nuclido fisionable o en un combustible nuclear, según se especifique		

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
factor de fisión rápida	ε	Para un medio infinito, razón entre el número medio de neutrones producidos por todas las fisiones y el de neutrones producidos exclusivamente por las fisiones térmicas	uno	1
factor de utilización térmica	f	Para un medio infinito, razón entre el número de neutrones térmicos absorbidos en un combustible nuclear, según se especifique, y el número total de neutrones térmicos absorbidos	uno	1
probabilidad de permanencia	Λ	Probabilidad de que un neutrón no escape del núcleo de un reactor durante el proceso de moderación o el de difusión en la zona térmica	uno	1
factor de multiplicación	k	Para un medio multiplicativo, razón entre el número total de neutrones producidos durante un intervalo de tiempo y el número total de neutrones perdidos por absorción y escape durante el mismo intervalo	uno	1
factor de multiplicación infinito, factor de multiplicación de un medio infinito	k_∞	Factor de multiplicación de un medio sin fugas neutrónicas		
factor de multiplicación efectivo	k_{eff}	Factor de multiplicación correspondiente a un medio finito		
reactividad	ρ	En un medio multiplicativo, medida de la desviación entre el estado del medio y su estado crítico $$\rho = \frac{k_{eff} - 1}{k_{eff}}$$	uno	1
constante de tiempo del reactor	T	El tiempo requerido para que la densidad de flujo neutrónico de un reactor cambie en un factor "e" cuando la densidad de flujo aumenta o disminuye exponencialmente	segundo	s
actividad	A	El número promedio de transacciones nucleares espontáneas ocurridas en una cierta cantidad de un radionuclido, dentro de un corto intervalo de tiempo, dividido por el valor de ese intervalo	becquerel	Bq

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
energía impartida	ε	La energía impartida por radiación ionizante a la materia en un volumen, es, la diferencia entre la suma de las energías de todas las partículas directamente ionizantes (cargadas) e indirectamente ionizantes (sin carga) que han ocupado el volumen y la suma de las energías de todas aquellas que han salido de él, menos la energía equivalente de cualquier incremento de la masa en reposo que tenga lugar en reacciones de partículas elementales o nucleares	joule	J
energía impartida media	$\bar{\varepsilon}$	El promedio de la energía impartida	joule	J
energía específica impartida dosis absorbida	z D	Para cualquier radiación ionizante la energía impartida a un elemento de materia irradiada, dividida por la masa de ese elemento Para cualquier radiación ionizante, la energía media impartida a un elemento de materia irradiada, dividida por la masa de este elemento	gray	Gy
equivalente de dosis	H	El equivalente de dosis es el producto de D, Q, y N en el punto de interés, donde D es la dosis absorbida, Q es el factor de calidad y la N es el producto de otros factores determinantes cualesquiera H = D•Q•N	sievert	Sv
rapidez de dosis absorbida	$\dot{D}$	Dosis absorbida en un pequeño intervalo de tiempo, dividida por este intervalo	gray por segundo	Gy/s
transferencia lineal de energía	L	Para una partícula cargada ionizante, la energía local impartida a una masa, a través de una pequeña distancia, dividida por esa distancia	Joule por metro	J/m
kerma	K	Para partículas indirectamente ionizantes (sin carga), la suma de las energías cinéticas iniciales de todas las partículas cargadas liberadas en un elemento de materia, dividida por la masa de ese elemento kerma en un pequeño intervalo de tiempo, dividido por ese intervalo	gray	Gy

Tabla 15.– Magnitudes y unidades de reacciones nucleares y reacciones ionizantes
(continuación)

Magnitud	**Símbolo de la magnitud**	**Definición de la magnitud**	**Unidad SI**	**Símbolo de la unidad SI**
rapidez de kerma	$\dot{K}$	$\dot{K} = \frac{dK}{dt}$	gray por segundo	Gy/s
coeficiente de transferencia de energía másica	μ_{tr}/ρ	Para un haz de partículas indirectamente ionizante (sin cargas) $\mu_{tr} / \rho = \frac{\dot{K}}{\psi}$ donde ψ es la densidad de flujo de energía	metro cuadrado por kilogramo	m^2/kg
exposición	X	Para radiación X o gamma, la carga eléctrica total de los iones del mismo signo producidos cuando todos los electrones liberados (negativos y positivos) por fotones en un elemento de aire son detenidos en el aire, dividida por la masa de ese elemento	coulomb por kilogramo	C/kg
rapidez de exposición	$\dot{X}$	Exposición en un pequeño intervalo de tiempo, dividida entre ese intervalo	coulomb por kilogramo segundo	C/(kg•s)

TABLA 16.- Unidades que no pertenecen al SI, que se conservan para usarse con el SI

Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**	**Equivalente**
tiempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	día	d	1 d =24 h = 86 400 s
	año	a	1 a = 365,242 20 d = 31 556 926 s
tiempo	grado	°	1° = (π/180) rad
	minuto	'	1' = (π/10 800) rad
	segundo	"	1" = (π/648 000) rad
volumen	litro	l, L	1 L = 10^{-3} m^3
masa	tonelada	t	1 t = 10^3 kg
trabajo, energía	electronvolt	eV	1 eV = 1,602 177 x 10^{-19} J
masa	unidad de masa atómica	u	1 u = 1,660 540 x 10^{-27} kg

Tabla 17.- Unidades que no pertenecen al SI que pueden usarse temporalmente con el SI

Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**	**Equivalencia**
superficie	área	a	1 a = 10^2 m^2
	hectárea	ha	1 ha = 10^4 m^2
	barn	b	1 b = 10^{-28} m^2
longitud	angströn	Å	1 Å = x 10^{-10} m
longitud	milla náutica		1 milla náutica = 1852 m
presión	bar	bar	1 bar = 100 kPa
velocidad	nudo		1 nudo = (0,514 44) m/s
dosis de radiación	röntgen	R	1 R =2,58 x 10^{-4} C/kg
dosis absorbida	rad*	rad (rd)	1 rad = 10^{-2} Gy
radiactividad	curie	Ci	1 Ci = 3,7 x 10^{10} Bq
aceleración	gal	Gal	1 gal = 10^{-2} m/s^2
dosis equivalente	rem	rem	1 rem = 10^{-2} Sv

*** El rad es una unidad especial empleada para expresar dosis absorbida de radiaciones ionizantes. Cuando haya riesgo de confusión con el símbolo del radián, se puede emplear rd como símbolo del rad.**

Tabla 18.- Ejemplos de unidades que no deben utilizarse

Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**	**Equivalencia**
longitud	fermi	fm	10^{-15} m
longitud	unidad X	unidad X	1,002 x 10^{-4} nm
volumen	stere	st	1 m^3
masa	quilate métrico	CM	2 x 10^{-4} kg
fuerza	kilogramo-fuerza	kgf	9,806 65 N
presión	torr	Torr	133,322 Pa
energía	caloría	cal	4,186 8 J
fuerza	dina	dyn	10^{-5} N
energía	erg	erg	10^{-7} J
luminancia	stilb	sb	10^4 cd/m^2
viscosidad dinámica	poise	P	0,1 Pa•s
viscosidad cinemática	stokes	St	10^{-4} m^2/s
luminosidad	phot	ph	10^4 lx
inducción	gauss	Gs, G	10^{-4} T
intensidad campo magnético	oersted	Oe	(1000 / 4π) A/m
flujo magnético	maxwell	Mx	10^{-8} Wb
inducción	gamma		10^{-9} T
masa	gamma		10^{-9} kg
volumen	lambda		10^{-9} m^3

Tabla 19 - Prefijos para formar múltiplos y submúltiplos

Nombre	Símbolo	Valor
yotta	Y	10^{24} = 1 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21} = 1 000 000 000 000 000 000 000
exa	E	10^{18} = 1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} = 1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
kilo	k	10^{3} = 1 000
hecto	h	10^{2} = 100
deca	da	10^{1} = 10
deci	d	10^{-1} = 0,1
centi	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
micro	µ	10^{-6} = 0,000 001
nano	n	10^{-9} = 0,000 000 001
pico	p	10^{-12} = 0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15} = 0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18} = 0,000 000 000 000 000 001
zepto	z	10^{-21} = 0,000 000 000 000 000 000 001
yocto	y	10^{-24} = 0,000 000 000 000 000 000 000 001

Tabla 20.- Reglas generales para la escritura de los símbolos de las unidades del SI

1	Los símbolos de las unidades deben ser expresados en caracteres romanos, en general, minúsculas, con excepción de los símbolos que se derivan de nombres propios, en los cuales se utilizan caracteres romanos en mayúsculas Ejemplos: m, cd, K, A
2	No se debe colocar punto después del símbolo de la unidad
3	Los símbolos de las unidades no deben pluralizarse Ejemplos: 8 kg, 50 kg, 9 m, 5 m
4	El signo de multiplicación para indicar el producto de dos ó más unidades debe ser de preferencia un punto. Este punto puede suprimirse cuando la falta de separación de los símbolos de las unidades que intervengan en el producto, no se preste a confusión. Ejemplo: N•m o Nm, también m•N pero no: mN que se confunde con milinewton, submúltiplo de la unidad de fuerza, con la unidad de momento de una fuerza o de un par (newton metro)
5	Cuando una unidad derivada se forma por el cociente de dos unidades, se puede utilizar una línea inclinada, una línea horizontal o bien potencias negativas. Ejemplo: m/s o ms^{-1} para designar la unidad de velocidad: metro por segundo
6	No debe utilizarse más de una línea inclinada a menos que se agreguen paréntesis. En los casos complicados, deben utilizarse potencias negativas o paréntesis Ejemplos: m/s^2 o $m•s^{-2}$, pero no: m/s/s $m•kg / (s^3•A)$ o $m•kg•s^{-3}•A^{-1}$, pero no: $m•kg/s^3/A$
7	Los múltiplos y submúltiplos de las unidades se forman anteponiendo al nombre de éstas, los prefijos correspondientes con excepción de los nombres de los múltiplos y submúltiplos de la unidad de masa en los cuales los prefijos se anteponen a la palabra "gramo" Ejemplo: dag, Mg (decagramo; megagramo) ks, dm (kilosegundo; decímetro)
8	Los símbolos de los prefijos deben ser impresos en caracteres romanos (rectos), sin espacio entre el símbolo del prefijo y el símbolo de la unidad Ejemplo: mN (milinewton) y no: m N
9	Si un símbolo que contiene a un prefijo está afectado de un exponente, indica que el múltiplo de la unidad está elevado a la potencia expresada por el exponente Ejemplo: $1\ cm^3 = (10^{-2}\ m)^3 = 10^{-6}\ m^3$ $1\ cm^{-1} = (10^{-2}\ m)^{-1} = 10^2\ m^{-1}$
10	Los prefijos compuestos deben evitarse Ejemplo: 1 nm (un nanómetro) pero no: 1 mµm (un milimicrómetro)

Tabla 21 - Reglas para la escritura de los números y su signo decimal

Números	Los números deben ser generalmente impresos en tipo romano. Para facilitar la lectura de números con varios dígitos, estos deben ser separados en grupos apropiados preferentemente de tres, contando del signo decimal a la derecha y a la izquierda, los grupos deben ser separados por un pequeño espacio, nunca con una coma, un punto, o por otro medio.
Signo decimal	El signo decimal debe ser una coma sobre la línea (,). Si la magnitud de un número es menor que la unidad, el signo decimal debe ser precedido por un cero.

9 VIGILANCIA

La vigilancia de la presente norma oficial mexicana estará a cargo de la Secretaría de Economía, por conducto de la Dirección General de Normas y de la Procuraduría Federal del Consumidor, conforme a sus respectivas atribuciones.

10 BIBLIOGRAFÍA

- Ley Federal sobre Metrología y Normaliación, publicada en el Diario Oficial de la Federación el 1 de julio de 1992

- Reglamento de la Ley Federal sobre Metrología y Normalización, publicado en el Diario Oficial de la Federación el 14 de enero de 1999.

- Le Systeme International d'Unités (SI)
  Bureau International des Poids et Mesures.

- Recueil de Travaux du Bureau International des Poids et Mesures
  Volumen 2, 1968-1970.
  Bureau International des Poids et Mesures.

- ISO 1000 (1992) SI units and recommendations for the use of their multiples and of certain other units.
- ISO 31-0 (1992) Quantities and units-Part 0: General principles.
- ISO 31-1 (1992) Quantities and units - Part 1: Space and time.
- ISO 31-2 (1992) Quantities and units - Part 2: Periodic and related phenomens.
- ISO 31-3 (1992) Quantities and units - Part 3: Mechanics.
- ISO 31-4 (1978) Quantities and units - Part 4: Heat.
- ISO 31-5 (1992) Quantities and units - Part 5: Electricity and magnetism.
- ISO 31-6 (1992) Quantities and units - Part 6: Light and related electromagnetic radiations.
- ISO 31-7 (1992) Quantities and units - Part 7: Acoustics.
- ISO 31-8 (1992) Quantities and units - Part 8: Physical chemistry and and molecular physics.
- ISO 31-9 (1992) Quantities and units - Part 9: Atomic and nuclear physics.
- ISO 31-10-1992 Quantities and units - Part 10: Nuclear reactions and and ionizing radiations.
- NFXO2-201-1985 Grandeurs, unites et symboles d'espace et de temps.
- NFXO2-202-1985 Grandeurs, unités et symboles de phénoménes phénoménes periodiques et connexes.
- NFXO2-203-1993 Grandeurs, unités et symboles de mécanique.
- NFXO2-204-1993 Grandeurs, unités et symboles de thermique.
- NFXO2-205-1994 Grandeurs, unités et symboles d'electicité et de magnétisme.
- NFXO2-206-1993 Grandeurs, unités et symboles des rayonnements electro magnétiques et d'optique.

- NFXO2-207-1985 Grandeurs, unités et symboles d'acoustique.

- NFXO2-208-1985 Grandeurs, unités et symboles de chimie physique et de physique moléculaire.

- NFXO2-209-1993 Grandeurs, unités et symboles de phyusique atomique et nucleaire.

- Atomic Weigths of the Elements 1997
  IUPAC Pure Appl. Chem., 51, 381-384 (1997)

11 CONCORDANCIA CON NORMAS INTERNACIONALES

Esta norma concuerda con lo establecido en los documentos del Bureau International des Poids et Mesures y las normas ISO mencionadas en la Bibliografía. Las tablas se han estructurado eligiendo las unidades más usuales.

TRANSITORIOS

PRIMERO.- Esta norma oficial mexicana entrará en vigor 60 días después de su publicación en el Diario Oficial de la Federación

SEGUNDO.- Esta norma oficial mexicana cancela a la NOM-008-SCFI-1993 Sistema General de Unidades de Medida

México, D.F

EL DIRECTOR GENERAL DE NORMAS

MIGUEL AGUILAR ROMO

Unidad 1

1.1 2%

1.2

a) 2%

b) 0,5%

c) 0,25%

d) 0,11%

1.3 $A = (100 \pm 2)$ cm^2, 2%

1.4

Línea *A*: 3,99%

Línea *B*: 3,33%

Línea *C*: 9,77%

1.5

2,8 cm ± 0,3

1.6

a) 5

d) 5

i) 30,48, con 4 cifras significativas

1.7 $4,27 \times 10^3$ cm^3

1.8 $3,37 \times 10^3$

1.9 50 mexicanos/km^2

1.10 10 800 m^2. Tiene 5 cifras significativas

1.11

a) 5

b) 4

c) 3

d) 7

1.12 1 nudo

1.13 5 184 km/h^2

1.14 13 600 kg/m^3

1.15 1.134 rad

1.16 $3,8 \times 10^3$ cm^3, $7,5 \times 10^3$ cm^3; sí

1.17 $1,17 \times 10^{10}$ átomos de C

1.18 37,13 N

1.19 $5,1 \times 10^{12}$ M/año

1.20 $1,58 \times 10^{18}$ t

1.21 $5,2 \times 10^{16}$ t

1.22 $5,1 \times 10^{15}$ t

1.23 0,115 m^2

1.24 16,35 L

1.25 Hombres: 657 000 horas; Mujeres: 700 800 horas

1.26 No puede hacerlo, ya que sólo puede cargar 1,5 toneladas

1.27 21,21 horas a la semana

1.28 Sí es posible, ya que el volumen del barril es de 808,19 galones

1.29

Ciudad de México: 21,11 °C (templado)

Monterrey: 28,33 °C (calor)

Querétaro: 16,11 °C (frio)

1.30 8,1 g/cm^3

1.31 449 lb/ft^3

1.32

a) −53 °C

b) 225 °C

1.33

a) 357 °C

b) −38,9 °C

1.28

a) 32000 mg

b) 0,032 kg

c) 0,0705 lb

1.35 2 270 g

1.36 T^{-2}

1.37

Variable	Símbolo	Dimensión
Potencia	P	$ML^2\theta^{-3}$
Flujo volumétrico	Q	$L^3\theta^{-1}$
Densidad del fluido	ρ	ML^{-3}
Velocidad angular de un rotor	ω	θ^{-1}

Unidad 2

2.1 33 106 N y $\theta = 335°$

2.2 $a_R = 226,46$ m/s^2, $\theta = 300,76°$

2.3 $F_E = (-i - 7j + 3k)$N

2.4 $F_E = 7,68$ N, $F_R = 7,68$ N

2.5 $\theta = 71,56°$

2.6 30 km/h

2.7 21,2 nudos. ¡¡¡Llevan rumbos de colisión!!!

2.8

a) $\theta = 11{,}31°$

b) tiempo adicional = 1 s

2.9

$A \cdot B = 547{,}9$

$A \times B = 1\,123{,}5$

2.10

a) −30

b) −14

c) $(2i - 11j - 6k)$

2.11 $\theta = 147{,}86°$

2.12 $-51\ \text{kg}\dfrac{\text{m}^2}{\text{s}}$

2.13 $\tau = [-36k]$Nm

2.14 $\tau = -i - 5j - 9k$

2.15

a) 52

b) 30

2.16 7,8 metros, 38° al noreste.

2.17

Magnitud	Escalar/Vectorial	Análisis dimensional
Volumen	Escalar	$[L^3]$
Fuerza	Vectorial	$[M]\,[L]\,[T^{-2}]$
Trabajo	Escalar	$[M]\,[L^2]\,[T^{-2}]$
Densidad	Escalar	$[M]\,[L^{-3}]$
Superficie	Escalar	$[L^2]$
Presión	Escalar	$[M]\,[L^{-1}]\,[T^2]$

2.18 5,06 km, 20,2° al noroeste. La dirección aproximada es la esquina de Benito Juárez y San Juanito Itzícuaro.

2.19

a) 10 m

b) 15,7 m

c) 0

2.20 70 m

2.21 47,2 mm, 122°

2.23 9,48 μm a 26,6°

2.25 31, 269 con un ángulo de 14, 88°

2.26

b) $7{,}5\, i + j$

c) $4{,}5\, i - 5\, j$

2.27 $G(-1, 3, 6)$

2.28 $P(8, -5)$

2.29

a) Si la ecuación de la recta es $y = x - 1$

b) No están sobre una misma recta.

2.31

a) No

b) No

c) No

2.32 11, 402

2.33 (4,11/4)

2.34 7, 7421 con un ángulo de 35,538°

2.35 $c_y = (4/3)$, $b_x = 10/3$, $b_z = -35/4$

2.36

a) 4,4721

b) 10,441

c) 2,6667

Unidad 3

3.1 225 m, 30 m/s

3.2 15 km/h

3.3 35 km

3.4 Motocicleta 840 km y bicicleta 160 km

3.5 El sonido directo a 1,5 s, y el del eco a 3 s

3.6 30 minutos

3.7 180 metros

3.8 Tardan en encontrarse 1,5 horas desde que salió el de Morelia; a 117 km de Morelia

3.9 1,67 m/s^2; 83,17 m

3.10 14 s

3.11 11,03 s

3.12 0,25 m/s^2, 50 m

3.13 162 m

3.14 3 s, 12 m/s

3.15 1 975,3 m/s^2, 2 469,1 m/s^2

3.16 0,55556 m/s^2, 60 s, 33,05 m

3.17 68,33 m/s; −23,33 m/s^2.

3.18

a) 137,5 s

b) 0,5316 m/s^2

c) 44 m/s; 73,01 m/s

3.19 41,67 m

3.20 2,6833 m/s; 8,9443 s

3.21 15 s

3.22

a) 86,4 s

b) 261,7 m

3.23 1,2742 s

3.24 (3/4)h

3.25 −49,25 m/s; 123,63 m hacia abajo

3.26

a) 4,4627 s

b) 48,779 m/s

3.27

a) 482,33 m

b) −97,280 m/s

3.28 31,321 m/s; 3,1928 s

3.29 49,05 m/s; 122,63 m

3.30

a) 4,3757 s

b) 46,593s

c) 3 185,5 m

3.31

a) 3,6210 s

b) 116,8 m

c) 14,514 m/s y 64,114 m/s

3.32 875 m

3.33 75,96°

3.34 3 188,8 m

3.35

a) 3,0605 s

b) 45,897 m

c) v_x = 40,005 m/s

d) 244,87 m

3.36

a) 3 911 m

b) 2,4564 s

c) 39,236 m

d) 15,973 m/s; 2,236 m/s

3.37

a) 89,992 m; 28,848 m

b) 22,498 m/s; −16,702 m/s.

3.38

a) 7,2154 s

b) 63,774 m

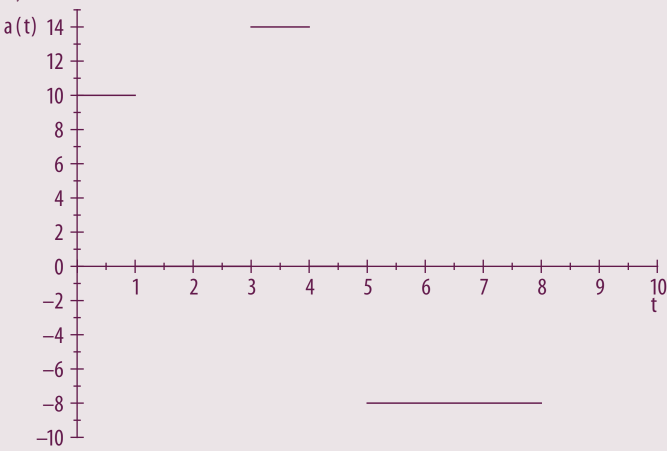
c) 255,1 m

3.39 Pega en el quinto escalón

3.40 2 626,4 m

3.41

a)



b) 102 m

c) *AB* 10 t; *CD* 24 t

3.42

a) 0,5 m/s^2

b) 0

c) 0,5 m/s^2

d) 2 m/s.

3.43

a) 8 s

b) 96 m; 128 m

3.44

a) 5 m/s

b) una recta $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$

3.45

a) 1 022,9 m/s

b) 2,7248 × 10⁻3 m/s²

3.46 3,4872 rad/s; 1,8241 m/s

3.47 509,05 m/s

3.48 0,2 Hz

3.49 80,83 rad/s

3.50

a) 7,96

b) 5 m/s

c) −2,094 rad/s²

3.51

a) −20,944 rad/s²

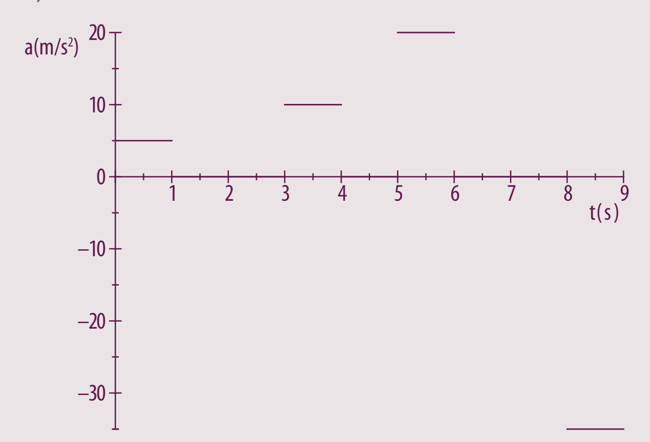
b) 125

c) −4,1888 m/s²

3.52 100 m

3.53

a)



b) 17, 5 m

c) 0

d) 150 m,

e) $(5/2)x^2$, $0 \le x < 1$

$5x$ $1 \le x < 3$

$5x(x - 5)$ $3 \le x < 4$

$15x$ $4 \le x < 5$

$5x(2x - 17)$, $5 \le x < 6$

$35x$, $6 \le x < 8$

$-((35)/2)\, x\,(x-18)$, $8 \le x < 9$

3.54 0,022 m/s, 0,3811 m/s²

3.55

a) −8,508 rad/s²

b) 8 s

3.56 29,4 km

3.57 95,88 m/s

3.58 2,66 m/s, 5,33m/s, 1,77 m/s, 7 200m

3.59 33,33 s

3.60 0,74636 s

3.61 1, 6638 s

3.62 0,50979 m/s², 0,29 de vuelta, 27, 652 m, 0,75593 s, 9,8 m/s², 825,01 m

Unidad 4

4.1 0

4.2 10 N

4.3 100 N

4.4 4 N

4.5 10 m/s

4.6 1/5

4.7 48 N

4.8 30 N

4.9 1,3811 × 10⁵ N

4.10 0,392 m/s²

4.11 120 kg, 192 N

4.13 6,4 × 10⁵ N

4.14 m = 0,4054 kg

4.15 1,43 m/s², a 65,22 del E

4.16 −90 278 N

4.17 Hay dos fuerzas: el peso (P) y la fuerza de contacto (F_c); F_c = 210,2 N y P = 200 N

4.18 868,2 N

4.19

a) F_x = 1,88 N

b) F_y = 0,68 N

c) 1,88i + 0,68 j

4.20

a) −45 Ni − 25,981 Nj

b) 210°

4.21 0,747i − 0,405j m/s²

4.22

b) a = 4,29 m/s^2

c) T= 28,57 N

4.23 503,28 N

4.25

b) 8,495 m/s^2

c) 1,19 s

d) 10,09 m/s

4.26 0,833 m/s

4.27 33,98 N, 39,23 N

4.28 32 N

4.29 7,848 m/s^2

4.30 $\frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$

4.31 3,27 m/s^2

4.32 P/2

4.33

a) 864,8 N

b) 704,8 N

4.34 T = 111,34 N

4.35

a) 342,3 N

b) 294,3 N

4.36

b) 1,96 m

4.37 0,66 m/s^2

4.38 784,8 N

4.39

a) 1,77 m/s^2

b) 0,37

c) 25,48 N

d) 9,43 N

e) 2,66 m/s

4.40

a) 1,286 m/s^2

b) 1,286 m/s^2 27,204 N

4.41 24,81 N

4.42 5 N

4.43

a) 0,654 m/s^2

b) 0,361 m/s

c) 11,445 N

4.44 20 kg

4.45 0,72 N

4.46 0,96 N

4.47 21,39 N

4.48 20 m/s

4.49 12,25 m/s

4.50 22,20°

4.52

a) 41, 62

b) 38. 66°

c) −41,62

4.53

a) 53,9 N

b) 41,649 N

c) 288,91°

4.54 3, 4731 kg

4.55 2,20 N

4.56

a) 0,00149 m/s^2

b) 17,15 N

c) 49 N; 17,15745 N

4.57

a) 54,9 N

b) F_x = 50,9 N; F_y = 20,57

4.58 70 N; 56 N

4.59 7,35 m/s^2

4.60

a) 7497 N

b) 2,142 m/s^2

c) 7497 N

4.61

a) 9,06 N; 2,7 N

b) 37,06 N

c) 49,25 N

4.62 33,13 N; 39,19 N

4.63 2,94 m/s^2

4.64

a) 4,1587 m/s

b) 8,3012 N

4.65 a = 1,973 m/s^2

4.66 160,8 N

4.67 10 rad/s

4.68 4 408 N

Unidad 5

5.1 W = 1 471,5 J

5.2 Ep= 9,81 J

5.3 W= 1 716,22 J

5.4 1 732,05 J

5.5 0,19865 J

5.6 17 658 J

5.7

a) W = 7,5 J

b) W= 15 J

c) W = 7,5 J

d) 30 J

5.8 W = 200 J

5.9 W = 2 J

5.10

a) 34,7 J

b) 41,1 J

c) La fuerza no es conservativa

5.11 *h* = 44,145 m, W = 176,58 J

5.12 El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es: W = −48 J

Sólo realiza trabajo la componente F_X de la fuerza aplicada sobre la caja: W = 433 J

5.13 *Em* = 446,2 J

5.14 *Ec* = 397,30 J

5.15

a) *P* = 2079,72 W

b) *r* = 74,27%

5.16

a) 813,5 J

b) 31 191 J

5.17 $Ec = 1{,}929 \times 10^5$ J

5.18

a) v_f = 16 m/s

b) W = 2646 J

5.19

a) Ec_i = 203125 J

b) Ec_f =62793,3 J

c) W = 140331 J

5.20 E_p = 48461 J

5.21 *h* = 2,5 m

5.22 *h* = 31,7 m

5.23 *v* = 435,9 m/s

5.24

a) W = 2 000 J v = 44,7 m/s

b) W = −2 500 J v = 0 m/s

c) W = 8 000 J v = 161,25 m/s

5.25 214,76 W

5.26 *v*= 1,25 m/s

5.27

a) 44,29 m/s (no hay fricción)

b) 34,3 m/s

c) 19,01 m/s

5.28

W = 386420 J

P = 48303,5 W

P = 65,7 CV

5.29 E_p = 5 886 J

5.30 E_p = 0,5 J

5.31 *v* = 14 m/s

5.32

a) WF_e = 31,9 N

b) WF_n = 0 N

c) WF_g = 0; es cero porque el ángulo entre la fuerza de gravedad y el desplazamiento es de 90º.

d) W_T = 31,9 N

5.33 *h*= 20,4 m

5.34 W_g = 0,33 J y el valor de la energía disipada es de 0,33 J ya que la energía cinética permanece constante, durante la caída todo el trabajo se convierte en calor.

5.35 *x* = 26 cm

5.36

a) v = 9,89 m/s

b) v = 9,1 m/s

5.37 W por una sola levantada = 294,3 J; por 20 levantadas el trabajo es de 5 886 J.

5.38 Ec = 173 611 J

5.39 h = 58,3 m

5.40 m = 4 kg

5.41

a) 5 000 J

b) 510 m

c) −5 000 J y 5 000 J

5.42

a) W = 294300 J

b) E_p = 294300 J

5.43 P = 13,72 W

5.44

a) T = 79,49 N

b) W = 1 493,9 J

c) La energía perdida es de 1 493,9 J

5.45

a) Ep = 78 480J

b) E_c= 78 400 J

c) v= 15,9 m/s

d) 7 848 N.

5.46 v=0,52 m/s

5.47 W= 63890,84 J

5.48

a) k= F/D

b) W= 1/2kD^2

5.49 208,7 kJ

5.50 T = 1,4715 N

5.51

a) 1 200 J

b) −200 J

c) −590,37 J

d) 4 m/s

e) Ec_i = 9 J Ec_f = 400,63 J

5.52 0,0886 m

5.53

a) Ep_i = 0 J Ep_f = 22,07 J

b) Ec_i = 33,06 J Ec_f = 0 J

c) v = 7,67 m/s

5.54 14,161 m

5.55

a) 16 J

b) $\alpha_{máx}$ = 35,4°

c) −0,0245 J

5.56

a) v_{David} = 2,414 m/s

b) $v_{Jonathan}$ = 4,828 m/s

5.57 El niño deja de tener contacto cuando θ = 48,19°

5.58 W = 3,5358 N

5.59 W =− 2,25 J

5.60 v= 0 m/s

5.61

a) 11,29 W

b) 1 286,25 J

c) 8,46W

d) 874,65 J

5.62

a) 14 161 J

b) 14 161 J

c) 833N

d) 833 N

e) 0,354 m/s

5.63 11,804 J

5.64

a) 242, 84 N

b) 0,77778 m/s

5.65 W = 93,1 J

5.66

a) 2 610 W

b) 7,8299 × 10^5 J

c) 3,6281×10^{-8} J

5.67

a) 3 528 J

b) 1 896,3 J

W =−ΔE_p = 2 712,2 J

5.68 18 620 J, 2 051 942 760 J

5.69 485,1 J; 1 034,9 J

Unidad 6

6.1 30 000 kg · m/s

6.2 144 km/h

6.3 $F = -2433{,}4$ N

6.4 $a = 4$ m/s^2 y 0,4 kg · m/s

6.5 2,41 m/s

6.6 $v = 2{,}86$ m/s

6.7

a) −2,7 kg · m/s

b) 2,4 kg · m/s

c) 5,1 kg · m/s

6.8 16,48 m/s

6.9

a) 6 kg · m/s

b) 300 N

6.10

a) 4,8 m/s, 6,8 m/s

b) 0 m/s, 10 m/s

6.11

a) 1,25 m/s

b) −0,54 m/s

c) 0,68302 m/s

d) 0,026 m

6.12

a) 5 m/s

b) 0,083 m/s

6.13

a) $V_{2f} = 3{,}5$ m/s

b) $\Delta EC = -10{,}5$ J (el sistema pierde 10,5 J)

c) $e = 0{,}75$

6.14

$V_{1f} = -1{,}2$ m/s

$V_{2f} = 0{,}8$ m/s

6.15

a) $V_{1i} = 9{,}63$ m/s

b) $\Delta EC = -31{,}4$ J

6.16

$V_{1f} = 12{,}6886$ m/s

$V_{2f} = 5{,}9162$ m/s

6.17

$h = 0{,}5556$ m

6.18 v = 14,042 m/s

6.19

a) $m = 0{,}110$ kg

b) $v_{2f} = 1{,}876$ m/s

6.20 24,281 m/s

6.21

$v_{1f} = 0{,}997$ m/s

$v_{2f} = 4{,}897$ m/s

6.22 $\theta = 26{,}6°$

6.23 −10 m/s

6.24 8,8 m/s

6.25

a) 9 m/s

b) 15 J

6.26

a) −1 m/s

b) 60 J

c) se perdió el 11,11%

6.27 $E_f / E_i = 8{,}9451 \times 10^{-2}$

6.28

a) −12,87 N s

b) −514,8 N

6.29

a) 22,5 kg m/s

b) 22,5 kg m/s

c) 6,7499 m/s, −6,2501 m/s

6.30 $v_{bala} = 262{,}60$ m/s; $P_f = 11{,}029$ kg m/s

6.31 625 N

6.32 −5,05 m/s

6.33 (0, 4,3636 m, 0)

6.34

a) 0,5 m

b) 0,571 m

6.35 $x = 0{,}56$ m, $y = z = 0$

6.36 86,803 m/s

6.37 (−1,66, −1,4)

6.38 3,83 m

6.39 $P_1 = 102\,000$ kg km/h; $P_2 = 150\,000$ kg km/h; $x_{cm} = 18{,}11$ km; $v_{cm} = 136{,}22$ km/h

6.40 Es la misma velocidad del problema anterior

6.41 0,8833 m

6.42 −0,56604 m/s

6.43 $5{,}4486 \times 10^{-4}$

6.44 (0,0)

6.46 (0, 1,2732) cm

6.47 (−1,2732, 1,2732) cm

6.48 (1,2732, −1,2732) cm

6.49 (0, 0) cm

6.50 (0, 0) cm

6.51 37,55 millas/hora

6.52 $v_0 = 2{,}214$ m/s; $v_f = 0{,}4077$ m/s

6.53 $v_1 = 2{,}711$ m/s; $v_2 = 2{,}4897$ m/s; $v_{2f} = 5{,}4222$ m/s

6.54 $v_i = 40{,}125$ m/s

Unidad 7

7.1 48 N, 64 N

7.2 170,13 N, 137,64 N,100 N

7.3 250 N m

7.4 280 N m

7.5 0

7.6 207,85 N m

7.7 $\vec{\tau} = -220\text{ Nm}\hat{i} + 200\text{ Nm}\hat{j} + 48\text{ Nm}\hat{k}$

7.8 10 Nm

7.10 105 N, 495 N

7.11 $A = B = 144{,}5$ N

7.12 $x = 0{,}66$ m

7.13 14,7 N

7.14 $F = 20$ N, $\tau = -0{,}8$ Nm

7.15 0,67 m

7.16 12 Nm

7.17 $I = \frac{1}{12}Mb^2$

7.18 $I_x = 3{,}2$ kg m^2, $I_y = 1{,}6$ kg m^2

7.19 $I_x = 0{,}026$ kgm^2, $I_y = 0{,}011$ kgm^2

7.20 −6,5 rad/s^2, 112,2 rev

7.21 $v_{CM} = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + I/MR^2}}$

7.22 $h = 7{,}65$ m

7.23 $h = 10{,}20$ m

7.25 $h = 7{,}1429$ m

7.26 194,16 rad/s

7.27 7,5385 m/s^2

7.28 347,87 Nm

7.29

a) −418,88 N m

b) 872,6 N m

c) 456,91 W

7.30

a) 3,5 m/s^2

b) 23,33 rad/s^2

c) 0,7 N

d) 4,18 m/s, 27,88 rad/s

7.31 20,25 J

7.32 3,08 m/s

7.33 2,98 m/s

7.34 0,993 rad/s

7.35

a) 9 kg m^2

b) $-4t/9$

c) $100 - 4t^2/9$

d) 28 rad/s

e) $100t - 4t^3/27$

f) 900 kg m^2/s

g) 252 kg m^2/s

7.36 Aro: 15,65 m/s; disco: 18,07 m/s; esfera: 18,70 m/s

7.38 418,8 kg m^2/s

7.41 25 kg m^2

7.42 11,304 N

7.43 1000,2 m/s

7.44 29 días

7.45 0,907 g



7.46 El periodo de rotación del planeta Beta es de 3,3 años

7.47

a) 5 600 m/s

b) 3,97 h

c) 740 N

7.48 $1{,}99 \times 10^{30}$ kg

7.49 1 kg

7.50 $P_T = 278{,}85\ P_O$, la masa es la misma.



Clasificación periódica

Problema resuelto

En la fabricación de materiales para la electrónica se utiliza la combinación de un elemento del grupo 13 con un elemento de la familia 15, ¿cuál opción menciona estos elementos?

a) Y y As
b) Ga y As
c) Sc y V
d) Al y Ga

Respuesta

b) El galio pertenece a la familia 13 y el arsénico a la 15.

Problema resuelto

La combinación del aluminio y el oxígeno forma el óxido Al_2O_3. ¿Cuál de los siguientes elementos formaría un compuesto con el mismo tipo general de fórmula X_2O_3?

a) C
b) Ar
c) B
d) Zn

Respuesta

c) El boro (B) pertenece a la misma familia que el aluminio, por lo que su comportamiento es similar.

Problema resuelto

Escribe el símbolo del elemento que corresponda a la descripción. El de mayor número atómico y el de menor número atómico.

Descripción	Mayor número atómico	Menor número atómico
Metal alcalino		
Halógeno		
Metal alcalinotérreo		
Lantánido		
Elemento del grupo 14		
Elemento de transición del 4° periodo		
Gas noble		

Respuesta

Descripción	Mayor número atómico	Menor número atómico
Metal alcalino	Fr (Z = 87)	Litio (Z = 3)
Halógeno	At (Z = 85)	F (Z = 9)
Metal alcalinotérreo	Ra (Z = 88)	Be (Z = 4)
Lantánido	Lu (Z = 71)	La (Z = 57)
Elemento del grupo 14	Pb (Z = 82)	C (Z = 6)
Elemento de transición del 4° periodo	Zn (Z = 30)	Sc (Z = 21)
Gas noble	Rn (Z = 86)	He (Z = 2)

Problema resuelto

¿Cuál de las siguientes opciones presenta menor número de protones que de electrones?

a) ${}^{33}_{13}D^{+}$
b) ${}^{26}_{13}D$
c) ${}^{30}_{13}D^{2+}$
d) ${}^{26}_{13}D^{3-}$

Respuesta

La opción correcta es d) porque tiene 13 protones (número atómico) y 16 electrones, el superíndice 3– indica que ganó tres electrones, por tanto el resultado es 16 electrones.

Problema resuelto

Completa la información que falta en el siguiente cuadro:

Partícula*	Número atómico	Número de masa	Número de protones	Número de neutrones	Número de electrones
$^{14}_{7}N^{3+}$		14	7		
$^{19}_{9}F^{-}$			9	10	
$^{28}_{14}Si$	14			14	
$^{32}_{16}S^{2-}$	16	32			
$^{52}_{24}Cr^{3+}$		52	24		

*El término partícula se utiliza en este problema para designar diferentes entidades elementales: átomos, moléculas, iones, etcétera.

Respuesta

Partícula*	Número atómico	Número de masa	Número de protones	Número de neutrones	Número de electrones
$^{14}_{7}N^{3+}$	7	14	7	7	4
$^{19}_{9}F^{-}$	9	19	9	10	10
$^{28}_{14}Si$	14	28	14	14	14
$^{32}_{16}S^{2-}$	16	32	16	16	18
$^{52}_{24}Cr^{3+}$	24	52	24	28	21

Problema resuelto

Identifica las partículas que pertenecen a los isótopos que se presentan en la tabla siguiente:

Isótopo	Protones	Neutrones	Electrones	Partícula
Q	9	10	10	
W	16	14	18	
X	13	14	10	

Respuesta

Isótopo	Protones	Neutrones	Electrones	Partícula
Q	9	10	10	F^{-}
W	16	14	18	S^{2-}
X	13	14	10	Al^{3+}

Problema resuelto

El cloro está formado por dos isótopos: 75.5% de ^{35}Cl y 24.5% de ^{37}Cl. Las masas de los núclidos son 34.969 uma y 36.966 uma, respectivamente. ¿Cuál es la masa relativa del cloro?

Respuesta

Se multiplica la masa de cada isótopo por el % de abundancia y se suman los resultados:

$$(34.969 \text{ uma})(75.5/100) + (36.966 \text{ uma})(24.5/100) = 35.46 \text{ uma.}$$

Alerta

No olvides las diferencias que existen entre átomo neutro, anión y catión.

Problema resuelto

Observa los datos de la tabla y con base en ellos responde: ¿cuáles núcleos son isótopos de un elemento químico? y, ¿cuáles núcleos tienen la misma masa?

Núcleo	Protones	Neutrones
O	11	13
P	12	12
Q	12	13

Respuesta

P y Q son isótopos del magnesio y O y P tienen la misma masa.

Problema resuelto

Selecciona las configuraciones electrónicas que representen a los elementos que pertenecen a la misma familia química.

a) [He] $2s^1$
b) He] $2s^2\ 2p^4$
c) [He] $2s^2\ 2p^2$
d) [Ne] $3s^2\ 3p^4$
e) [Ne] $3s^1$
f) [Ne] $3s^2\ 3p^6\ 4s^2$
g) [Ne] $3s^2\ 3p^6\ 4s^1$
h) [Ne] $3s^2\ 3p^6\ 4s^2\ 3d^1$

Respuesta

Son las configuraciones que presentan los incisos b y d, ya que ambas poseen cuatro electrones en el orbital *p*, así como las configuraciones de los incisos a y e, pues ambos tienen un electrón en el orbital *s*.

Problema resuelto

Escribe la configuración electrónica de los iones que forman la familia de los metales alcalinotérreos utilizando el kernel.

Respuesta

Elemento	Número atómico (Z)	Configuración con kernel
Be^{2+}	4	[He]
Mg^{2+}	12	[Ne]
Ca^{2+}	20	[Ar]
Sr^{2+}	38	[Kr]
Ba^{2+}	56	[Xe]
Ra^{2+}	88	[Rn]

Problema resuelto

Escribe la configuración electrónica de los iones que forman la familia de los halógenos utilizando el kernel.

Respuesta

Elemento	Número atómico (Z)	Configuración con kernel
F^-	9	[He] $2s^2\,2p^6$ o [Ne]
Cl^-	17	[Ne] $3s^2\,3p^6$ o [Ar]
Br^-	35	[Ar] $4s^2\,3d^{10}\,4p^6$ o [Kr]
I^-	53	[Kr] $5s^2\,4d^{10}\,5p^6$ o [Xe]
At^-	85	[Xe] $6s^2\,4f^{14}\,5d^{10}\,6p^6$ o [Rn]

Los halógenos tienden a ganar un electrón para alcanzar la configuración del gas noble que termina el periodo en el que se encuentran y lograr mayor estabilidad.

Problema resuelto

Al cobre, plata y oro se les llama elementos de acuñar debido a que se les utiliza en la fabricación de monedas. Indica a qué familia pertenecen, en cuál periodo se encuentran y qué bloque ocupan.

Respuesta

Cu pertenece a la familia 11, periodo 4, bloque *d*.
Ag pertenece a la familia 11, periodo 5, bloque *d*.
Au pertenece a la familia 11, periodo 6, bloque *d*.

Problema resuelto

En el grupo de los no metales varios elementos se encuentran en estado sólido, otros se presentan en estado gaseoso y uno en estado líquido a temperatura ambiente. Consulta las propiedades periódicas y completa la tabla con dicha información.

No metales	Elementos
Estado sólido	
Estado líquido	
Estado gaseoso	

Respuesta

No metales	Elementos
Estado sólido	Carbono, fósforo, azufre, cloro
Estado líquido	Bromo
Estado gaseoso	Nitrógeno, oxígeno, flúor, yodo

Problema resuelto

¿Cuál de las siguientes configuraciones electrónicas representa al elemento con la mayor energía de ionización?

a) [Ar] $4s^2 4p^2$
b) [Ar] $4s^2 3d^{10} 4p^3$
c) [Ar] $4s^2 3d^{10} 4p^5$
d) [Ar] $4s^2 3d^{10} 4p^6$

Respuesta

El c) corresponde al Br con un valor de 1140 kJ/mol y el d) corresponde al Kr con un valor de 1352 kJ/mol; por lo tanto, debe aparecer la opción d), independientemente de la estabilidad de sus compuestos, puesto que sólo se refiere a comparar los valores de la energía de ionización. Es conveniente aclarar que los únicos dos gases nobles que se han logrado hacer reaccionar son el kriptón y el xenón. No obstante, los pocos compuestos obtenidos son sumamente inestables.

Problema resuelto

La energía necesaria para "arrancar" el electrón más externo a cada una de las siguientes partículas B, B^+ y B^{2+} presenta los siguientes valores: EI_1 = 800 kJ/mol; EI_2 = 2430 kJ/mol y EI_3 = 3660 kJ/mol. ¿A qué se debe este aumento de energía?

Respuesta

Cada vez se requiere más energía para eliminar el siguiente electrón porque el primer electrón se elimina del átomo neutro (B = [He] $2s^2 2p^1$). Para eliminar el segundo electrón la energía requerida es más alta porque es un ion positivo, con los electrones más fuertemente unidos al núcleo (B^+ = [He] $2s^2$). Y la tercera energía es mucho más alta porque la atracción de los protones por el último electrón es mucho mayor (B^{2+} = [He] $2s^1$).

$$B\,(g) + \text{energía} \rightarrow B^+\,(g) + 1e^- \qquad EI_1 = 800 \text{ kJ/mol}$$

$$B^+\,(g) + \text{energía} \rightarrow B^{2+}\,(g) + 1e^- \qquad EI_2 = 2430 \text{ kJ/mol}$$

$$B^{2+}\,(g_) + \text{energía} \rightarrow B^{3+}\,(g) + 1e^- \qquad EI_3 = 3660 \text{ kJ/mol}$$

Problema resuelto

¿Cuál de los siguientes átomos tiene el mayor radio?

a) P
b) S
c) O
d) Mg

Respuesta

El magnesio (Mg). Recordemos que el radio disminuye de metales a no metales al aumentar la carga nuclear en el mismo periodo.



El lenguaje científico



Características del lenguaje científico

Podemos comunicarnos y aprender gracias al lenguaje que crea el conocimiento escrito que necesitamos para desenvolvernos en cada momento de nuestra vida. El lenguaje hace que el conocimiento, que es consecuencia de haber obtenido determinados datos e información, se puedan discutir y difundir, contribuyendo a la construcción de nuevo conocimiento.

Por eso podemos decir que el lenguaje es fundamental también en ciencias, no sólo como un medio para llegar a expresarse "adecuadamente", sino también, como un instrumento para construir y expresar las ideas científicas.

Todo tipo de actividad humana especializada, toda materia y campo de estudio, tiene su propio lenguaje. El lenguaje de la ciencia es especial, no sólo por su contenido temático sino por su particular "estilo" especial. El lenguaje es un instrumento útil para crear tanto conocimiento científico como literario. La enseñanza de la química universitaria, dirigida tanto a los futuros estudiantes de química como a aquellos que no van a serlo, debe mostrar que tiene una dimensión lingüística, porque la ciencia ha de poderse comunicar para poder enseñarse (Izquierdo, 2006).

El lenguaje químico es específico, ya que cada símbolo encierra un número elevado de significados, no sólo da nombres a las transformaciones de la materia a nivel macro y microscópico, sino que los registra, codifica y convierte en elementos de pensamiento y comunicación. Es necesario aceptar que hay muchas maneras de "hablar química", ya que lo importante es hacernos comprender.

Algo para recordar: la alquimia

La terminología que emplean los químicos en la actualidad contiene referencias a diversos momentos de la historia de la ciencia.



El estudio de los orígenes del vocabulario químico ha permitido identificar las principales razones por las que la terminología química presenta problemas como la sinonimia[1] o la polisemia, y aquí hay que destacar el papel fundamental que desempeñó la alquimia, cuyo inicio formal se sitúa a principios del siglo IV d. C., y que se considera dio origen a la química.

En términos generales puede decirse que la finalidad de la alquimia era el perfeccionamiento de la materia, un proceso que se creía, ocurría en la Naturaleza, razón por la cual los alquimistas vieron su tarea como la imitación de la naturaleza dentro de las paredes del laboratorio. El conocimiento de la alquimia no estaba destinado al lector eventual u ordinario, es más, el objetivo era desalentarlo mediante "el principio de dispersión", para ocultar con un velo de misterio el conocimiento.

Antes de que se introdujera la moderna notación química, fueron empleados un gran número de signos para representar las sustancias y los procesos experimentales, muchos de ellos procedentes de la alquimia. El simbolismo alquímico era fundamentalmente alegórico e incluía relaciones que no siempre eran fáciles de adivinar incluso los propios adeptos podían efectuar diferentes interpretaciones de un mismo símbolo. La existencia de diversos criterios para nombrar las sustancias provocó la aparición de diferentes nombres para designar una misma sustancia.

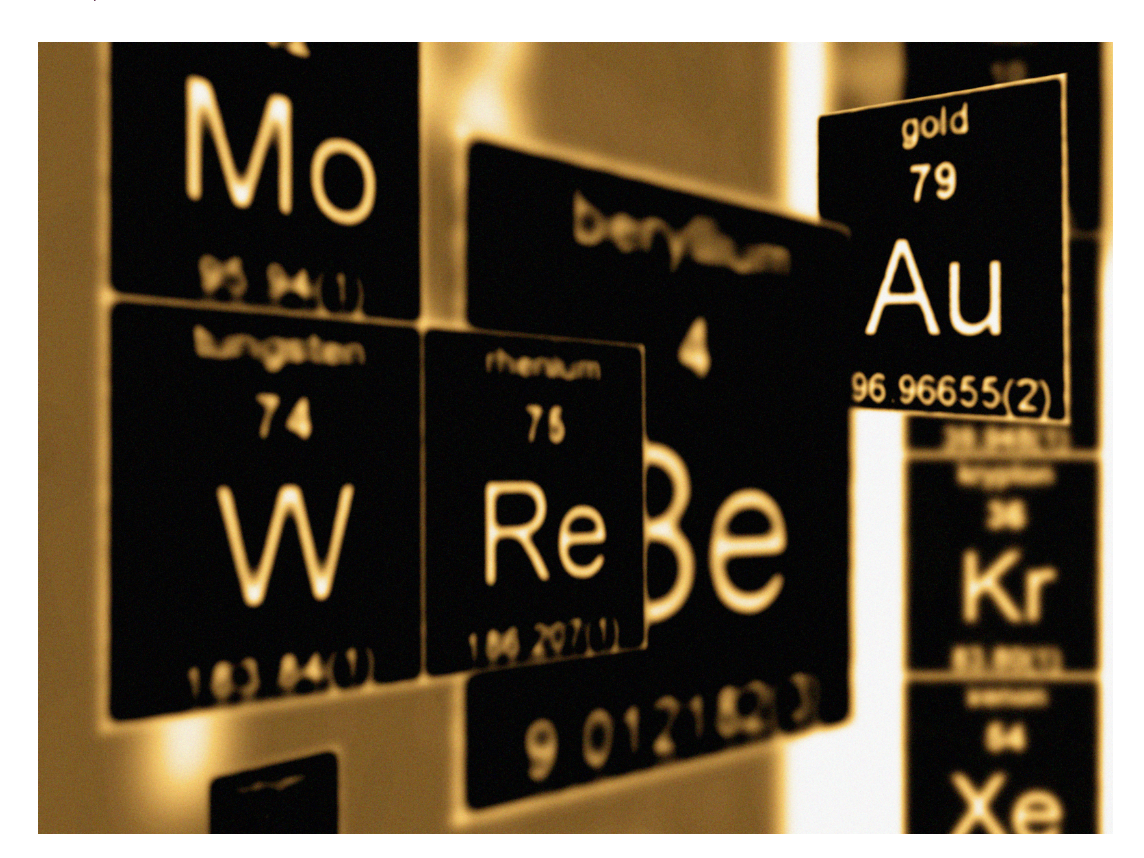
---

[1] Sinonimia: fenómeno lingüístico en que dos o más términos tienen igual significado. Polisemia: Pluralidad de significados de una palabra o de cualquier signo lingüístico.

El lenguaje científico

A medida que la química se consolidaba como disciplina y la comunicación científica se hacía más intensa, fue necesario alcanzar diversos consensos con respecto al uso de la terminología química para eliminar las confusiones ocasionadas por el lenguaje oscuro heredado de los alquimistas. En 1787 un grupo de químicos franceses, encabezados por Lavoisier, dieron un gran paso adelante al publicar el Méthode de nomenclatura chimique y mostrar que era posible nombrar a los compuestos en forma sistemática de acuerdo a sus constituyentes. Se dejó claro que "en la ciencia se espera que el lenguaje se use de manera precisa y no figurativa".

El número de compuestos químicos –y por lo tanto, de términos empleados para nombrarlos– ha pasado de varias decenas de miles a mediados del siglo pasado a algo más de una decena de millones en la actualidad. Tal proliferación de sustancias ha ido acompañada de la aparición de numerosos métodos y reglas de nomenclatura, en especial, adaptados a los diferentes tipos de compuestos, hasta llegar en 1921 al diseño de un nuevo esquema que al final fue aprobado por la Comisión de Nomenclatura Inorgánica dependiente del organismo internacional denominado Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC), que está encargada de los aspectos de la normalización de los nombres, símbolos y nomenclatura de los compuestos químicos y cuya publicación en ediciones es periódica (IUPAC, 1971). Es importante señalar que el objetivo de la IUPAC no es didáctico sino hacer posible la comunicación entre autores, uniformar la designación de compuestos y dar normas claras para nombrar los compuesto nuevos (Casassas, 1998).



Principales gases contaminantes en el Valle de México

La contaminación del aire es un problema que a todos nos concierne. Una persona en reposo respira aproximadamente 22 mil veces al día, lo que corresponde a un consumo diario casi 11 mil litros de aire. Cuando se realiza ejercicio el consumo puede aumentar hasta 25 o 30 veces.

Al respirar se inhala aire pero también los contaminantes que contiene. A continuación abordaremos los principales contaminantes gaseosos de las áreas urbanas.



Los gases contaminantes son, por lo general, más pesados que el aire y tienden a acumularse al nivel del suelo. En las zonas urbanas se encuentran con mayor frecuencia los siguientes gases:

Hidrocarburos (H_XC_X).

Monóxido de carbono (CO).

Óxidos de nitrógeno (NO_X).

Dióxido de azufre (SO_2).

Estos contaminantes son clasificados como primarios. En la atmósfera reaccionan entre sí y con ayuda del efecto de la luz solar forman los contaminantes secundarios que, por lo general, son más nocivos. Uno de éstos es el ozono (O3).

¿Qué propiedades tienen? y ¿cuáles son los efectos nocivos que ocasionan esos gases?

Los **hidrocarburos (H_XC_X),** que constituyen los derivados del petróleo como las gasolinas, diesel, combustóleo y el gas licuado son consumidos, en gran parte por diversos medios de transporte quienes contribuyen a la contaminación del aire.

Los hidrocarburos son gases incoloros, en general más pesados que el aire. Provienen de la evaporación directa y de la combustión incompleta de los motores de combustión interna. Algunos de esos compuestos son cancerígenos.



El **monóxido de carbono (CO)** también es emitido por los motores de combustión interna. Es un gas incoloro, prácticamente sin olor y es un poco más ligero que el aire. Es muy tóxico si se inhala y disminuye la capacidad de oxigenación de la sangre. La intoxicación con este gas varía desde dolor de cabeza, mareos o desmayos y puede ocasionar, en altas concentraciones, la muerte.

Los **óxidos de nitrógeno (NO y NO_2)** son más pesados que el aire y se producen cuando la combustión se lleva a cabo a altas temperaturas. Se emiten en centrales termoeléctricas, refinerías y otras industrias.

El monóxido **(NO)** es un gas incoloro que reacciona rápidamente con el oxígeno del aire y forma el dióxido **(NO_2),** el monóxido provoca irritación de la piel y de las membranas mucosas.

El dióxido de nitrógeno es un gas de color café rojizo. Provoca, dependiendo de su concentración, fatiga, tos, dificultad para respirar, bronquitis y neumonía.

El **dióxido de azufre (SO_2)** es un gas incoloro, más pesado que el aire y de olor sofocante que se emite en la combustión de combustibles fósiles. En presencia de humedad y aire, forma los ácidos sulfuroso y sulfúrico componentes de la lluvia ácida (agua de lluvia que tiene un pH menor a 5.6). Ocasiona irritación de los ojos y aparato respiratorio, dificultad para respirar y edema pulmonar.

El **ozono (O_3)** es un gas más pesado que el aire, de color ligeramente azul. Causa irritación severa en los ojos y en el aparato respiratorio.

Inversión térmica

La concentración de los contaminantes en la atmósfera depende de la velocidad con que los vientos los dispersen, ésta se dificulta en invierno. La inversión térmica es un fenómeno natural que se genera donde el cielo está despejado durante el día con gran radiación solar y las noches son claras. La Tierra, que acumula en el día calor, emite durante la noche, una radiación térmica que se puede considerar como un indicador en el espacio. Parte de esa radiación es absorbida por la atmósfera y los contaminantes presentes, elevando su temperatura.

En una situación normal, la temperatura de la atmósfera disminuye con el aumento de altura sobre el suelo. En el caso de la inversión térmica la temperatura aumenta.

Durante dicho suceso no hay convección de aire y se disminuye considerablemente la dispersión de los contaminantes. Si durante este fenómeno se siguen emitiendo contaminantes su concentración podrá aumentar peligrosamente.

La inversión desaparece cuando recibe radiación solar, sin embargo, a partir de ese momento se empiezan a producir las reacciones fotoquímicas y con ello la generación de ozono.

Para mejorar esta situación se recomienda modificar las condiciones de humedad en el Valle de México; en las regiones lacustres no se presenta el fenómeno de inversión térmica porque el vapor de agua es más ligero que el aire y tiende a ascender, lo que genera la convección. La recuperación de lagos, espejos de agua y la reforestación ayudarían en este sentido. Con respecto a los vehículos automotores se debe insistir en mejorar los combustibles.







Termodinámica

Problema resuelto

Se tiene un sistema hipotético de 10 partículas cuyas velocidades son 1 m/s, 2 m/s, 3 m/s y así sucesivamente. ¿Cuál será la distribución de velocidades? y ¿cómo se esperaría que fuera la velocidad promedio del gas?

Respuesta

Se sustituyen todos los valores en la ecuación 7.22 del libro y se resuelve para cada caso. Los diez resultados se colocan en una gráfica de probabilidad ante velocidad y se obtiene el siguiente perfil:

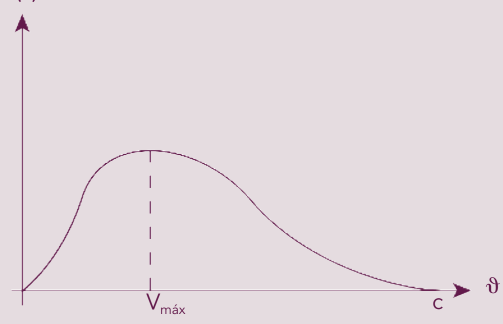


Figura 7.A

El valor que se esperaría para la velocidad promedio sería el del máximo en la curva de distribución.

Problema resuelto

Encuentra la trayectoria libre media de los electrones que pasan por un alambre de cobre si τ (tiempo promedio entre dos choques) es 2.5×10^{-14} y la velocidad de los electrones es 1.6×10^{6} m/s.

Respuesta

Considerando que los electrones dentro del alambre tienen un patrón de movimiento similar al del modelo de gases de Maxwell, la trayectoria libre media se define como la distancia promedio recorrida entre dos colisiones.

$$\lambda = r/Z \tag{7.1}$$

donde r es la distancia recorrida y Z es el número de colisiones. Sin embargo, según la física clásica $r = v/t$, al sustituir este valor en la ecuación anterior y considerando que $Z = 1$.

$$\lambda = 4 \times 10^{-8} \text{ m}$$

Problema resuelto

Un gas se encuentra confinado en un contenedor de 15 L a una presión de 5 atm. Esta misma muestra de gas se comprime hasta alcanzar 0.5 L. ¿Cuál es la presión final de la muestra de gas?

Respuesta

La ecuación 7.24 (ver libro) nos sugiere que la relación entre volumen y presión de un gas siempre es la misma constante, de este modo para la misma muestra en dos estados diferentes:

$$P_iV_i = k$$

$$P_fV_f = k$$

Al igualar ambas expresiones.

$$P_iV_i = P_fV_f$$

Y al despejar P_f

$$P_iV_i/V_f = P_f$$

Al sustituir datos:

$$P_f = 150 \text{ atm}$$

Problema resuelto

Se tiene un gas cuyas condiciones iniciales son P_1=15 atm, T_1 = 300 K, V_1 = 25 L. El gas disminuye su presión a P_2 = 1 atm y T_2 = 273 K, ¿cuál será su nuevo volumen?

Respuesta

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación 7.29 del texto se tiene:

$$V_2 = 341 \text{ L}$$

Problema resuelto

Calcula la densidad de una muestra de kriptón que se encuentra a 200 K, y sometida a 1.5 atm de presión.

Respuesta

En primer lugar se debe involucrar el término de densidad en la ley de los gases ideales. Para ello se recurre a la definición de número de moles *n* = m/M, o sea que el número de moles es igual a la masa de la muestra entre su peso molecular. Sustituyendo este cociente en vez de *n* en la ecuación 7.15 (ver libro) se obtiene:

PV 5 (*m/M*)*RT* (7.2)

Al considerar la definición de densidad como r 5 *m/V*, entonces:

r 5 *PM/RT* (7.3)

y al sustituir los datos:

r 5 7.66 g/L

Problema resuelto

175.0 g de un gas confinados en un recipiente de 7 L ejercen una presión de 3.5 atm a una temperatura de 300 K. ¿Cuál es el peso molecular de dicho gas?

Respuesta

Al despejar la ecuación 7.31 del texto para M se obtiene:

M = *m*(*RT*/*PV*)

y al sustituir datos:

M = 175.7 uma (unidad de masa atómica)

Problema resuelto

A 0 °C y presión de 100 atm el factor de compresibilidad del O_2 es de 0.927. Calcula la masa de O_2 necesaria para llenar un cilindro de gas de 100 L bajo estas condiciones.

Respuesta

$$z = \frac{PV}{nRT} = \frac{PVM}{mRT} \quad (7.4)$$

Donde *m* y *M* representan la masa y la masa molecular del gas, respectivamente.
Se tienen los siguientes valores para las variables:

a) *T* 5 0 °C 5 273 K   *P* 5 100 atm
b) *Z* 5 0.927   *V* 5 100 L
c) *M* 5 32 g/mol   *R* 5 0.082 (atm·L)/(K·mol)

Se desea la masa de gas necesaria para llenar el cilindro, por tanto se despeja *m* de la ecuación 7.4.

$$m = \frac{PVM}{ZRT}$$

Al sustituir los valores anteriores en esta ecuación:

m 5 15 420 g

Problema resuelto

Calcula los coeficientes de la ecuación virial para un mol de gas utilizando la ecuación de van der Waals.

Respuesta

La ecuación 7.34 (ver texto) es una ecuación cúbica que se puede expresar de la siguiente manera:

$$PV = (RT + bP) - \frac{a}{V} + (ab)\left(\frac{1}{V^2}\right) \qquad (7.5)$$

Vamos a considerar que el término *bP* tiene un comportamiento cuasi ideal, entonces se puede reemplazar por:

$$b\left(\frac{RT}{V}\right) \qquad (7.6)$$

y al sustituir en 7.5 se obtiene:

$$PV = (RT) + (bRT - a)\left(\frac{1}{V}\right) + (ab)\left(\frac{1}{V^2}\right) \qquad (7.7)$$

Y por analogía con 7.38 (ver texto) nos da:

$$A = RT \quad B = (bRT - a) \quad C = (ab)$$

Sin embargo el problema de la particularización para cada gas persiste. La investigación sobre la naturaleza íntima de la materia ha obligado a buscar diversas alternativas, esto nos lleva al estado crítico.
La ecuación 7.35 del libro es el polinomio de tercer grado que surge de la definición de volumen de van der Waals. Para un solo mol, la ecuación se puede representar como:

$$V^3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{P}V - \frac{ab}{P} = 0 \qquad (7.8)$$

Al factorizar esta ecuación se debe llegar a un producto notable del tipo:

$$(V\text{-}V_1)(V\text{-}V_2)(V\text{-}V_3) = 0 \qquad (7.9)$$

Donde V_1,V_2 y V_3 son las raíces de la ecuación de tercer grado. Sin embargo, analizando la gráfica en la figura 7.4 del texto, se puede ver que las tres raíces corresponderían a un mismo valor al que se denomina volumen crítico V_c. Entonces la ecuación 7.8 se simplifica y únicamente será $(V\text{-}V_c)^3 = 0$. Ésta se puede desarrollar y se obtiene:

$$V^3 - 3V_cV^2 + 3V_c^2V - V_c^3 = 0 \qquad (7.10)$$

Entonces al aplicar la ecuación 7.8 específicamente al punto crítico y comparando término a término con la ecuación 7.9 se obtienen las tres igualdades siguientes:

$$3V_c = b + \frac{RT_c}{P_c}$$

$$3V_c^2 = \frac{a}{P_c}$$

$$V_c^3 = \frac{ab}{P_c} \qquad (7.11)$$

Y a partir de ellas se pueden encontrar *Pc*, *Tc*, *Vc*, *a* y *b* por despejes normales.

Problema resuelto

Encuentra los valores de *a*, *b* y *R* considerando el estado crítico.

Respuesta

Despejando de las ecuaciones 7.11 se obtiene:

$$a = 3P_cV_c^2$$

$$b = \frac{ZRT}{P}\frac{V_c}{3}$$

$$R = \frac{8P_cV_c}{3T_c} \quad (7.12)$$

Problema resuelto

Según la definición de energía de Maxwell (ecuación 7.12 del libro), ¿cuál será la forma más simple de estimar el valor del *Cv*?

Respuesta

Al multiplicar la ecuación 7.12 del texto en ambos miembros por el número de Avogadro se obtiene:

$$U = \frac{3}{2}RT \quad (7.13)$$

Según la definición de *Cv*, éste es la derivada de la energía respecto a la temperatura a *V* constante, entonces derivando 7.13 respecto a la temperatura obtenemos:

$$Cv = \frac{3}{2}R \quad (7.14)$$

Éste sería el valor de este coeficiente para un gas formado por masas puntuales y es el valor más simple que se puede obtener.

Problema resuelto

¿Cuál será el valor más simple que puede adquirir el *Cp*?

Respuesta

Como se vio en el problema anterior el valor más simple que tiene el *Cv* para un gas formado por masas puntuales es $\frac{3}{2}R$. Al sustituir este valor en la ecuación 7.74 del libro y despejar *Cp*, se obtiene:

$$Cp = \frac{3}{2}R + R$$

$$Cp = \frac{5}{2}R \quad (7.15)$$

Problema resuelto

30 kg de CO_2 a la temperatura inicial de 298 K se comprimen adiabáticamente desde 1.00 bar hasta 10.0 bars. Calcula el trabajo de compresión, las variaciones de energía interna, de entalpía y la temperatura final para el CO_2. Considera $\gamma = 1.28$.

Respuesta

Al aplicar las ecuaciones 7.82:

$$P\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) = cte \ldots\ldots T_1 P_1\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) = T_2 P_2\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)$$

$$T_2 = 298Kx\left(\frac{1}{10}\right)^{\left(\frac{1-1,28}{1.28}\right)} = 493.1K \ldots \Delta T = 195 \text{ K}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \therefore C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = 29.7 \text{ J} \bullet \text{mol}$$

$$W = \Delta U = \frac{3\times10^4}{44}\times 29.7\times 195 \text{ J} = 3948,75 \text{ KJ}$$

$$H = U + PV \ldots\ldots \Delta H = \Delta U + \Delta(PV) = \Delta U + nR\Delta T = (3948.75 + 11054.5) \text{ KJ} = 15003.25 \text{ KJ}$$

Problema resuelto

Una rueda de un automóvil contiene aire a una presión de 320 kPa. Se retira la válvula y se permite que el gas se expanda adiabáticamente contra la presión externa constante de 100 kPa hasta que la presión dentro y fuera de la rueda es la misma. La capacidad calorífica molar del aire es $Cv = 5/2R$. El aire puede considerarse como un gas ideal. Calcula la temperatura final del gas en la rueda, Q, W, ΔU, ΔH por mol de gas en la rueda a 20 °C.

Respuesta

Datos:
$P_i = 320$ kPa
$P_f = 100$ kPa = 0.99 atm
$C_V = 5/2R$
$R = 8.314$ J/kmol
$T_1 = 20$ °C = 293 K
$n = 1$mol (como base de cálculo)

$$320kPa \left| \frac{1000 \text{ Pa}}{1 \text{ kPa}} \right| \frac{9.869 \times 10^{-6} \text{ atm}}{1 \text{ Pa}} \right| = 3.15 \text{ atm}$$

$$Cp - Cv = R$$

$$Cp = R + Cv$$

$$Cp = 8.314 + 20.785$$

$$Cv = 20.785$$

$$Cp = 29.099$$

$$\alpha = \frac{Cp}{Cv} = 1.4$$

$$T_1^{\alpha} P_1^{1-\alpha} = T_2^{\alpha} P_2^{1-\alpha}$$

$$T_2^{\alpha} = \frac{T_1^{\alpha} P_1^{1-\alpha}}{P_2^{1-\alpha 1}}$$

$$T_2 = \sqrt[\alpha]{\frac{293^{1.4}(3.15 \text{ atm})^{-0.4}}{0.99^{-0.4}}}$$

$$T_2 = \sqrt[\alpha]{\frac{2841.94(0.995987)}{1.582}}$$

$$T_2 = \sqrt[\alpha]{1789.213}$$

$$T_2 = 210.53\ K$$

$$\Delta V = -W$$

$$\Delta V = 1714.13\ J$$

$$Q = 0$$

$$\Delta H = Cp\Delta T$$

$$\Delta H = 29.099(210.53 - 293)$$

$$\Delta H = 29.099(-82.47)$$

$$\Delta H = -2399.79\ J$$

$$dV = Cvdt$$

$$dV = 20.785(-82.47)$$

$$dV = 1714.13\ J$$

Problema resuelto

Una masa de 30 g de N_2 se encuentra a una presión de 4 atm y a una temperatura de 315 K y va a pasar a una presión final de 0.2 atm. Calcula el trabajo si:

a) Se efectúa una expansión isotérmica en una etapa cuando la presión final alcanza el valor de la presión de oposición.

b) El proceso se efectúa en 2 etapas a temperatura constante a una presión intermedia de 2 atm.

c) El proceso se efectúa de manera reversible y cuasi estáticamente a temperatura constante.

Supón que el comportamiento de N_2 es ideal. Realiza un bosquejo de diagrama de presión contra volumen para cada uno de estos tres casos.

Respuesta

a)
m = 30 g de N_2
P_1 = 4 atm
T = 315 K
P_2 = 0.2 atm

$$n_{N_2} = 30 \text{ g N}_2 \times \frac{\text{mol}}{28 \text{ g N}_2} = 1.07 \text{ moles}$$

proceso de expansión isotérmica W en etapa 1

$$P_2 = P_{op}$$

$$W = -P_{op}\left(V_2 - V_1\right)$$

$$V_1 = \frac{nRT}{P_1}$$

$$V_1 = \frac{(1.07 \text{ moles})\left(0.082 \dfrac{\text{Latm}}{\text{molK}}\right)(315 \text{ K})}{4 \text{ atm}}$$

$$V_1 = 6.91L$$

$$V_2 = \frac{nRT}{P_2}$$

$$V_2 = \frac{(1.07 \text{ moles})\left(0.082 \dfrac{\text{Latm}}{\text{molK}}\right)(315K)}{0.2 \text{ atm}}$$

$$V_2 = 138.2 \text{ L}$$

$$W = -P_{op}\left(V_2 - V_1\right)$$

$$W = -(0.2 \text{ atm})(138.2 - 6.91) \text{ L}$$

$$W = 26.26 \text{ Latm}$$

$$-26.26 \text{ Latm}\left(\frac{101 \text{ J}}{1 \text{ Latm}}\right) = -2652.26 \text{ J}$$

Respuesta (*continuación*)

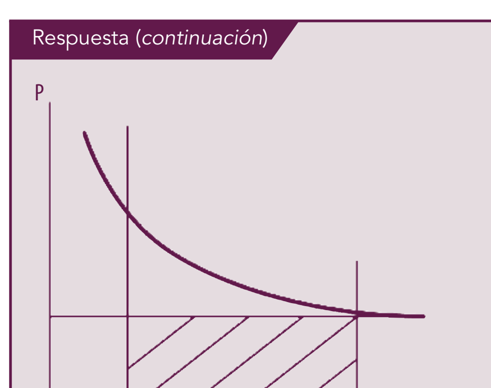


Figura 7.B
Trabajo en una etapa.

b)

W en dos etapas.

n,T = ctes.

T = 315 K

P = 2 atm (presión intermedia)

$$W_1 = -P^1\left(V^1 - V_1\right)$$

$$V^1 = \frac{\left(1.07 \text{ moles}\right)\left(0.082 \frac{\text{Latm}}{\text{molK}}\right)\left(315 \text{ K}\right)}{2 \text{ atm}}$$

$$V^1 = 13.81 \text{ L}$$

$$W_1 = -\left(2 \text{ atm}\right)\left(13.81 - 6.91\right) \text{ L}$$

$$W_1 = -13.8 \text{ Latm}$$

$$-13.8 \text{ Latm}\left(\frac{101 \text{ J}}{\text{Latm}}\right) = -1393.8 \text{ J}$$

$$W_2 = -P_2\left(V_2 - V^1\right)$$

$$W_2 = -\left(0.2 \text{ atm}\right)\left(138.3 - 13.81\right) \text{ L}$$

$$W_2 = -24.898 \text{ Latm}$$

$$-24.898 \text{ Latm}\left(\frac{101 \text{ J}}{\text{Latm}}\right) = -2514.7 \text{ J}$$

$$W = \left(-1393.8 + \left(-2514.7\right)\right) \text{ J}$$

$$W = -3908.5 \text{ J}$$

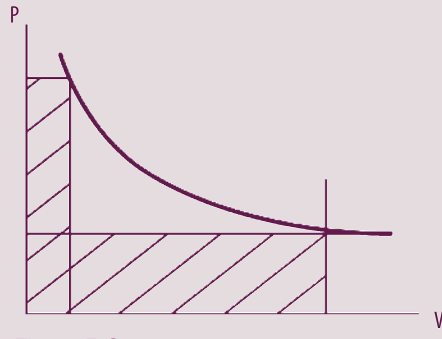


Figura 7.C
Trabajo en dos etapas.

Respuesta (*continuación*)

c) W expansión cuasiestática

$$W = -nRTLn\frac{V_2}{V_1}$$

$$n, T = ctes$$

$$T = 315\ \text{K}$$

$$W = -(1.07\ \text{moles})(8.314\ \text{J/molK})(315\ \text{K})Ln\left(\frac{138.3\ \text{L}}{6.91\ \text{L}}\right)$$

$$W = -8396.77\ \text{J}$$

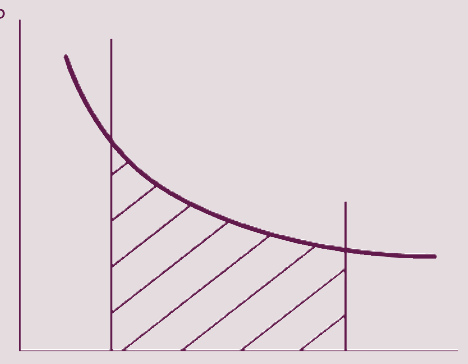


Figura 7.D
Trabajo máximo en proceso reversible.

Problema resuelto

Una masa de 160 g de CH_4 se comprime adiabáticamente desde 0.8 MPa y 800 K hasta 0.1 MPa. Con esa información determina la temperatura final Q, W, ΔU, ΔH si:

a) El proceso se lleva a cabo reversiblemente.
b) El proceso se lleva a cabo de manera no reversible, la presión final es igual a la presión de oposición.

Respuesta

a)

$$m = 160gCH_4$$

$$n = 10\ \text{moles}$$

$$P_1 = 7.89\ \text{atm}$$

$$T_1 = 444.82\ \text{K}$$

$$P_2 = 0.987\ \text{atm}$$

$$T_2 = 280.27\ \text{K}$$

$$\gamma = \frac{9}{7}$$

$$C_{pm} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Respuesta (*continuación*)

$$0.8 \text{ MPa}\left(\frac{\text{atm}}{0.101325 \text{ MPa}}\right) = 7.89 \text{ atm}$$

$$0.1 \text{ MPa}\left(\frac{\text{atm}}{0.101325 \text{ MPa}}\right) = 0.987 \text{ atm}$$

$$K = \frac{TR - 491}{180} \times 100 + 273.15$$

$$K = \frac{800 - 491}{180} \times 100 + 273.15$$

$$K = 444.82$$

$$T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(\frac{P_1}{P_2}\right); T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = (444.82 \text{ K})^{\frac{\frac{9}{7}}{1-\frac{9}{7}}}\left(\frac{7.89 \text{ atm}}{0.987 \text{ atm}}\right)$$

$$T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 9.6813\left(10^{-12}\right) \text{ K}$$

$$T_2^{\frac{\frac{9}{7}}{1-\frac{9}{7}}} = 9.6813\left(10^{-12}\right) \text{ K}$$

$$T_2^{-\frac{9}{2}} = 9.6813\left(10^{-12}\right) \text{ K}$$

$$T_2 = \sqrt[9]{\frac{1}{\left(9.6813 \times 10^{-12} \text{K}\right)^2}}$$

$$T_2 = 280.27 \text{ K}$$

$$W = \frac{nR(T_2 - T_1)}{\gamma - 1}$$

$$W = \frac{(10 \text{ moles})\left(8.314 \text{ J/molK}\right)(280.27 - 444.82) \text{ K}}{\frac{9}{7} - 1}$$

$$W = -47882.40 \text{ J}$$

$$Q = O$$

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = O + (-47882.40 \text{ J})$$

$$\Delta U = -47882.40 \text{ J}$$

$$\Delta H = nCp,m(T_2 - T_1)$$

$$\Delta H = (10 \text{ moles})\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314 \text{ J/molK}\right)(280.27 - 444.82) \text{ K}$$

$$\Delta H = 61563.1 \text{ J}$$

Respuesta (*continuación*)

b)

$$Q = O$$

$$\Delta U = W$$

$$\Delta H = ?$$

$$T_2 = \frac{\left[T_1\left(nC_V mnR\frac{P_{op}}{P_1}\right)\right]}{\left[nC_V m + nR\left(\frac{P_{op}}{P_2}\right)\right]}$$

$$T_2 = \frac{(444.82\ \text{K})\left[(10\ \text{moles})\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314\ \text{J}/\text{molK}\right)\left(\frac{0.987\ \text{atm}}{7.89\ \text{atm}}\right)\right]}{(10\ \text{moles})\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314\ \text{J}/\text{molK}\right)+(10\ \text{moles})\left(8.314\ \text{J}/\text{molK}\right)\left(\frac{0.987\ \text{atm}}{7.89\ \text{atm}}\right)}$$

$$T_2 = 358.34\ \text{K}$$

$$W = nR(T_2 - T_1)$$

$$W = (10\ \text{moles})\left(8.314\ \text{J}/\text{molK}\right)(358.34 - 444.82)\ \text{K}$$

$$W = -7189.95\ \text{J}$$

$$Q = O$$

$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta U = O + (-7189.95\ \text{J})$$

$$\Delta U = -7189.95\ \text{J}$$

$$\Delta H = nC_p m(T_2 - T_1)$$

$$\Delta H = (10\ \text{moles})\left(\frac{9}{2}\right)\left(8.314\ \text{J}/\text{molK}\right)(358.34 - 444.82)\ \text{K}$$

$$\Delta H = -32354.76\ \text{J}$$

Problema resuelto

La capacidad calorífica molar del oxígeno a presión constante para temperaturas en el intervalo comprendido entre 300 y 400 K y para bajas o moderadas presiones se puede aproximar como $Cpm = a + bT$, donde $a = 6.15$ cal mol $^{-1}$ K $^{-1}$ y $b = 0.00310$ cal mol $^{-1}$ K $^{-2}$. Calcula *Q*, *W*, *ΔU*, *ΔH* cuando 2.00 moles de O_2 se calientan reversiblemente de 58 a 158 °C a una presión constante de 100 atm. Supón que el gas se comporta como un gas ideal.

Respuesta

$$dQ_p = C_p dT \cdots \int_1^2 C_p\, dT = \int_1^2 n(a+b)dt = n\left[a(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}b(T_2^2 T_1^2)\right]$$

$$\therefore Q = (2.00\ \text{mol})\left(6.15\ \text{cal}/\text{molK}\right)(100\ K) + \frac{1}{2}\left(0.00310\ \text{cal}/\text{molK}^2\right)(400^2 - 300^2)\ \text{K}^2$$

$$Q = 1447\ \text{cal}$$

$$W = \int_1^2 P\,dv = -P\Delta V = -nR\Delta T = -(2.00\ \text{mol})(1987\ \text{cal}/\text{molK})(100) = -397\ \text{cal}$$

$$\Delta U = Q - W = 1447\ \text{cal} - 397\ \text{cal} = 1050\ \text{cal}$$

$$\Delta H = Q_f = -1447\ \text{cal}$$

Problema resuelto

Un cilindro provisto de pistón contiene 1 m^3 de un fluido a la presión de 2 atm y a una temperatura de 294 K. La presión se aumenta reversiblemente a 105 atm y la temperatura se mantiene constante. Calcula en atm · L el trabajo, suponiendo que el fluido es:

a) Un gas ideal.

b) Un líquido con un coeficiente de compresibilidad $k_T = 50 \times 10^{-12}$ (N/m²) − 1. Halla la variación de volumen de cada fluido.

Respuesta

a) $$W = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = nRT\int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P} = P_1V_1 \ln\frac{P_2}{P_1} = 7921{,}6 \text{ atm} \bullet \text{L}$$

b) $$dV = -k_T VdP \therefore W = k_T VPdP$$

$$W = \frac{k_T V_1}{2}(P_2^2 - P_1^2) = \frac{5{,}066\times10^{-6}\text{atm}^{-1}}{2}(11025-4) = 2.533(11021) = 27.91 \text{ atm} \bullet \text{L}$$

$$dV = k_T dP \cdots\cdots V = V_1 l$$

$$W = k_T V_1 l^{kTP_1}\int_{P_1}^{P_2} l^{kTP} PdP \cdots\cdots W = -V_1 l^{kTP_1}\left[l^{-kTP_2}\left(P_2 + \frac{T}{\kappa T}\right) - l^{-kTP_1}\left(P_1 + \frac{1}{kT}\right)\right]$$

$$W = -1\text{ m}^3 l^{1.0132\times10^{-5}}\left[l^{-5.3193\times10^{-4}}\left(105 + \frac{1}{5.066\times10^{-6}}\right) - l^{-1.01132\times10^{-5}}(\ldots)\left(2 + \frac{1}{5.066\times10^{-6}}\right)\right]$$

$$= -1(1)\left[.999(105 + 197394.39) - .999(2 + 197394.39)\right]$$

$$= -1\left[.999(197499.39) - .999(197396.39)\right]$$

$$= -197301.8906 + 197198.9936 = -102.897 \text{ atm} \bullet \text{L}$$

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

$$2\text{ atm}\left(1\text{ m}^3\right) = 105\text{ atm}V_2 = 0.01904\text{ m}^3 \cdots\cdots 990l = \Delta V$$

$$V_2 = V_1 l^{-kT(P_2-P_1)} = 1l^{-5.066\times10^{-6}(103atm)} = l^{-5.21798\times10-4} = 999.47l = .53l = \Delta V$$

Problema resuelto

¿Cuál es el valor de la entalpía de formación del agua líquida a 298 K? ¿Cambia si es vapor de agua?

Respuesta

Usando tablas internacionales se obtiene:

$$\Delta H_{fH_2O}(l) 298\text{ K} = -285.83\text{ kJ/mol}$$

$$\Delta H_{fH_2O}(g) 298\text{ K} = -241.81\text{ kJ/mol}$$

La diferencia de ~44 kJ/mol representa la energía de cohesión que mantiene la sustancia en estado líquido.

Problema resuelto

¿Por qué un individuo bosteza? ¿En qué circunstancias lo hace?

Respuesta

El bostezo es un mecanismo al que recurre la naturaleza para introducir una fuerte cantidad de oxígeno dentro de un sistema vivo. En ese sistema se encuentran diversas sustancias que son susceptibles de pasar por un proceso de combustión (carbohidratos, lípidos, etc.), entonces el oxígeno en exceso que se adquiere de un bostezo reacciona con alguna de esas sustancias y produce calor.
Un individuo bosteza principalmente en tres circunstancias:

a) Cuando tiene sueño, pues entonces requiere de calor para entrar en sopor (como los osos).
b) Cuando tiene frío y obviamente necesita cualquier fuente de calor.
c) Cuando tiene hambre y necesita energía extra para llevar a cabo la digestión.

Las reacciones de combustión acompañan a muchos procesos globales, constantemente nos referiremos a ellas.

Problema resuelto

En un proceso multietapas se obtiene que la eficiencia es de 2006/4013. Si los trabajos obtenidos en las diferentes etapas son 1 + 3 + 5 +… (2n − 1) y a su vez los calores obtenidos son 2 + 4 + 6 +… (2n), respectivamente para un número n de etapas. ¿Cuál es el cambio de energía total? A este proceso se le atribuye trabajo y calor producido, en unidades de Joule.

Respuesta

$$\frac{W}{\Delta U}=\frac{W}{W+Q}=\frac{2006}{4013}\rightarrow\frac{W}{Q}=\frac{2006}{2007}$$

Se tiene que

$$\frac{1+3+5+\ldots(2n-1)}{2+4+6+\ldots(2n)}=\frac{2006}{2007}$$

$$1+3+5+\ldots(2n-3)+(2n-1)$$

$$\overbrace{3+5+\ldots(2n-3)}^{2n}\quad\underbrace{1+3+5+\ldots(2n-3)+(2n-1)}_{2n}$$

y asi sucesivamente hasta 2n $\frac{n}{2}$ *veces* $\left(\frac{n}{2}\right)2n=W=n^2$

$$2+4+6+\ldots(2n-2)+(2n)$$

$$\overbrace{4+6+\ldots(2n-2)}^{2n+2}\underbrace{2+4+6+\ldots(2n-2)+(2n)}_{2n+2}$$

y asi sucesivamente hasta (2n + 2)$\frac{n}{2}$*veces* $=\left(\frac{n}{2}\right)(2n+2)=n(n+1)$

por tanto

$$\frac{n^2}{n(n+1)}=\frac{2006}{2007}=\frac{n}{(n+1)}\xrightarrow[(n+1)=2007]{n=2006}$$

por tanto tenemos que usando la suma de gauss como fue usada anteriormente tenemos

$$\Delta U=Q+W=(1+2+3+\ldots4012)\text{ J}$$

$$\frac{(4012)(4013)}{2}=8050078\text{ J}$$

Problema resuelto*

El Cp para el aluminio en J/mol K es de $20.67 + 12.38 \times 10^{-3}\ T$.

a) Calcula la variación de entropía que sufre un mol de aluminio cuando se calienta de 25 °C a 200 °C.

b) Encontramos el valor de entropía absoluta $\Delta S_{298.15\ k} = 28.35$ J/mol K. ¿Cuál es la entropía absoluta de aluminio a 200 °C?

Respuesta

a) $\int ds = \int_{T_1}^{T_2} \frac{Cp}{T} dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{20.67 + 12.38 \times 10^{-3} T}{T} dT$

$= \int_{T_1}^{T_2} \frac{20.67}{T} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{12 - 38 \times 10^{-3} T}{T} dT$

$\Delta S = 20.67 \ln \frac{T_2}{T_1} + 12.38 \times 10^{-3}(T^2 - T^1)$, sustituyendo

$\Delta S = 20.67 \ln \frac{473\text{ K}}{298\text{ K}} + 12.38 \times 10^{-3}(473\text{ K} - 298\text{ K}) = 11.71\ \text{J}/\text{molK}$

b) $S_{473} = S_{298.15} + (S_{473} - S_{298.15}) = S_{298.15} + \Delta S = 28.35\ \text{J}/\text{molK} + 11.71\ \text{J}/\text{molK} = 40.06\ \text{J}/\text{molK}$

Problema resuelto

Calcula ΔS en la mezcla de 10.0 g de He a 1200 °C y 1.50 bar con 10.0 g de O_2 a 120.0 °C y 1.50 bar.

Respuesta

$\Delta S = nR \ln\left(\frac{na + nb}{na}\right) + nR \ln\left(\frac{na + nb}{nb}\right)$

$P = \text{cte.}$

10 g He

10 g O_2

$na = nHe = \frac{10\text{ g}}{4\ \text{g}/\text{mol}} = 2.5\text{ mol}$

$nb = nO_2 = \frac{10\text{ g}}{32\ \text{g}/\text{mol}} = 0.3125\text{ mol}$

$\Delta S = R\left(na \ln\left(\frac{na + nb}{na}\right) + nb \ln\left(\frac{na + nb}{nb}\right)\right)$

$\Delta S = 8.314\ \text{J}/\text{molK}\left(2.5\text{ mol} \ln\left(\frac{2.5\text{ mol} + 0.3125\text{ mol}}{2.5\text{ mol}}\right) + 0.3125\text{ mol} \ln\left(\frac{2.5\text{ mol} + 0.3125\text{ mol}}{0.3125\text{ mol}}\right)\right)$

$\Delta S = 8.15\ \text{J}/\text{K}$

Problema resuelto

Encuentra ΔS cuando 2.0 moles de O_2 se calientan de 27 °C a 127 °C a una presión constante de 1.00 atm. Use $Cpm = a + bT$, donde $a = 6.15$ cal/mol K y $b = 0.00310$ cal/mol K^2.

Respuesta

$\Delta S = ?$

$n = 2$ moles de O_2

$T_1 = 27$ °C $= 300$ K

$T_2 = 127$ °C $= 400$ K

$P = cte$

$a = 6.15$ cal/mol K

$b = 0.0031$ cal/mol K^2

$$\Delta S = \frac{Cp}{T}dT - V\alpha dP \rightarrow P^\circ = cte$$

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{Cp}{T}dT$$

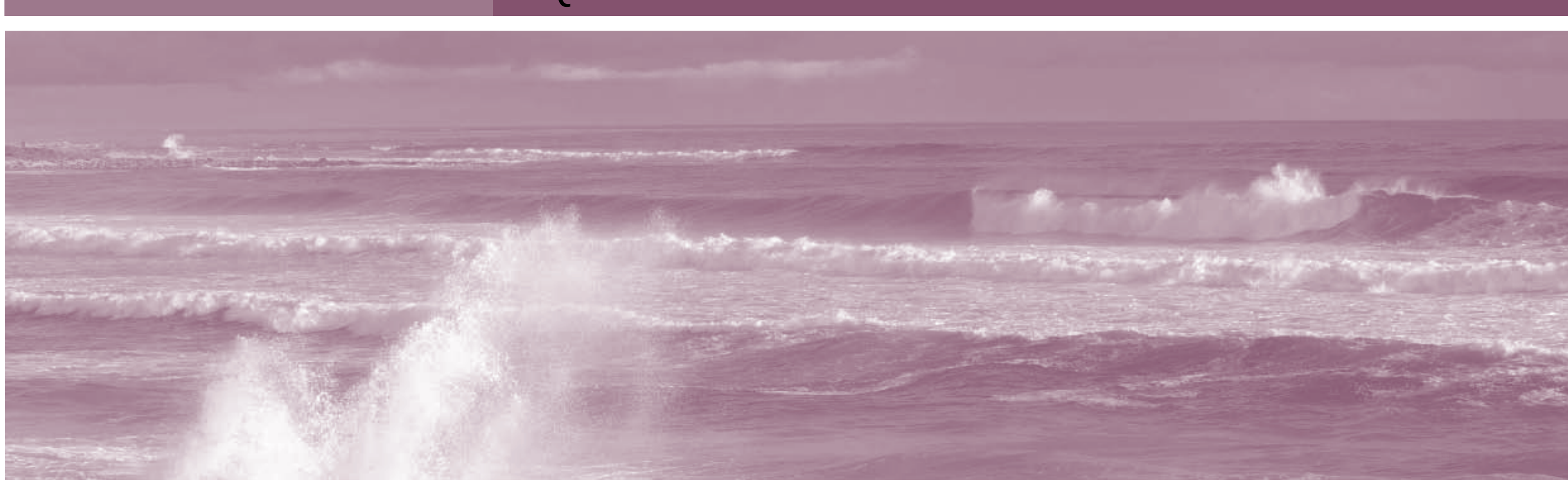
$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} n\left(\frac{a}{T} + b\right)dT$$

$$\Delta S = na\ln\frac{T_2}{T_1} + nb\left(T_2 - T_1\right)$$

$$\Delta S = n\left[a\ln\frac{T_2}{T_1} + b\left(T_2 - T_1\right)\right]$$

$$\Delta S = 2 \text{ moles}\left[6.15\frac{\text{cal}}{\text{molK}}\left(\ln\frac{400 \text{ K}}{300 \text{ K}}\right) + 0.00310\frac{\text{cal}}{\text{molK}^2}\left(400 \text{ K} - 300 \text{ K}\right)\right]$$

$$\Delta S = 4.16\ \frac{\text{cal}}{\text{K}}$$



Equilibrio fisicoquímico

Problema resuelto

Calcula el cambio de entropía del sistema cuando un mol de glicerina líquida a temperatura ambiente de 25 °C, se congela a −25 °C a presión atmosférica constante. En el punto normal de fusión de la glicerina que es a 15 °C, el calor de la glicerina es de 2688 cal/mol y las capacidades caloríficas molares son de 33.8 cal/mol K para la glicerina líquida y 20.1 cal/mol K para la glicerina sólida.

Respuesta

Datos:

$n = 1 \text{ mol}$

$T_1 = 25\ °\text{C}$

$T_2 = -25\ °\text{C}$

$T_{fus} = -15\ °\text{C}$

$\Delta H_{fus} = 2688\ \text{cal}/\text{molK}$

$Cpm(1) = 33.8\ \text{cal}/\text{molK}$

glicerina – líquida

$Cpm(s) = 20.1\ \text{cal}/\text{molK}$

glicerina – sólida

$A(e) \rightarrow \Delta S_1 \quad A(e) \rightarrow \Delta S_2 \quad A(s) \rightarrow \Delta S_3 \ A(s)$

T_i – – – – fusión – – – fusión – – – T_f

$\Delta S_T = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$

$$\Delta S_T = (1\text{ mol})(33.8\ \text{cal}/\text{molK})\ln\left(\frac{288.15\text{ K}}{298.15\text{ K}}\right) + (1\text{ mol})\left(\frac{2688\text{ cal/mol}}{288.15\text{ K}}\right) + (1\text{ mol})(20.1\ \text{cal}/\text{molK})\ln\left(\frac{258.15\text{ K}}{288.15\text{ K}}\right)$$

$\Delta S_T = 5.963\ \text{cal}/\text{K}$

Problema resuelto

2 moles de un gas ideal se comprimen isotérmica y reversiblemente a 100 °C desde 10 atm hasta 25 atm. Calcula los valores de ΔG correspondiente al proceso.
100 °C = 373.15 K
P_1 = 10 atm
P_2 = 25 atm

Respuesta

ΔG = nRT ln (P_2/P_1)
ΔG = (2 moles) (8.314 J/molK) (373.15 K) ln (25 atm/10 atm)
ΔG = 5685.34 J

Problema resuelto

La presión del tetracloruro de carbono vapor es de 10 539 Pa a 290 K y 74 518 Pa a 340 K. La presión de vapor sólido es de 270 Pa a 232 K y 10.92 Pa a 250 K.

a) Calcula ΔH_{vap}, ΔH_{sub}, ΔH_{fus}.
b) Calcula la temperatura de ebullición normal (P = 101 325 Pa).
d) Encuentra la presión y temperatura del a triple.

Respuesta

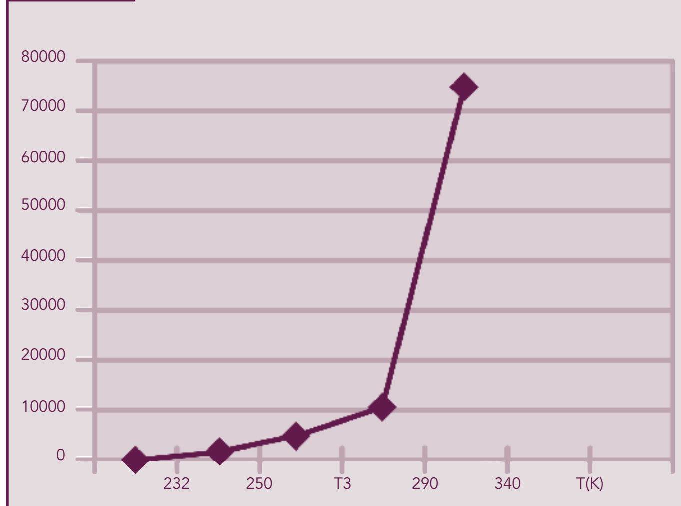


Figura 8.A

$$\ln\left|\frac{P_f}{P_i}\right| = \frac{\Delta H}{R}\left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_f}\right)$$

$$a)\ln\left[\frac{P_5}{P_4}\right] = \frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_5}\right)$$

$$\Delta H_{vap} = \frac{R\ln\left|\frac{P_5}{P_4}\right|}{\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_5}\right)} = \frac{\left(8.314\frac{J}{molK}\right)\ln\left|\frac{74.518}{10.539}\right|}{\frac{1}{290\ K} - \frac{1}{340\ K}} = 32068.34\ J/molK$$

$$\Delta H_{sub} = \frac{R\ln\left|\frac{P_2}{P_1}\right|}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{8.314\frac{J}{molK}\ln\left|\frac{1095}{270}\right|}{\frac{1}{232\ K} - \frac{1}{250\ K}} = 37507.73\ J/molK$$

$$\Delta H_{sub} = \Delta H_f + \Delta H_{vap} \Rightarrow \Delta H_f = \Delta H_{sub} - \Delta H_{vap} = 37507.73 - 32069.34 = 5439.39\ J/molK$$

Respuesta (*continuación*)

b) $\ln\left[\frac{P_{eb}}{P_S}\right] = \frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_{eb}}\right)$

$$\ln\left[\frac{P_{eb}}{P_S}\right] = \frac{\Delta H_{vap}}{RT_5} - \frac{\Delta H_{vap}}{RT_{eb}} \Rightarrow \frac{\Delta H_{vap}}{RT_{eb}} = \frac{\Delta H_{vap}}{RT_5} - \ln\left(\frac{P_{eb}}{P_S}\right)$$

$$T_{eb} = \frac{\Delta H_{vap}}{R\left(\frac{\Delta H_{vap}}{RT_5} - \ln\left(\frac{P_{eb}}{P_5}\right)\right)} = \frac{32068.34 \text{ J/molK}}{\frac{32068.34 \text{ J/molK}}{340 \text{ K}} - 8.314 \text{ J/molK} \ln\left[\frac{101325Pa}{74518Pa}\right]}$$

$$T_{eb} = \frac{32068.34 \text{ J/molK}}{91.7638175 \text{ J/molK}} = 349.47 \text{ K}$$

c)

$$\ln\left[\frac{P_3}{P_2}\right] = \frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right) \Rightarrow \ln|P_3| \ln|P_2| + \frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right)$$

$$\ln\left[\frac{P_3}{P_4}\right] = \frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}\right) \Rightarrow \ln|P_3| \ln|P_4| + \frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}\right)$$

igualamos :

$$\ln[P_2] + \frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right) \Rightarrow \ln|P_4| + \frac{\Delta H_{vap}}{R}\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}\right)$$

$$\frac{\Delta H_{vap}}{RT_3} - \frac{\Delta H_{sub}}{RT_3} \Rightarrow \ln\left|\frac{P_4}{P_2}\right| + \frac{\Delta H_{vap}}{RT_4} - \frac{\Delta H_{sub}}{RT_2}$$

$$\frac{1}{T_3}\left(\frac{\Delta H_{vap} - \Delta H_{sub}}{R}\right) = \ln\left|\frac{P_4}{P_2}\right| + \frac{\Delta H_{vap}}{RT_4} - \frac{\Delta H_{sub}}{RT_2}$$

$$T_3 = \frac{\frac{\Delta H_{vap} - \Delta H_{sub}}{R}}{\ln\left|\frac{P_4}{P_2}\right| + \frac{\Delta H_{vap}}{RT_4} - \frac{\Delta H_{sub}}{RT_2}}$$

$$T_3 = \frac{\frac{32068.34 \text{ J/mol} - 37507.73 \text{ J/mol}}{8.314 \text{ J/molK}}}{\ln\left|\frac{10539}{1095}\right| + \frac{32068.34 \text{ J/mol}}{8.314 \text{ J/molK}(290 \text{ K})} - \frac{37507.73 \text{ J/mol}}{8.314 \text{ J/molK}(250 \text{ K})}} = \frac{-654.24464 \text{ K}}{-2.480732712}$$

$$T_3 = 263.73 \text{ K}$$

$$P_3 = e^{\left[\ln|P_2| + \frac{\Delta H_{sub}}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3}\right)\right]} = e^{7.937977} = 2801.69 \; Pa$$

Problema resuelto

Busca y discute el diagrama de fases del CO_2.

Respuesta

En la figura 8.2 se muestra el diagrama. Éste es uno de los diagramas más sencillos que existen, la única peculiaridad que se debe indicar es que el CO_2 líquido prácticamente no existe en el mundo cotidiano. Como se puede observar el gas pasa a sólido (hielo seco) en condiciones estándar y para poder ver el líquido se debe entrar a condiciones de presión que no se pueden encontrar en la vida normal.

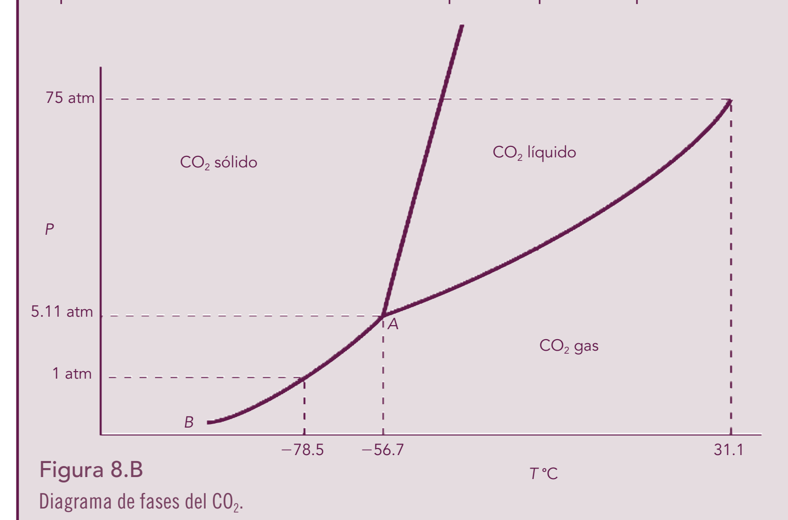


Figura 8.B
Diagrama de fases del CO_2.

Problema resuelto

Muestra y discute el diagrama de fases del H_2O completo (incluidos todos los alótropos del hielo).

Respuesta

Éste es un sistema muy conocido, el del agua, en la figura 8.C se muestra el diagrama completo, es decir incluyendo todas las formas alotrópicas del hielo (debemos recordar que la alotropía se presenta cuando se tiene una misma sustancia, pero sus átomos se acomodan en arreglos diferentes y macroscópicamente da la impresión de tener dos sustancias diferentes aunque sea la misma). Además se debe hacer notar la pendiente negativa de la línea de coexistencia del sólido y el líquido debido a que el volumen del hielo es mayor que el del líquido (por fortuna sucede este fenómeno porque una consecuencia es que el hielo es menos denso que el agua y entonces flota, si fuera al revés el hielo se hundiría en el agua y nuestros océanos serían grandes acumulaciones de témpanos).

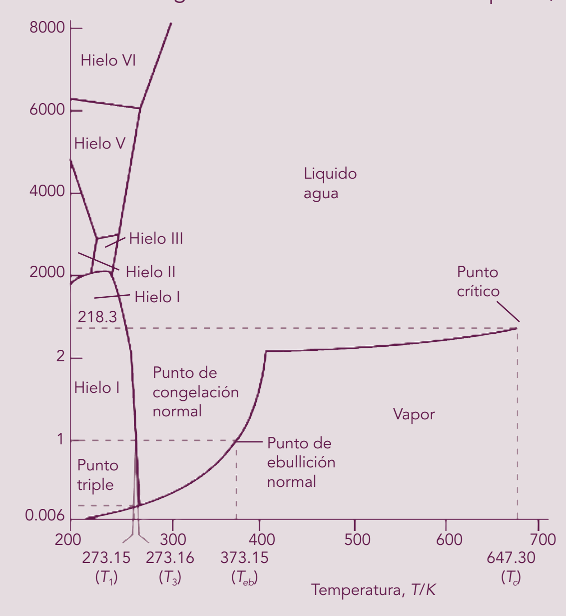


Figura 8.C
Diagrama de fases del agua.

El hielo I es el hielo común que todos conocemos (y disfrutamos en época de calor) los otros son formas diferentes de cristalización que se encuentran a altas presiones (el hielo IV no existe, ya que hubo un informe de su existencia pero resultó falso, al tratar de corregir el error ya se había descubierto el hielo V que sí existe, pero ya no se cambió la numeración).

Problema resuelto

Calcula el punto de ebullición de una disolución acuosa de glicerina que se congela a −1.50 °C.

Respuesta

$$\Delta T = K_{fm} \Rightarrow m = \frac{\Delta T}{Kf} = \frac{1.50\ K}{1.86\frac{KKg}{mol}} = 0.8065\ mol/Kg$$

$$\Delta T = K_{eb} m \Rightarrow \left(0.512\frac{KKg}{mol}\right)\left(0.8065\frac{mol}{Kg}\right) = 0.4129\ K$$

$$\therefore \text{Tebullición} = 100\ °C + 0.4129\ °C = 100.4129\ °C$$

Problema resuelto

El $NO_2(g)$ es una mezcla de $NO_2(g)$ y $N_2O_4(g)$. Si la densidad de esta mezcla es de 2.3 g/L a 74 °C y 1.3 atm, calcula la presión parcial de los gases, la constante de equilibrio, *Kp* y el valor de *ΔGr*.

Respuesta

$$74\ °C = 347.15\ K$$

$$N_2O_4(g) \rightleftarrows 2NO_2(g)$$

Si se considera esta mezcla como un gas ideal:

$$PV = nRT \Rightarrow PV = \frac{m}{V}RT \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT} \Rightarrow C = \frac{PM}{RT}$$

$$M = \frac{eRT}{P} = \frac{\left(2.3\ {}^{g}\!/\!{}_{L}\right)(347.15\ K)\left(0.082\ \frac{Latm}{molK}\right)}{1.3\ atm} = 50.36\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}$$

Pero en una mezcla la masa molar promedio se expresa:

$$M_{T(masa-molar-de-la-mezcla)} = Y_A M_A + Y_B M_{B(fracción-mol)}$$

$$M_{Mezcla} = Y_{N_2O_4} M_{N_2O_4} + Y_{NO_2} M_{NO_2}$$

$$Y_{N_2O_4} + Y_{NO_2} = 1$$

$$50.36\ {}^{g}\!/\!{}_{mol} = Y_{N_2O_4}\left(92\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}\right) + Y_{NO_2}\left(46\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}\right)$$

$$50.36\ {}^{g}\!/\!{}_{mol} = Y_{N_2O_4}\left(92\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}\right) + \left(1 - Y_{N_2O_4}\right)\left(46\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}\right)$$

$$50.36\ {}^{g}\!/\!{}_{mol} = Y_{N_2O_4}\left(92\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}\right) + 46\ {}^{g}\!/\!{}_{mol} - YN_2O_4\left(46\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}\right)$$

$$Y_{N_2O_4}\left(46\ {}^{g}\!/\!{}_{mol}\right) = 4.36$$

$$Y_{N_2O_4} = 0.095$$

$$Y_{NO_2} = 1 - Y_{N_2O_4} = 0.905$$

$$Presión - parcial = Y_A P - mezcla$$

$$P_{N_2O_4} = (0.095)(1.3\ atm) = 0.1235\ atm$$

$$P_{NO_2} = (0.095)(1.3\ atm) = 1.1765\ atm$$

$$K_p = \frac{\left(P_{NO_2}\right)^2}{\left(P_{N_2O_4}\right)} = \frac{(1.1765\ atm)^2}{(0.1235\ atm)} = 11.21$$

$$\Delta G = -RT\ln|Kp| = -\left(8.314\ \frac{J}{molK}\right)(347.15\ K)\ln|11.21|$$

$$= -6975.4\ \frac{J}{mol}$$

Problema resuelto

Examina la siguiente reacción a 25 °C.

$4H_2(g) + CO_2(g) \leftrightarrows CH_4(g) + 2H_2O(l)$

y considera los datos de la tabla:

Sustancia	$\Delta H_F°$ (kJ/mol)	$S°$ (J/mol K)
$H_2(g)$	0	131
$CO_2(g)$	−396	214
$CH_4(g)$	−75	186
$H_2O(l)$	−286	70

Para realizar los siguientes cálculos:
La entalpía de reacción $\Delta H_r°$
$\Delta S_r°$
$\Delta G_r°$

Explica si la reacción es exotérmica y espontánea.

Respuesta

$$\Delta H_r° = [-75 + 2(-286) - 4(0) + 396]$$

$$\Delta H_r° = -251 \text{ kJ/mol}$$

$$\Delta S_r° = [186 + 2(70) - 4(131) - 214]$$

$$\Delta S_r° = -412 \text{ J/mol} \therefore$$

$$\Delta G_r° = \Delta H - T\Delta S$$

$$\Delta G_r° = (-251000 - (298.15K)(-412))$$

$$\Delta G_r° = -128162.2 \text{ J/mol}$$

La reacción es exotérmica ya que $\Delta H < 0$
La reacción es espontánea ya que $\Delta G < 0$

Problema resuelto

Para la siguiente reacción:

$$PCl_5(g) \rightleftarrows PCl_3(g) + Cl_2(g)$$

a) Calcula *Kp* a 298.15 K.
b) Determina el grado de disociación a 298.15 K y 1 bar.
c) Calcula *Kp* a 600 K.
d) Determina el grado de disociación a 600 K y 1 bar.
e) Determina el grado de disociación a 600 K y 10 bars.

Respuesta

a) Se obtiene $\Delta G°$ para la reacción a partir de datos de tablas.

$$\Delta G^0_{reaccion} = \Delta G^0_{PCl} 3(g) + \Delta G^0_{Cl} 2(g) - \Delta G^0_{f\ PCl} 5(g)$$

$$= 1 \text{ mol}(-267.8 \text{ kJmol}^{-1}) + 1\ mol\left(0 \text{ kJmol}^{-1}\right) - 1 \text{ mol}(-305 \text{ kJmol}^{-1})$$

$$\Delta G^0_{reaccion} = 37.2k \text{ J}$$

Respuesta (*continuación*)

a) Como $\Delta G°_{reacción}$ es positivo, la reacción no es espontánea a 298.15 K y 1 bar. *Kp* se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\Delta G^0 = -RT\ln Kp$$

$$Kp = e^{\left(-\Delta G^0/RT\right)} = e^{\left(-(37200\ \text{Jmol}^{-1}/(8.314\ \text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1})(298.15\ \text{K})\right)}$$

$$Kp = 3.04\times 10^{-7}$$

Se observa que *Kp* es muy pequeña, lo cual significa que el equilibrio está desplazado hacia los reactivos.

b) Para determinar el grado de disociación hacemos el siguiente análisis considerando que al inicio hay 1 mol de reactivo (PCl_5):

	PCL_5	PCl_2	Cl_2	Total
Número de moles al inicio	1	0	0	1
Número de moles en el equilibrio	$1-\alpha$	α	α	$1-\alpha+\alpha+\alpha$ $=1+\alpha$

$$Kp = \frac{P_{PCl}3P_{Cl}2}{P_{PCl5}}$$

$$Kp = \frac{x_{PCl}3P_{total}x_{Cl}2P_{total}}{x_{PCl5}P_{total}} = \frac{x_{PCl}3x_{Cl}2}{x_{PCl5}}P_{total}^{(2-1)} = KxP_{total}^{\Delta n\ gases}$$

En este caso:

$$Kx = \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

$$Kp = \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)}P_{total}^1 = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 3.04\times 10^{-7}$$

de donde obtenemos que $\alpha = 55.51 \times 10^{-4}$, es muy pequeña, por lo que el equilibrio está desplazado hacia los reactivos. De acuerdo con este resultado, en el equilibrio tenemos el siguiente número de moles de cada compuesto:

	PCL_5	PCl_2	Cl_2	Total
Número de moles en el equilibrio	$1-\alpha\approx 1$	$\alpha = 5.51\times 10^{-4}$	$\alpha = 5.51\times 10^{-4}$	$=1+\alpha\approx 1$

Si por cada mol de PCl_5, se obtuvieron 5.51×10^{-4} moles de PCl_3, el rendimiento es casi nulo, la reacción no es espontánea.

c) Ahora vamos a analizar el efecto de la temperatura sobre el equilibrio. Considerando que el cambio de entalpía para la reacción es constante en este intervalo de temperatura, aplicamos la ecuación

$$\ln\frac{Kp_2}{Kp_1} = \frac{\Delta H^0}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$ utilizando el $\Delta H°$ obtenido de tablas:

Respuesta (*continuación*)

$$\ln Kp_2 = \ln Kp_1 + \frac{\Delta H^0}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$$\ln Kp_{600K} = \ln\left(3.04\times 10^{-7}\right) + \frac{87900 \text{ Jmol}^{-1}}{8.314 \text{ JK}^{-1}\text{ mol}^{-1}}\left(\frac{1}{298.15 \text{ K}} - \frac{1}{600 \text{ K}}\right) = 2.8333$$

Al aumentar la temperatura, la constante de equilibrio se incrementó considerablemente debido a que la reacción es endotérmica de acuerdo con el Principio de Le Châtelier.

d) Para obtener el grado de disociación seguimos el mismo procedimiento que en el inciso b):

$$Kp = \frac{\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)}{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)}P^1_{total} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 17$$

$$\alpha = 0.97$$

Este valor de α quiere decir que por cada mol de PCl_5 que se encontraba inicialmente, reaccionan 0.97, de tal manera que en el equilibrio tenemos 0.97 moles de PCl_3 y 0.97 moles de Cl_2 y sólo 0.03 moles de PCl_5 como se resume en la tabla siguiente:

	PCl_5	PCl_3	Cl_2	Total
Número de moles en el equilibrio	$1 - \alpha = 0.03$	$\alpha = 0.97$	$\alpha = 0.97$	$1 + \alpha = 1.97$

El rendimiento de la reacción pasó a ser del 97%.

e) En este inciso analizamos el efecto de la presión sobre esta reacción en el equilibrio, es decir, aplicamos el principio de Le Châtelier.
En la ecuación ΔG° = 2RT 1nKp, observamos que Kp solamente depende de la temperatura, entonces Kp sigue siendo la misma a 10 bars; lo que cambia es Kx. A 600 K tenemos:

$$Kp = KxP^{\Delta n\ gases}_{total}$$

$$Kx = \frac{Kp}{P^{\Delta n\ gases}_{total}} = \frac{17}{10} = 1.7$$

$$Kx = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = 1.7$$

$$\alpha = 0.79$$

El equilibrio se desplaza hacia el reactivo según el principio de Le Châtelier y el rendimiento baja. Dado que al aumentar la presión disminuye el volumen, el equilibrio se desplaza hacia el reactivo debido a que éste ocupa menor volumen como se observa de la estequiometría de la reacción, ya que por dos moles de gases en productos, solamente hay un mol de gas en reactivos. El número de moles de reactivo y productos a 600 K y 10 bars se resume en la siguiente tabla:

	PCl_5	PCl_3	Cl_2	Total
Número de moles en el equilibrio	$1-\alpha = 0.21$	$\alpha = 0.79$	$\alpha = 0.79$	$1+\alpha = 1.79$



Equilibrios ácido-base. Solubilidad y precipitación

Problema resuelto

El amoniaco, cuya fórmula es NH_3, es una base que se utiliza en productos de limpieza para el hogar y en agronomía se emplea como fertilizante, tiene una constante de hidrólisis de 1.58×10^{-5}. Escribe el equilibrio de hidrólisis del amoniaco y su constante de basicidad. Además indica el par conjugado y calcula el valor de pKa para este par ácido- base y expresa Ka.

Respuesta

El amoniaco se hidroliza en el agua de la siguiente manera:

$$\underset{\text{base}}{NH_3(ac)} + H_2O \leftrightarrows \underset{\text{ácido}}{NH_4^+(ac)} + OH^-(ac)$$

El par conjugado será entonces NH_4^+/NH_3. La constante de basicidad Kb, se representa como:

$$Kb = \frac{[NH_4^+][OH^-]}{[NH_3]} = 1.58 \times 10^{-5} = 10^{-4.8}$$

Para calcular pKa se recurre a la relación pKw = pKa + pKb, por tanto:

$$pKa = 14 - 4.8 = 9.2$$

El equilibrio de disociación del ácido NH_4^+ se expresa como:

$$\underset{\text{ácido}}{NH_4^+(ac)} \leftrightarrows H^+(ac) + \underset{\text{base}}{NH_3(ac)}$$

$$Ka(NH_4^+/NH_3) = \frac{[H^+][NH_3]}{[NH_4^+]} = 10^{-9.2}$$

Problema resuelto

El ácido salicílico que se representará por HSal, es un ácido monoprótico de fórmula $C_7O_3H_6$ y de Ka = 1.07×10^{-3}, que se emplea en cosmética para elaborar productos para tratamiento del acné.
Calcula:

a) El coeficiente de disociación del ácido salicílico en una disolución que contiene 1.0 g /L de HSal.
b) El pH de la disolución de HSal 1.0 g/L.
c) El volumen de NaOH 0.1 M necesaria para neutralizar 100 mL de la disolución 1.0 g/L.
d) Explica si la disolución resultante en c) es ácida, básica o neutra.

Respuesta

a) Cálculo del coeficiente de disociación (α)
Para calcular el coeficiente de disociación del ácido salicílico, es necesario calcular su masa molar y su concentración en mol/L. La masa molar = 138 g/mol

$$\text{Cmol/L} = \frac{\dfrac{1.0\text{ g}}{138\ \text{g/mol}}}{1\text{ L}} = 7.25\times10^{-3}\text{M} = 10^{-2.14}\text{M}$$

Mediante la siguiente expresión se calcula el coeficiente de disociación (α):

$$\alpha^2 + \frac{Ka}{C_0}\alpha - \frac{Ka}{C_0} = 0$$

Al sustituir el valor de Ka($1.07 \times 10^{-3} = 10^{-2.97}$) y de la concentración queda como:

$$\alpha^2 + \frac{10^{-2.97}}{10^{-2.14}}\alpha - \frac{10^{-2.97}}{10^{-2.14}} = 0$$

El algoritmo de resolución es:

$$\alpha = \frac{-10^{-0.83} \pm \sqrt{\left(10^{-0.83}\right)^2 + 4\left(10^{-0.83}\right)}}{2}$$

Al resolver el algoritmo se encuentra que la raíz positiva es:

$$\alpha = 10^{-0.49} = 0.318$$

b) Cálculo del pH de la disolución
Al equilibrio:

$$\left|Sal^-\right| = \left|H^+\right| = \alpha C_0$$

Al aplicar logaritmos y multiplicando por −1

$$-\log\left|H^+\right| = -(\log\alpha + \log C_0)$$

$$pH = -(\log 0.318 + \log 7.25\times10^{-3})$$

$$pH = -(-0.49 - 2.14) = 2.63$$

c) Cálculo del volumen de NaOH 0.1 M necesario para neutralizar 100 mL de disolución 1 g/L.
La reacción de neutralización es la siguiente:

Respuesta (*continuación*)

$$HSal(ac) + OH^-(ac) \leftrightarrows Sal^-(ac) + H_2O$$

$n_{(HSal)} = 7.25 \times 10^{-3}$ mol/L $\times$ 0.100 L = 7.25×10^{-4} mol

$$V_{NaOH} = \frac{7.25 \times 10^{-4} \text{ mol} \times 1000 \text{ mL}}{0.1 \text{ mol/L}} = 7.3 \text{ mL}$$

La especie que se obtiene después de adicionar 7.3 mL de NaOH 0.1 M a 100 mL de ácido salicílico 1.0 g/L es el ion salicilato(Sal^-) por lo que el pH será básico.

Problema resuelto

Una disolución acuosa de 0.01 moles de ácido acético en 100 mL de agua, tiene un pH = 2.9. El ácido acético se representará por HAc.

a) Calcula la constante de acidez del ácido acético.
b) ¿A qué concentración molar presentará el ácido acético un 15% de disociación?
c) ¿Qué procedimiento experimental harías para preparar un litro de disolución con la concentración propuesta en b), a partir de la solución inicial?

Respuesta

a) Para calcular la constante de acidez es necesario conocer la concentración del ácido acético en mol/L, por tanto:

$$C_{HAc} = \frac{0.01 \text{ mol}}{0.1 \text{ L}} = 0.1 \text{ M}$$

Cuando se tiene una disolución de ácido acético, se presenta el siguiente equilibrio:

Inicio	**HAc(*ac*)** C_0	$\leftrightarrows$	**H^+(*ac*)**	+	**Ac^-(*ac*)**
Fracción disociada			αC_0		αC_0
Al equilibrio	$C_0 - \alpha C_0$ $C_0(1 - \alpha)$		αC_0		αC_0

Al aplicar la ley de acción de masas y sustituyendo concentraciones al equilibrio, se llega a la expresión:

$$Ka = \frac{\alpha^2 C_0}{(1-\alpha)}$$

Al equilibrio se tiene que:

$$|H^+| = |Ac^-| = \alpha C_0$$

Para calcular la constante de disociación del ácido se requiere conocer el valor de la fracción disociada (α), por lo que:

$$\alpha = \frac{|H^+|}{C_0} = \frac{10^{-2.9}}{10^{-1}} = 10^{-1.9} = 0.013$$

Se sustituye el valor de α en la expresión de la constante de disociación de la manera siguiente:

$$Ka = \frac{\alpha^2 C_0}{(1-\alpha)} = \frac{(0.013)^2 \times 0.1}{1-0.013} = 1.71 \times 10^{-5} = 10^{-4.77}$$

b) Cálculo de la concentración de ácido acético para tener un 15% de disociación:
Al retomar la expresión de la constante de disociación y despejando C_0, se obtiene:

$$Ka = \frac{\alpha^2 C_0}{(1-\alpha)}$$

$$\alpha^2 C_0 = Ka - \alpha Ka$$



Alerta

El pH de la disolución es de 2.9, por lo que $|H^+| = 10^{-2.9}$ M .



Alerta

Se considera un 15% de disociación, por tanto α = 0.15.

Respuesta (*continuación*)

$$C_0 = \frac{Ka - \alpha Ka}{\alpha^2}$$

$$C_0 = \frac{1.71\times10^{-5} - (1.71\times10^{-5}\times0.15)}{(0.15)^2} = 6.46\times10^{-4}M$$

c) Para preparar un litro de disolución de ácido acético 6.46×10^{-4} M, primero se debe calcular el volumen de alícuota que se debe tomar de la disolución 0.1 M, mediante el factor de dilución.

$$C_1V_1 = C_2V_2$$

$$V_2 = \frac{6.46\times10^{-4}M\times1L}{0.1M} = 6.46\times10^{-3}L = 6.5\text{ mL}$$

Entonces, se toman 6.5 mL de ácido acético, y se diluyen a 1 L con agua destilada. En esta disolución, el ácido acético estará un 15% disociado.

Problema resuelto

El formiato de sodio (HCOONa) se emplea en el tratamiento del cuero o como componente en la elaboración de alimento para animales porque mejora la digestión. Se pesa 1 g de formiato de sodio y se lleva a 25 mL con agua destilada. Calcula el pH de la disolución resultante. Ka (del par $HCOOH/HCOO^-$) $= 10^{-3.7}$.

Respuesta

Para calcular el pH de la disolución se necesita conocer su molaridad.
Masa molar de HCOONa = 68 g/mol

$$C_{(HCOON_a)} = \frac{\frac{1\text{ g}}{68\text{ g/mol}}}{0.025\text{ L}} = 0.588\text{ M} = 10^{-0.23}$$

Para seleccionar la fórmula apropiada para el cálculo del pH, recurriremos a la relación $\frac{Kb}{C_0}$.
Si Ka = $10^{-3.7}$, entonces Kb = $10^{-10.3}$

$$\frac{Kb}{C_0} = \frac{10^{-10.3}}{10^{-0.23}} = 10^{-10.07}$$

Como $\frac{Kb}{C_0} \leq 10^{-1}$, se concluye que es una base débil. La fórmula que se aplica es:

$$pH = 7 + \frac{1}{2}pKa + \frac{1}{2}\log C_0$$

$$pH = 7 + \frac{1}{2}(3.7) - \frac{1}{2}\log 0.588$$

$$pH = 8.97$$

Alerta

$Kw = Ka \times Kb = 10^{-14}$.

Problema resuelto

Al disolver en agua 150 mg de una base orgánica de masa molar 36.06 g/mol, hasta obtener 50 mL de disolución, el pH resultó ser de 10.05. Calcula:

a) El pKb y el pKa de dicha base orgánica.
b) El volumen de disolución de ácido clorhídrico 0.1 M que se necesita para neutralizar 10.0 mL de dicha disolución.
c) Explicar si la disolución resultante en b) será ácida, básica o neutra.

Respuesta

a) Cálculo de pKb y pKa de la base orgánica, la cual se representa como B.
Consideremos el siguiente equilibrio de hidrólisis:

	B(*ac*)	+	**H_2O**	⇆	**HB^+(*ac*)**	+	**OH^-**
Inicio	C_0						
Fracción hidrolizada					βC_0		βC_0
Al equilibrio	$C_0 - \beta C_0$ $C_0(1-\beta)$				βC_0		βC_0

La constante de basicidad de la base es:

$$Kb = \frac{[HB^+][OH^-]}{[B]}$$

Al sustituir las concentraciones al equilibrio en la constante de basicidad, Kb:

$$Kb = \frac{(\beta C_0)^2}{C_0(1-\beta)}$$

Al simplificar por C_0:

$$Kb = \frac{\beta^2 C_0}{(1-\beta)}$$

Al equilibrio:

$$|HB^+| = |OH^-| = \beta C_0$$

$$|OH^-| = \beta C_0$$

$$\frac{10^{-14}}{|H^+|} = \beta C_0$$

$$\frac{10^{-14}}{10^{-10.05}} = \beta C_0$$

$$10^{-3.95} = \beta C_0$$

Si $C_0 = \dfrac{\dfrac{0.15\ g}{36.06\ g/mol}}{0.050\ L} = 0.0832\ M = 10^{-1.08}$; entonces

$$\beta = \frac{10^{-3.95}}{10^{-1.08}} = 10^{-2.87} = 1.35 \times 10^{-3}$$

Respuesta (*continuación*)

Al sustituir el valor de β en la expresión de Kb:

$$Kb = \frac{\beta^2 C_0}{(1-\beta)} = \frac{(1.35\times10^{-3})^2\times0.0832}{1-1.35\times10^{-3}} = 1.51\times10^{-7} = 10^{-6.82}$$

pKb = 6.82

Para calcular pKa se recurre a la relación siguiente:

pKa + pKb = 14

Por tanto:
pKa = 14 − pKb
pKa = 14 −6.82 = 7.18
pKa = 7.18

b) Cálculo del volumen de HCl 0.1 M que se requiere para neutralizar 10.0 mL de disolución.
Reacción de neutralización:

$$B(ac) + H^+(ac) \leftrightarrows HB^+(ac) + H_2O$$

Cálculo del número de moles contenidas en 10 mL de disolución 0.0832 M de la base:

$$n_B = 0.0832 \text{mol/L} \times 0.01\,\text{L} = 8.32\times10^{-4}\ \text{mol}$$

Cálculo del volumen de HCl 0.1 M requerido para neutralizar 8.32 × 10^{-4} mol de la especie B.

$$V_{HCl} = \frac{8.32\times10^{-4}\ \text{mol}\times1000\ \text{mL}}{0.1\ \text{mol/L}} = 8.3\ \text{mL}$$

c) De acuerdo con la reacción de neutralización planteada, cuando se han añadido 8.3 mL de HCl 0.1 M, la base orgánica se ha transformado en HB^+ (ácido conjugado), por tanto la disolución será ácida ya que en disolución está presente un ácido débil.

Problema resuelto

Calcula la constante de anfolización del ion monohidrogenocarbonato o bicarbonato. Se proporciona la siguiente información: $pKa's_{H_2CO_3} = 6.3$ y 10.1.

Respuesta

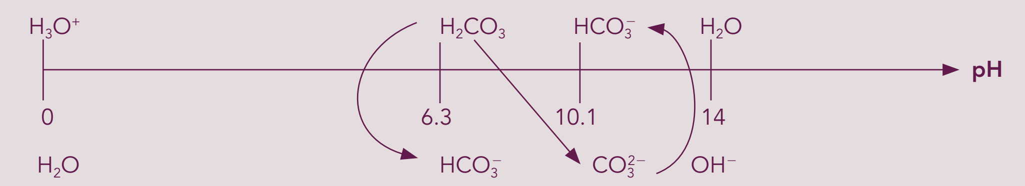
El ácido carbónico es un diácido que presenta los siguientes equilibrios ácido-base:

H_2CO_3 ácido	$\leftrightarrows$	H^+	+	HCO_3^- base	$pKa_1 = 6.3$
HCO_3^- ácido	$\leftrightarrows$	H^+		CO_3^{2-} base	$pKa_2 = 10.1$

Se consideran ahora las constantes de disociación:

$$Ka_1 = \frac{|H^+||HCO_3^-|}{|H_2CO_3|} = 10^{-6.3}; \qquad Ka_2 = \frac{|H^+||CO_3^{2-}|}{|HCO_3^-|} = 10^{-10.1}$$

Situemos los pares ácido-base dentro de una escala de pH:



La ecuación que representa la reacción de anfolización de la especie monohidrogenocarbonato o bicarbonato es la siguiente:

$$H_2CO_3 + CO_3^{2-} \leftrightarrows 2HCO_3^-$$

Se aplica la ley de acción de masas sobre el equilibrio anterior:

$$K_{\text{Anfolización}} = \frac{|HCO_3^-|^2}{|H_2CO_3||CO_3^{2-}|}$$

Si la constante de anfolización se multiplica y divide por $|H^+|$, la igualdad no se altera y hacemos aparecer Ka_2 y Ka_1

$$K_{\text{Anfolización}} = \frac{|HCO_3^-|^2}{|H_2CO_3||CO_3^{2-}|} \times \frac{|H^+|}{|H^+|} = \frac{Ka_1}{Ka_2} = \frac{10^{-6.3}}{10^{-10.1}} = 10^{3.8}$$

$$K_{\text{Anfolización}} = 10^{3.8}$$

Se concluye que la reacción está desplazada a la derecha y que el anfolito es estable en disolución.

Problema resuelto

El dihidrogenofosfato de amonio se utiliza en la manufactura de textiles, papel, madera y fibras vegetales; en inhibidores de la corrosión o como fertilizante para inducir la floración en frutales. Indica los equilibrios existentes en disolución cuando se tiene una disolución de dihidrogenofosfato de amonio en agua. Calcula el pH de una disolución 0.15 M de este compuesto. Se proporcionan los siguientes valores de pKa:

$$pKa's_{H_3PO_4} = 2.2,\ 7.2 \text{ y } 12.3; \quad pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$$

Respuesta

Al disolver el dihidrogenofosfato de amonio en agua, se llevan a cabo las siguientes reacciones:
Disociación de la sal:

$$NH_4H_2PO_4(s) \xrightarrow{H_2O} NH_4 + (ac) + H_2PO_4^-(ac)$$

Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

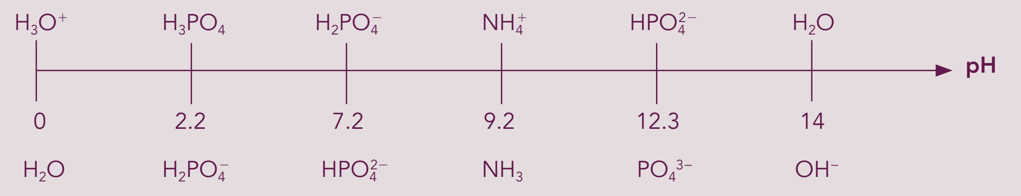
Reacción de disociación del anfolito cuando se comporta como ácido:

$$H_2PO_4^-(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + HPO_4^{2-}(ac)$$

Reacción de hidrólisis del anfolito cuando se comporta como base:

$$H_2PO_4^-(ac) + H_2O \leftrightarrows H_3PO_4(ac) + OH^-$$

Al auxiliarnos de los valores de pKa proporcionados, situaremos los diferentes pares ácido-base dentro de la escala de pH:



Al analizar la escala de pH, se observa la presencia de dos especies que se comportan como ácidos ($H_2PO_4^-$ y NH_4^+) y una como base ($H_2PO_4^-$), entonces el ácido más fuerte y la base más fuerte imponen el pH, en este caso el anfolito impone el pH, entonces:

$$pH = \frac{pKa_1 + pKa_2}{2}$$

$$pH = \frac{2.2 + 7.2}{2} = 4.7$$

$$pH = 4.7$$

Problema resuelto

Calcula el pH de una disolución de acetato de amonio 0.1 M. Considera los siguientes valores de pKa:

$$pKa_{(HAc/Ac^-)} = 4.8; \quad pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$$

Respuesta

Al disolver el acetato de amonio en agua se establecen las siguientes reacciones:

a) Disociación de la sal:

$$NH_4Ac(s) \xrightarrow{H_2O} NH_4^+(ac) + Ac^-(ac)$$

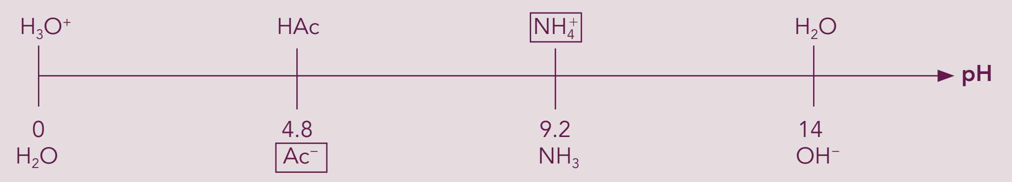
b) Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

c) Reacción de hidrólisis de la base:

$$Ac^-(ac) + H_2O \leftrightarrows HAc(ac) + OH^-$$

Situemos ahora los pares ácido-base dentro de la escala de pH:



De la escala de pH se deduce que, en disolución se encuentra la forma ácida y la forma básica de dos pares ácido-base diferentes, por lo que para calcular el pH aplicaremos la fórmula:

$$pH = \frac{pKa_1 + pKa_2}{2}$$

$$pH = \frac{4.8 + 9.2}{2} = 7.0$$

$$pH = 7.0$$



Alerta

Cuando se disocia un mol de hidrogenofosfato de amonio, genera 2 moles del ion amonio y un mol del ion hidrogenofosfato.

Problema resuelto

El fosfato diamónico (hidrogenofosfato de amonio) se utiliza mezclado con bicarbonato de sodio en polvos para hornear; también se usa en procesos fermentativos y en agronomía. Indica los equilibrios existentes en disolución cuando se tiene una disolución de hidrogenofosfato de amonio en agua. Calcula el pH de una disolución 0.20 M de este compuesto. Se proporcionan los siguientes valores de pKa:

$$pKa's_{H_3PO_4} = 2.2, 7.2 \text{ y } 12.3; \quad pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$$

Respuesta

Al disolver el fosfato diamónico (hidrogenofosfato de amonio) en agua, se llevan a cabo las siguientes reacciones:
Disociación de la sal:

$$(NH_4)_2\ HPO_4(s) \xrightarrow{H_2O} 2NH_4^+ + (ac) + HPO_4^{2-}(ac)$$

Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

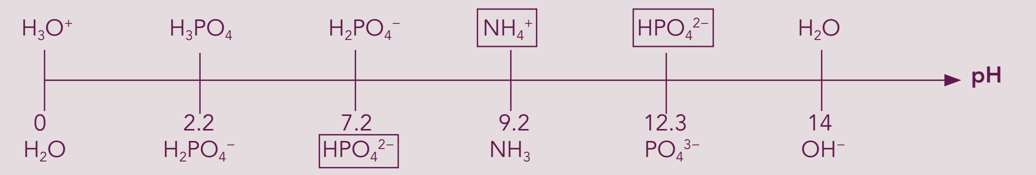
Reacción de disociación del anfolito cuando se comporta como ácido:

$$HPO_4^{2-}(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + PO_4^{3-}(ac)$$

Reacción de hidrólisis del anfolito cuando se comporta como base:

$$HPO_4^{2-}(ac) + H_2O \leftrightarrows H_2PO_4^-(ac) + OH^-$$

Tomando en cuenta los valores de pKa proporcionados, trazaremos una escala de pH para situar les especies con propiedades ácido-base.



Al equilibrio se tienen las siguientes especies en disolución:

Especie	Concentración
NH_4^+ (ácido)	0.4 M
HPO_4^{2-} (anfolito)	0.2 M

Respuesta (*continuación*)

Para calcular el pH evaluamos la fuerza de las especies ácidas o básicas en disolución. Auxiliándonos de la escala se puede inferir que se tienen dos especies ácidas en disolución (NH_4^+ y HPO_4^{2-}) y una especie básica (HPO_4^{2-}), por tanto el pH lo impone el ácido más fuerte y la base más fuerte, es decir, el ion amonio y HPO_4^{2-} considerado como base. Se aplica la fórmula siguiente:

$$pH = \frac{pKa_1 + pKa_2}{2}$$

$$pH = \frac{7.2 + 9.2}{2} = 8.2$$

$$pH = 8.2$$

En este problema hay que hacer notar lo siguiente: la fórmula anterior sólo se debe usar cuando la concentración de las especies es la misma, en este caso la concentración del amonio es el doble de la del hidrogenofosfato por lo que debemos trabajar con las dos expresiones de la ecuación de Henderson-Hasselbalch para calcular el pH de la disolución.

$$pH = 7.2 + \log \frac{\left|HPO_4^{\ 2-}\right|}{\left|H_2PO_4^{\ -}\right|}$$

$$pH = 9.2 + \log \frac{\left|NH_3\right|}{\left|NH_4^{\ +}\right|}$$

Se sustituyen las concentraciones y se suman las dos ecuaciones.

$$pH = 7.2 + \log \frac{0.2}{\varepsilon}$$

$$pH = 9.2 + \log \frac{\varepsilon}{0.4}$$

$$2pH = 16.4 + \log \frac{1}{2} = 16.4 - 0.3$$

$$pH = \frac{16.1}{2} = 8.05$$

$$pH = 8.05$$

Como se observa, cuando las concentraciones de las dos especies son distintas, sí hay diferencia en el valor del pH de la disolución.

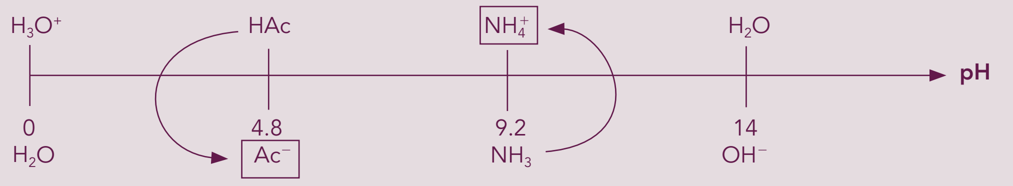
Problema resuelto

De una disolución constituida por una mezcla de ácido acético 0.1 M y amoniaco 0.2 M. Calcula:
a) El pH de la disolución.
b) La constante de la reacción.
c) La concentración de ácido acético al equilibrio.

El pKa del par acético/acetato es de 4.8 y el del amonio/amoniaco es de 9.2.

Respuesta

Se inicia con el planteamiento de la escala de pH:



A través de la escala de pH, se infiere que el ácido acético reacciona con el amoniaco para producir los iones acetato y amonio. Lo anterior se expresa mediante la siguiente reacción, en la que se incluye la tabla de variación de concentraciones de las especies:

	HAc(*ac*)	+	**NH_3(*ac*)**	⇆	**NH_4^+(*ac*)**	+	**Ac^-(*ac*)**
Inicio	0.1 M		0.2 M				
Al equilibrio	$\varepsilon \approx 0$		0.1 M		0.1 M		0.1 M

Al equilibrio se tienen las siguientes especies en disolución:

Especie	Concentración
NH_3(base)	0.1 M
NH_4^+ (ácido)	0.1 M
Ac^- (base)	0.1 M

El pH lo impondrá el ácido más fuerte y la base más fuerte, es decir quedará regulado por el par amonio/amoniaco.

$$pH = pKa + \log\frac{[Base]}{[Ácido]}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{0.1}{0.1} = 9.2$$

$$pH = 9.2$$

Cálculo de la constante de reacción
Al aplicar la ley de acción de masas, la constante de equilibrio de la reacción queda expresada como:

$$K_{reacción} = \frac{[Ac^-][NH_4^+]}{[HAc][NH_3]}$$

Respuesta (*continuación*)

Si la expresión anterior se multiplica y divide por la concentración del protón, la igualdad no se altera y se hacen aparecer las constantes de acidez de los dos pares.

$$K_{reacción} = \frac{|Ac^-||NH_4^+|}{|HAc||NH_3|} \times \frac{|H^+|}{|H^+|} = \frac{10^{-4.8}}{10^{-9.2}} = 10^{4.4} = 2.51 \times 10^4$$

Cálculo de la concentración de ácido acético al equilibrio
Para calcular la concentración de ácido acético al equilibrio, se considerará la constante de equilibrio y la concentración de las otras especies involucradas.

$$K_{reacción} = \frac{|Ac^-||NH_4^+|}{|HAc||NH_3|} = 10^{4.4}$$

$$|HAc| = \frac{|Ac^-||NH_4^+|}{|NH_3|K_{reac.}} = \frac{10^{-2}}{10^{-1} \times 10^{4.4}} = 10^{-5.4} = 3.98 \times 10^{-6} M$$

Problema resuelto

El carbonato de sodio se obtiene industrialmente mediante el proceso Soda Solvay que consiste en tratar piedra caliza (carbonato de calcio) con cloruro de sodio mediante el proceso al amoniaco. Se emplea en la industria siderúrgica, en la elaboración de vidrio, en la industria de los detergentes, cerámica, jabones y limpiadores para el hogar; en textiles, etc.
A 25 mL de una muestra problema que puede contener NaOH, $NaHCO_3$ o Na_2CO_3 en mezcla compatible, se adicionan unas gotas de fenolftaleína. La solución adquiere una coloración rosa, se titula con HCl hasta solución incolora y se adicionan unas gotas de mezcla de indicadores anaranjado de metilo-verde de bromocresol. La solución se torna verde, se continúa la titulación hasta que vire a naranja. En estas condiciones se observa que el volumen del primer punto final de la titulación es menor que el segundo. ¿Qué especies del ácido carbónico se pueden identificar con el procedimiento anteriormente descrito?

Datos:
pKa (H_2CO_3) = 6.3 y 10.1 a I = 0.1 M

Indicador	Intervalo de vire
Fenolftaleína	8.3 - 10
Anaranjado de metilo	3.1 - 4.4
Verde de bromocresol	3.8 - 5.4

Respuesta

Para hacer la predicción de reacciones que ocurren, es necesario construir una escala de pH y localizar los pares ácido-base de los sistemas del ácido carbónico dentro de la misma:

De acuerdo con el enunciado del problema que indica que se tiene una mezcla compatible de carbonato, bicarbonato y sosa, las especies que pueden coexistir en disolución son:

a) Carbonato y sosa.
b) Carbonato y bicarbonato.

Respecto a los volúmenes consumidos de ácido clorhídrico cuando se utilizan los dos indicadores, se hace la siguiente reflexión:

Caso a): Cuando se inicia la adición de clorhídrico, la primera reacción que se lleva a cabo es:

$$OH^-(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows 2H_2O$$

Al terminar la reacción anterior, se dará la reacción entre el carbonato y el ácido clorhídrico:

$$CO_3^{2-}(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows HCO_3^-(ac) + H_2O$$

Respuesta (*continuación*)

Cuando termina la segunda reacción planteada, la fenolftaleína virará del rosa al incoloro. Al introducir la mezcla de indicadores y continuar la titulación con clorhídrico, se lleva a cabo la reacción con el bicarbonato que proviene de la segunda reacción:

$$HCO_3^-(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + H_2O$$

Por tanto, el volumen gastado para el primer punto final (detectado con fenolftaleína) será mayor al segundo (detectado con la mezcla de indicadores).

Caso b): Al iniciar la titulación, se verifica la reacción entre el carbonato y el ácido clorhídrico; la ecuación es la siguiente:

$$CO_3^{2-}(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows HCO_3^-(ac) + H_2O$$

Al finalizar la reacción la fenolftaleína vira del rosa al incoloro, se adiciona entonces la mezcla de indicadores y se continúa la titulación con HCl; la ecuación que representa la segunda reacción es:

$$HCO_3^-(ac) + H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + H_2O$$

En la situación que se presenta en este ejemplo, el aporte de bicarbonato que interviene en la segunda reacción será el que forma parte de la composición de la mezcla y que proviene de la titulación del carbonato, por tanto el volumen consumido en la primera reacción (la cual se detectó el punto final con fenolftaleína), será menor que el segundo (detectado con la mezcla de indicadores).
Conclusión: la muestra contenía una mezcla de carbonato y bicarbonato.

Problema resuelto

¿Cuál es el pH de una disolución amortiguadora constituida por 0.05 M de la especie protonada y 0.04 M de la especie desprotonada? Considera un pKa de 6.09.

Respuesta

Para calcular el pH de la disolución se utiliza la ecuación de Henderson-Hasselbalch.

$$pH = pKa + \log\frac{|Base|}{|Ácido|}$$

$|Base| = 0.04$ M y $|Ácido| = 0.05$ M

$$pH = 6.09 + \log\frac{0.04}{0.05} = 6.0$$

$$pH = 6.0$$

Problema resuelto

HOCN tiene una constante de disociación de 1.2×10^{-4}.

a) Calcula la relación de concentraciones de HOCN y de OCN^- que se requiere para tener una disolución de $[H^+] = 10^{-4}$ M?
b) ¿Cuál será la relación de concentraciones si el pH = 3.50?

Respuesta

Para conocer la relación de concentraciones de HOCN y de OCN^- a pH = 4.0, se recurre a la ecuación de Henderson-Hasselbalch. pKa = 3.92

$$pH = 3.92 + \log\frac{|OCN^-|}{|HOCN|}$$

Respuesta (*continuación*)

$$4.0 = 3.92 + \log\frac{\left|OCN^-\right|}{\left|HOCN\right|}$$

$$10^{0.08} = \log\frac{\left|OCN^-\right|}{\left|HOCN\right|}$$

$$1.2 = \frac{\left|OCN^-\right|}{\left|HOCN\right|}$$

$$\left|OCN^-\right| = 1.2\left|HOCN\right|$$

Si el pH de la disolución es de 3.5, la relación de concentraciones de la forma ácida y básica será:

$$pH = 3.92 + \log\frac{\left|OCN^-\right|}{\left|HOCN\right|}$$

$$3.5 = 3.92 + \log\frac{\left|OCN^-\right|}{\left|HOCN\right|}$$

$$10^{-0.42} = \log\frac{\left|OCN^-\right|}{\left|HOCN\right|}$$

$$0.38 = \frac{\left|OCN^-\right|}{\left|HOCN\right|}$$

$$\left|OCN^-\right| = 0.38\left|HOCN\right|$$

Problema resuelto

Calcula el número de moles de acetato de sodio ($NaH_3C_2O_2$) que se adicionaría a 1.0 L de ácido acético (H_3CCOOH) 0.50 M para preparar una disolución que tuviera un pH 5 4.00? Ka 5 1.8 3 10^{-5}

Respuesta

pKa 5 4.74

$$pH = 4.74 + \log\frac{\left|Ac^-\right|}{\left|HAc\right|}$$

$$4.0 = 4.74 + \log\frac{\left|Ac^-\right|}{0.5\ \text{mol/L}}$$

$$10^{-0.744} = \log\frac{\left|Ac^-\right|}{0.5}$$

$$0.182 = \frac{\left|Ac^-\right|}{0.5}$$

$$\left|Ac^-\right| 0.182 \times 0.5 = 0.091\ \text{mol/LL}$$

Se debe adicionar 0.091 mol de acetato de sodio a un litro de disolución de ácido acético 0.5 M para tener un pH 5 4.0.



Problema resuelto

Una disolución contiene $(NH_4)_2HPO_4$ en concentración 0.2 M y amoniaco en concentración 0.2M, escribe los equilibrios existentes en disolución así como el pH de la disolución resultante. Se proporcionan los siguientes valores de pKa: $pKa's_{H_3PO_4} = 2.2, 7.2$ y 12.3; $pKa_{(NH_4^+/NH_3)} = 9.2$

Respuesta

Al disolver el $(NH_4)_2HPO_4$ en agua, se llevan a cabo las siguientes reacciones:
Disociación de la sal:

$$(NH_4)_2HPO_4(s) \xrightarrow{H_2O} 2NH_4^+(ac) + HPO_4^{2-}(ac)$$

Reacción de disociación de la especie ácida:

$$NH_4^+(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + NH_3(ac)$$

Reacción de disociación del anfolito cuando se comporta como ácido:

$$HPO_4^{2-}(ac) \leftrightarrows H^+(ac) + PO_4^{3-}(ac)$$

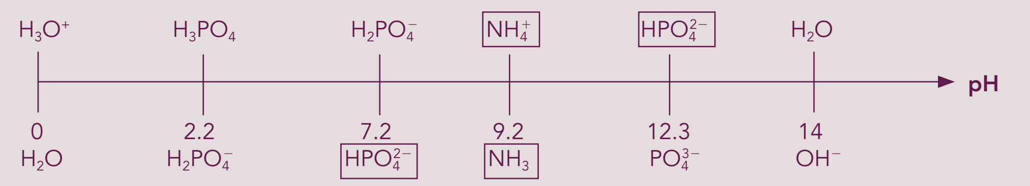
Reacción de hidrólisis del anfolito cuando se comporta como base:

$$HPO_4^{2-}(ac) + H_2O \leftrightarrows H_2PO_4^-(ac) + OH^-$$

Reacción de hidrólisis del amoniaco:

$$NH_3(ac) + H_2O \leftrightarrows NH_4^+(ac) + OH^-$$

Auxiliándonos de los valores de pKa proporcionados, situaremos los diferentes pares ácido-base dentro de la escala de pH. Se destacan las especies en disolución.



Por tanto, al equilibrio se tienen las siguientes especies en disolución:

Especie	Concentración
NH_4^+ (ácido)	0.4 M
NH_3 (base)	0.2 M
HPO_4^{2-} (anfolito)	0.2 M

Para calcular el pH se toma en cuenta el ácido más fuerte y la base más fuerte:
Entre el ion amonio y el hidrogenofosfato (considerado como ácido), el ácido más fuerte es el ion amonio. Entre el ion hidrogenofosfato (considerado como base) y amoniaco, la base más fuerte es el amoniaco, por tanto el pH se encuentra regulado por el par amonio-amoniaco. Para calcular el pH aplicamos la ecuación de Henderson-Hasselbalch.

$$pH = pKa + \log\frac{[Base]}{[Ácido]}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{[NH_3]}{[NH_4^+]}$$

$$pH = 9.2 + \log\frac{0.2}{0.4} = 8.9$$

$$pH = 8.9$$

Problema resuelto

Una muestra de carbonato de calcio impuro, que pesa 0.4348 g se trata con 50.00 mL de ácido clorhídrico 0.1326 M. Después de expulsar por ebullición el dióxido de carbono, el exceso de ácido consume 5.45 mL de base en su valoración por retroceso. La relación de volumen ácido/base es 1.050. Calcula el porcentaje de carbonato de calcio en la muestra.

Respuesta

La reacción que se lleva a cabo entre el carbonato de calcio y el ácido clorhídrico es:

$$CaCO_3(s) + 2H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + Ca^{2+} + 2H_2O$$

La reacción de titulación por retroceso queda representada mediante la siguiente ecuación:

$$H_3O^+ + OH^-(ac) \leftrightarrows H_2O$$

Cálculo de la cantidad de sustancia de ácido clorhídrico que reaccionó con el carbonato de calcio.
Se adicionaron 50.00 mL de HCl 0.1326 M a la muestra problema anterior, entonces:

$$n^0{}_{HCl} = 0.1326\ \mathrm{mol/L} \times 0.050\ \mathrm{L} = 6.63x10^{-3}\ \mathrm{mol}$$

A la muestra de carbonatos se adicionaron 6.63×10^{-3} moles de HCl. De la titulación con NaOH se deducen las moles de HCl que quedaron sin reaccionar con la muestra en estudio. El enunciado del problema indica que la relación

$$\frac{\text{volumen HCl}}{\text{volumen NaOH}} = 1.050$$

$$\text{volumen HCl} = 1.050 \times 5.45\ \mathrm{mL} = 5.72\ \mathrm{mL}$$

Entonces, son 5.72 mL de HCl que quedaron en exceso; se procede a calcular el número de moles contenidos en 5.72 mL de HCl 0.1326M.

$$n_{(HCl)_{exceso}} = 0.00572\mathrm{L} \times 0.1326\ \mathrm{mol/L} = 7.58 \times 10^{-4}\ \mathrm{mol}$$

El número de moles de HCl que reaccionaron con la muestra de carbonato de calcio es:

$$n = n^0 - n_{exceso} = (6.63 \times 10^{-3} - 7.58 \times 10^{-4})\ \mathrm{mol} = 5.87 \times 10^{-3}\ \mathrm{mol}$$

Cálculo del porcentaje de carbonato de calcio en la muestra problema
Se retoma la ecuación de la reacción entre el carbonato de calcio y el ácido clorhídrico:

$$CaCO_3(s) + 2H_3O^+ \leftrightarrows H_2CO_3(ac) + Ca^{2+} + 2H_2O$$

La ecuación muestra la relación estequiométrica entre el carbonato de calcio y el ácido clorhídrico que es 1:2; por tanto, se sabe que 5.87×10^{-3} moles de HCl reaccionaron con 2.935×10^{-3} moles de carbonato de calcio. Con el dato anterior se calcula la pureza del carbonato de calcio. La masa molar del carbonato de calcio es de 100 g/mol.

$$\mathrm{masa}_{CaCO_3} = 2.935 \times 10^{-3}\ \mathrm{mol} \times 100\ \mathrm{g/mol} = 0.2935\ \mathrm{g}$$

$$\%CaCO_3 = \frac{0.2935\ \mathrm{g}}{0.4348\ \mathrm{g}} \times 100 = 67.5\%$$

Problema resuelto

Se preparó una disolución saturada de NH_4Cl añadiendo el reactivo sólido al agua hasta no poder disolverlo más. La mezcla estaba muy fría y tenía una capa de NH_4Cl no disuelto en el fondo. Cuando la mezcla alcanzó la temperatura ambiente, ya no había NH_4Cl sólido presente. Explica qué sucedió. ¿La disolución seguía saturada?

Respuesta

Las disoluciones de sales de amonio en agua son ejemplos de reacciones endotérmicas, es decir, que toman calor del ambiente para poderse disolver, por tal razón, cuando se preparó una disolución saturada de cloruro de amonio, ésta estaba fría. La disolución saturada así formada, coexistía con el exceso de cloruro de amonio sin disolver, cuando se elevó la temperatura hasta alcanzar la ambiente, el cloruro de amonio en exceso, se disolvió.
Para poder saber si la disolución continúa saturada, es necesario añadir cristales de la sal, si se disuelve indica que no está saturada.

Problema resuelto

Si una disolución de cierta sal en agua está saturada a cierta temperatura y se añaden unos cuantos cristales de la sal a la disolución, ¿qué supones que suceda? ¿Qué ocurre si la misma cantidad de cristales de sal se añade a una disolución no saturada? ¿Qué esperas que pase si se baja lentamente la temperatura de esta segunda disolución?

Respuesta

Cuando se añaden unos cuantos cristales de la sal a una disolución saturada de la misma sal, el sólido se irá al fondo del recipiente ya que no es posible disolverlo.
Si la misma cantidad de sal se introduce en una disolución no saturada en la misma sal, ésta se disolverá. Si se baja la temperatura de la disolución anterior, es posible que el sólido se separe de la disolución puesto que se podría formar una disolución saturada. La solubilidad de las sales la mayoría de las veces disminuye con la temperatura.

Problema resuelto

Si sabes que la solubilidad del oxalato de amonio a 25 °C es de 0.525 g por 10 g de agua, ¿cómo prepararías 1 L de solución saturada de oxalato de amonio?

Respuesta

Para preparar un litro de disolución saturada de oxalato de amonio, se requiere pesar 52.5 g de la sal.

Alerta

Cuando se trata de sales que tienen la misma estequiometría, basta con analizar los valores de las constantes del producto de solubilidad para inferir cuál es la sal más soluble. El carbonato de magnesio tiene un valor de constante más grande, por tanto es la sal más soluble.

Problema resuelto

De las siguientes sales, plantea el equilibrio de solubilidad y su constante de equilibrio.
¿Cuál es la más soluble? Se proporcionan los siguientes datos:

$pKs_{CaCO_3} = 8.32; pKs_{BaCO_3} = 8.29; pKs_{MgCO_3} = 4.67$.

a) $CaCO_3$
b) $BaCO_3$
c) $MgCO_3$

Respuesta (*continuación*)

a) $CaCO_3(s) \leftrightarrows Ca^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$

$$Ks = |Ca^{2+}||CO_3^{2-}| = 10^{-8.32}$$

b) $BaCO_3(s) \leftrightarrows Ba^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$

$$Ks = |Ba^{2+}||CO_3^{2-}| = 10^{-8.29}$$

c) $MgCO_3(s) \leftrightarrows Mg^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$

d) $Ks = |Mg^{2+}||CO_3^{2-}| = 10^{-4.7}$

Para saber cuál de las sales es más soluble se calcula su solubilidad.
Al equilibrio: $|M^{2+}| = |CO_3^{2-}|$ = s (solubilidad), si se sustituye "s" en la expresión del producto de solubilidad (Ks):

$$Ks = S^2$$

$$s = \sqrt{Ks}$$

a) $s = \sqrt{10^{-8.32}} = 10^{-4.16} M = 6.92 \times 10^{-5} M$

b) $s = \sqrt{10^{-8.29}} = 10^{-4.145} M = 7.16 \times 10^{-5} M$

c) $s = \sqrt{10^{-4.7}} = 10^{-2.35} M = 4.47 \times 10^{-3} M$

Conclusión: El carbonato de magnesio es la sal más soluble.

Problema resuelto

¿Cuánta agua se necesita para disolver un gramo de las siguientes sustancias?:

a) $CaCO_3$
b) $CaCl_2{\cdot}6H_2O$
c) $CaSO_4$

Datos:
Solubilidad del $CaCl_2{\cdot}6H_2O$ = 74.5 g/100 g de agua a 20 °C

$$pKs_{CaCO_3} = 8.32;\ pKs_{CaSO_4} = 5.04$$

Respuesta

De las tres sales de calcio estudiadas, se observa que el cloruro de calcio es una sal muy soluble y que el carbonato y el sulfato de calcio son poco solubles.

a) Cálculo para determinar la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de $CaCO_3$.
Tomamos como punto de partida el equilibrio de solubilidad de la sal y su correspondiente constante de equilibrio.

$$CaCO_3(s) \leftrightarrows Ca^{2+}(ac) + CO_3^{2-}(ac)$$

$$Ks = |Ca^{2+}||CO_3^{2-}| = 10^{-8.32}$$

La solubilidad de la sal está representada por la concentración del ion calcio y el ion carbonato en la disolución saturada. Si se representa por "s" la concentración de cada ion en la disolución saturada y se sustituye en la ecuación del producto de solubilidad se tiene entonces:

Respuesta (*continuación*)

$$Ks = |Ca^{2+}||CO_3^{2-}| = 10^{-8.32}$$

$$Ks = s^2 = 10^{-8.32}$$

$$s = \sqrt{Ks} = \sqrt{10^{-8.32}} = 10^{-4.16}M = 6.92´10^{-5}M$$

Cálculo de la concentración en g/L:
La masa molar del $CaCO_3$ es de 100 g/mol.

$$C_{CaCO_3}\left(\frac{g}{L}\right) = \frac{6.92\times10^{-5}\ mol}{L}\times\frac{100\ g}{mol} = 6.92\times10^{-3}\ \frac{g}{L}$$

Por tanto, la solubilidad del carbonato de calcio es de 6.92 × 10^{-3}g/L. Con este dato ya es posible calcular la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de sal.

$$V_{H_2O} = \frac{1\ L}{6.92\times10^{-3}\ g}\times1\ g = 144.5\ L$$

Se requiere 144.5 L de agua para disolver 1 g de carbonato de calcio.

b) Cálculo para determinar la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de $CaCl_2{\cdot}6H_2O$.
Se sabe que la solubilidad del $CaCl_2{\cdot}6H_2O$ es de 74.5 g/100 g de agua a 20 °C. Si se considera la densidad del agua como 1 g/mL, la solubilidad de la sal la consideraremos entonces como 74.5 g/100m L de agua.

$$V_{H_2O} = \frac{100\ mL}{74.5\ g}\times1\ g = 1.3\ mL$$

Se requiere de 1.3 mL de agua para disolver 1 g de cloruro de calcio hexahidratado.

c) Cálculo para determinar la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de $CaSO_4$.
El razonamiento es muy similar al efectuado en a).
Equilibrio de solubilidad de la sal:

$$CaSO_4(s) \leftrightarrows Ca^{2+}(ac) + SO_4^{2-}(ac)$$

$$Ks = |Ca^{2+}||SO_4^{2-}| = 10^{-5.04}$$

$$Ks = s^2 = 10^{-5.04}$$

$$s = \sqrt{Ks} = \sqrt{10^{-5.04}} = 10^{-2.52}M = 3.02\times10^{-3}M$$

Cálculo de la concentración en g/L.
La masa molar del $CaSO_4$ es de 136.14 g/mol.

$$C_{CaCO_3}\left(\frac{g}{L}\right) = \frac{3.02\times10^{-3}\ mol}{L}\times\frac{136.14\ g}{mol} = 0.411\ \frac{g}{L}$$

Cálculo de la cantidad de agua que se necesita para disolver 1 g de sal.

$$V_{H_2O} = \frac{1L}{0.411\ g}\times1\ g = 2.43\ L$$

Se requiere de 2.43 L de agua para disolver 1 g de sulfato de calcio.

Problema resuelto

Se desea realizar una separación de hierro y níquel en una muestra en disolución que contiene $|Fe^{3+}| = |Ni^{2+}| = 0.01$ M, por medio de la precipitación de hidróxidos. Resuelve lo siguiente:

a) Calcula el pH de inicio y fin de precipitación de cada hidróxido. Considera una cuantitatividad del 99.9% y los siguientes valores: $pKs_{(Fe(OH)_3} = 37.9$ y $pKs_{(Ni(OH)_2} = 14.3$

b) ¿Es posible hacer una separación de los dos cationes por precipitación de sus hidróxidos correspondientes? ¿Cuáles serían las condiciones de separación?

Respuesta

Cálculo del pH de inicio y fin de precipitación de cada hidróxido.
Para Fe(III):
Equilibrio de solubilidad:

$$Fe(OH)_3(s) \leftrightarrows Fe^{3+}(ac) + 3OH^-(ac)$$

La constante del producto de solubilidad es:

$$Ks = |Fe^{3+}||OH^-|^3 = 10^{-37.9}$$

Cálculo de la concentración de OH^- para que se inicie la precipitación de Fe(III):
De la constante del producto de solubilidad:

$$|OH^-| = \sqrt[3]{\frac{Ks}{|Fe^{3+}|}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-37.9}}{10^{-2}}} = 10^{-11.97}\,M = 1.08 \times 10^{-12}\,M$$

$$pOH = 11.97 \Rightarrow pH = 2.03$$

Cálculo de la concentración de OH^- de fin precipitación de Fe(III) con una cuantitatividad de 99.9%.
Para cumplir con la condición de cuantitatividad, la concentración de Fe(III) debe ser 0.1% de la concentración inicial, es decir 10^{-5} M.

$$|OH^-| = \sqrt[3]{\frac{Ks}{|Fe^{3+}|}} = \sqrt[3]{\frac{10^{-37.9}}{10^{-5}}} = 10^{-10.97}\,M = 1.09 \times 10^{-11}\,M$$

$$pOH = 10.97 \Rightarrow pH = 3.03$$

Para Ni(II) se realiza un razonamiento similar al anterior.
Equilibrio de solubilidad:

$$Ni(OH)_2(s) \leftrightarrows Ni^{2+}(ac) + 2OH^-(ac)$$

La constante del producto de solubilidad es:

$$Ks = |Ni^{2+}||OH^-|^2 = 10^{-14.3}$$

Cálculo de la concentración de OH^- para que se inicie la precipitación de Ni(II):
De la constante del producto de solubilidad:

$$|OH^-| = \sqrt[2]{\frac{Ks}{|Ni^{2+}|}} = \sqrt[2]{\frac{10^{-14.3}}{10^{-2}}} = 10^{-6.15}\,M = 7.08 \times 10^{-7}\,M$$

$$pOH = 6.15 \Rightarrow pH = 7.85$$

Cálculo de la concentración de OH^- de fin precipitación de Ni(II) con una cuantitatividad de 99.9%.
Para cumplir con la condición de cuantitatividad, la concentración de Ni(II) debe ser 0.1% de la concentración inicial, es decir 10^{-5} M.

$$|OH^-| = \sqrt[2]{\frac{Ks}{|Ni^{2+}|}} = \sqrt[2]{\frac{10^{-14.3}}{10^{-5}}} = 10^{-4.65}\,M = 2.24 \times 10^{-5}\,M$$

$$pOH = 4.65 \Rightarrow pH = 9.35$$



Alerta

$pH + pOH = 14$

Respuesta (*continuación*)

Para separar el Fe(III) del Ni(II) se ajusta el pH dentro del siguiente intervalo:

$$3.0 \leq pH \leq 7.9$$

Que corresponde a la situación en la que precipita Fe (III) al 99.9% y se inicia la precipitación de Ni(II). En este caso se utilizaría una disolución amortiguadora de pH, por ejemplo de pH = 6.0 para lograr dicha separación.



Balanceo de ecuaciones químicas por el método de las semirreacciones

La reacción química es un proceso en el cual un sistema, caracterizado por las propiedades físicas y químicas de las especies que lo constituyen, experimenta cambios.

Hay cierto número de reglas y de recomendaciones generales para balancear las ecuaciones que representan a las reacciones redox. Los pasos son los siguientes:

1. Dividir la ecuación general en las dos semirreacciones.
2. Al ajustar cada una de las semirreacciones, considera que debes igualar el número de átomos de cada elemento (excepto oxígeno e hidrógeno).
   - **a)** Nivelar el número de átomos de oxígeno agregando moléculas de agua en el lado de la ecuación donde haya un número menor de átomos de oxígeno.
   - **b)** Igualar el número de átomos de hidrógeno, agregando protones en el lado de la ecuación donde haya un número menor de iones hidronio.
   - **c)** Igualar el número de cargas en ambos miembros de la ecuación, sumando electrones del lado de la ecuación donde la suma de las cargas iónicas es más positiva.
   - **d)** Si la reacción ocurre en medio neutro o básico, remueve los iones hidronio o protones de la ecuación, añadiendo a ambos lados de la misma un número de iones hidroxilo igual al de protones que aparecen en la ecuación. Combina estos iones para formar moléculas de agua y simplifica.
3. Combinar las dos semirreacciones balanceadas e igualar el número de electrones que aparecen en cada semirreacción multiplicando por un factor apropiado.





Óxido-reducción y electroquímica

Problema resuelto

Calcula los estados de oxidación de todos los elementos en los siguientes compuestos:

a) H_2O_2
b) CaC_2
c) H_2SO_4
d) Li_3N
e) MnO_4^-

Respuesta

a) H_2O_2 (peróxido de hidrógeno o agua oxigenada). Tomando en cuenta las reglas 3 y 4, los estados de oxidación del hidrógeno y del oxígeno serán, respectivamente, $+1$ y -1.
b) CaC_2 (carburo de calcio). Esta sustancia se emplea para producir acetileno en el laboratorio y aunque el carbono es bastante inerte en condiciones ordinarias, reacciona a temperaturas elevadas con los metales y semimetales, formando los carburos correspondientes. En el carburo de calcio, al carbono se le asigna un número de oxidación de -1 y al calcio, por pertenecer al grupo 2 de la tabla periódica, de $+2$.
c) H_2SO_4 (ácido sulfúrico). Considerando las reglas 3 y 4, los estados de oxidación del hidrógeno y del oxígeno serán $+1$ y -2, respectivamente. El azufre tiene un estado de oxidación de $+6$.
d) Li_3N (nitruro de litio). Al nitrógeno se le fija un número de oxidación de -3 y al litio, por pertenecer al grupo 1 de la tabla periódica, de $+1$.
e) MnO_{4-} (ion permanganato). Aplicando las reglas 3 y 5, los estados de oxidación del oxígeno y el manganeso son, respectivamente, -2 y $+7$.

Alerta

Antes de resolver los ejercicios, recuerda las reglas para asignar estados de oxidación a los elementos dentro de un compuesto:

1. En los elementos libres, el número o estado de oxidación de cualquiera de sus átomos es cero.
2. En los iones simples (iones de un solo átomo), el número de oxidación es igual a la carga del ion.
3. En la mayor parte de los compuestos que contienen oxígeno, el número de oxidación del elemento es -2 a excepción de los peróxidos, donde es -1.
4. En la mayoría de los compuestos hidrogenados, el grado de oxidación del hidrógeno es $+1$ excepto en los hidruros, donde es -1.
5. En las especies neutras, los números de oxidación de todos los átomos deben sumar cero. En los iones complejos (partículas cargadas que contienen más de un átomo), la suma de los números de oxidación de todos los átomos debe ser igual a la carga del ion.

Problema resuelto

Identifica los oxidantes y los reductores conjugados de las siguientes reacciones redox.

a) $2FeCl_3 + H_2S \leftrightarrows 2FeCl_2 + 2HCl + S$
b) $2HNO_3 + 3H_2S \leftrightarrows 2NO + 3S + 4H_2O$
c) $Na_2Cr_2O_7 + 3SO_2 + H_2SO_4 \leftrightarrows Cr_2(SO_4)_3 + Na_2SO_4 + H_2O$

Respuesta

Los pares redox conjugados son:

a) Fe^{3+}/Fe^{2+} y S/H_2S [también se puede escribir como S(0)/S(−II)]
b) NO_3^-/NO [también se puede expresar como N(V)/N(II)] y S / H_2S [o como S(0) / S(−II)]
c) $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$ [se expresa también como Cr(VI)/Cr(III)] y SO_4^{2-}/SO_2 o S(VI)/S(IV)

Alerta

Se recomienda consultar el libro Rojo de la IUPAC.

Problema resuelto

Balancea por el método de las semirreacciones la ecuación de la siguiente reacción:
$MnO_4^-(ac) + H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + CO_2\uparrow$ (medio ácido)

Respuesta

1) Plantea las dos semirreacciones:

$MnO_4^-(ac) \leftrightarrows Mn^{2+}(ac)$
$H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows CO_2\uparrow$

2) Balancea cada una de las semirreacciones:

$8H^+(ac) + MnO_4^-(ac) \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + 4H_2O$ (balance de masa)
$H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2CO_2\uparrow + 2H^+(ac)$ (balance de masa)
$8H^+(ac) + MnO_4^-(ac) + 5e^- \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + 4H_2O$ (balance de carga y de masa)
$H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2CO_2\uparrow + 2H^+(ac) + 2e^-$ (balance de carga y de masa)

3) Combina las dos semirreacciones balanceadas e iguala el número de electrones que aparecen en cada semirreacción multiplicando la semirreacción del manganeso por 2 y la del ácido oxálico por 5.

$2[8\ H^+(ac) + MnO_4^-(ac) + 5e^- \leftrightarrows Mn^{2+}(ac) + 4H_2O]$
$5[H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2\ CO_2\uparrow + 2H^+(ac) + 2\ e^-]$

$16H^+(ac) + 2MnO_4^-(ac) + 5H_2C_2O_4(ac) + 10e^- \leftrightarrows 2Mn^{2+}(ac) + 10CO_2\uparrow + 8H_2O + 10H^+(ac) + 10e^-$

4) Simplifica la última ecuación:

$6H^+(ac) + 2MnO_4^-(ac) + 5H_2C_2O_4(ac) \leftrightarrows 2Mn^{2+}(ac) + 10CO_2\uparrow + 8H_2O$

Alerta

En la ecuación final ya no deben aparecer los electrones intercambiados.

Problema resuelto

Balancea la ecuación de la siguiente reacción por el método de semirreacciones:
$SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + S^{2-}$ (medio básico)

Respuesta

Plantea las dos semirreacciones:

$SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-}$
$SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-}$

1. Balancea las semirreacciones:

   $H_2O + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2H^+$ (balance de masa)
   $6H^+ + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 3H_2O$ (balance de masa)
   $H_2O + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2H^+ + 2e^-$ (balance de carga y de masa)
   $6e^- + 6H^+ + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 3H_2O$ (balance de carga y de masa)

2. Agrega OH^- a cada lado de la ecuación para mostrar el medio básico:

   $2OH^- + H_2O + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2H^+ + 2e^- + 2OH^-$
   $6OH^- + 6e^- + 6H^+ + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 3H_2O + 6OH^-$

   Simplifica cada semirreacción:

   $2OH^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2e^- + H_2O$ (1)
   $3H_2O + 6e^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 6OH^-$ (2)

3. Combina las dos semirreacciones balanceadas e iguala el número de electrones que aparecen en cada semirreacción multiplicando la semirreacción (1) por 3.

   $3[2OH^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows SO_4^{2-} + 2e^- + H_2O]$ (1)
   $3H_2O + 6e^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 6OH^-$ (2)
   $6OH^- + 3SO_3^{2-} \leftrightarrows 3SO_4^{2-} + 6e^- + 3H_2O$ (1)
   $3H_2O + 6e^- + SO_3^{2-} \leftrightarrows S^{2-} + 6OH^-$ (2)
   $3H_2O + 6OH^- + 3SO_3^{2-} + SO_3^{2-} + 6e^- \leftrightarrows 3SO_4^{2-} + S^{2-} + 6e^- + 6OH^- + 3H_2O$

   Simplifica la última ecuación:

   $4SO_3^{2-} \leftrightarrows 3SO_4^{2-} + S^{2-}$



Alerta

En la ecuación final ya no deben aparecer los electrones intercambiados.



Alerta

Al balancear las ecuaciones por el método de semirreacciones, sigue cuidadosamente los pasos indicados y al final considera lo siguiente: verificar que la ecuación haya quedado balanceada en medio ácido o básico según lo estipule el ejercicio; haz un recuento de los reactivos y productos para corroborar que la ecuación de la reacción en masa efectivamente quedó balanceada y, en su caso, en carga.

Problema resuelto

Desde el siglo pasado, las baterías o acumuladores de plomo−ácido sulfúrico han sido aditamentos que se usan en los automóviles para generar energía. Están constituidos por seis celdas conectadas en serie. Cada celda está conformada por una rejilla de plomo rellena con plomo poroso y otra rejilla de plomo rellena con dióxido de plomo; la celda también contiene ácido sulfúrico que funciona como electrolito. Los electrodos están separados entre sí por espaciadores de fibra de vidrio o madera para evitar que se toquen directamente. Las semirreacciones involucradas en la celda son:

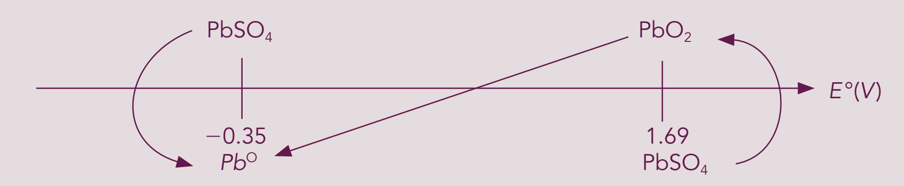
$$PbO_2(s) + 4H^+(ac) + SO_4^{2-}(ac) + 2e^- \leftrightarrows PbSO_4(s) + 2H_2O \qquad E° = 1.69\ V$$

$$PbSO_4(s) + 2e^- \leftrightarrows Pb^0 + SO_4^{2}(ac) \qquad E° = -0.35\ V$$

Señala la reacción que ocurre espontáneamente en la celda.
Indica el ánodo y el cátodo de la celda, el sentido en el que fluyen los electrones y la corriente.
Calcula el potencial estándar de la celda y el potencial total del acumulador.

Respuesta

a) Reacción que ocurre espontáneamente:
Para hacer la predicción de la reacción, traza una escala de potencial:



La reacción no balanceada que se produce espontáneamente es:

$$Pb^0 + PbO_2 \leftrightarrows 2PbSO_4$$

La reacción balanceada es:

$$Pb^0 + PbO_2(s) + 4H+(ac) + 2SO_4^{2-}(ac) \leftrightarrows 2PbSO_4(s) + 2H_2O$$

b) El ánodo de la celda será la rejilla de plomo rellena de plomo poroso debido a que el plomo se oxida. El cátodo será la rejilla de plomo recubierta de dióxido de plomo porque PbO_2 pasa a $PbSO_4$ y se lleva a cabo una reacción de reducción. Los electrones fluyen del ánodo al cátodo y la corriente fluye en sentido inverso.

c) Cálculo del potencial estándar de la celda:
Cálculo del potencial del ánodo:

$$SO_4^{2-}(ac) + Pb^0 - 2e^- \leftrightarrows PbSO_4(s)$$

Al aplicar la ecuación de Nernst:

$$E_{ánodo} = -0.35 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{\left|SO_4^{2-}\right|}$$

Si la concentración de sulfatos es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{anódo} = -0.35\ V$$

Cálculo del potencial en el cátodo:

$$^{4H+}(ac) + SO_4^{2-}(ac) + PbO_2(s) + 2e^- \leftrightarrows PbSO_4(s) + 2H_2O$$

$$E_{cátodo} = 1.69 + \frac{0.06}{2}\log\left|SO_4^{2-}\right|\left|H^+\right|^4$$

Si la concentración de sulfatos y de protones es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{cátodo} = 1.69\ V$$

Alerta

El potencial estándar (E^0) es el potencial de una media reacción bajo condiciones estándar, es decir, concentraciones 1 M, 1 atmósfera de presión y 25 °C.

Respuesta (*continuación*)

La diferencia de potencial de la celda se calcula como:

$$\Delta E^0_{celda} = E^0_{cátodo} - E^0_{ánodo}$$

$$\Delta E^0_{celda} = 1.69 + 0.35 = 2.04\ V$$

$$0_{celda} = 2.04\ V$$

Para el cálculo del potencial total del acumulador se debe considerar que está constituido por seis celdas conectadas en serie, por lo que el potencial de la celda unitaria se multiplica por seis.

$$\Delta E_{acumulador} = 12.24\ V$$

Problema resuelto

Un tipo muy importante de baterías es la de cadmio–níquel, que al igual que las celdas de plomo–ácido sulfúrico utilizadas en los automóviles, son baterías recargables debido a los productos de la reacción espontánea que se adhieren a los electrodos. Estas celdas emplean hidróxido de potasio como electrolito. Las semirreacciones involucradas en la batería cadmio–níquel son:

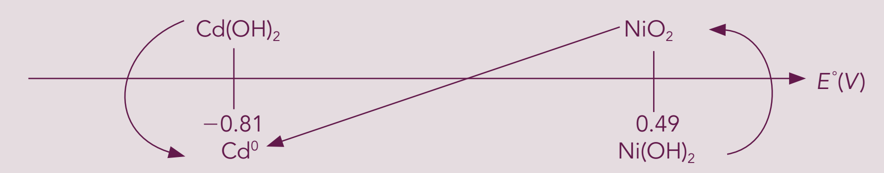
$$NiO_2(s) + 2H_2O + 2e^- \leftrightarrows Ni(OH)_2(s) + 2OH^- \qquad E^0 = 0.49\ V$$

$$Cd(OH)_2 + 2e^- \leftrightarrows Cd^0 + 2OH^- \qquad E^0 = -0.81\ V$$

a) Señala la reacción que ocurre espontáneamente en la celda.
b) Calcula el potencial estándar de la celda.
c) En el comercio se venden baterías cadmio–níquel de 7.2 y 8.4 V, ¿cuántas celdas conectadas en serie conforman cada una de estas baterías?

Respuesta

a) Reacción que ocurre espontáneamente:
Se traza una escala de potencial para hacer la predicción de la reacción:



La reacción no balanceada que se produce espontáneamente es:

$$Cd^0 + NiO_2 \leftrightarrows Cd(OH)_2 + Ni(OH)_2$$

La reacción balanceada es:

$$Cd^0 + NiO_2(s) + 2H_2O \leftrightarrows Cd(OH)_2(s) + Ni(OH)_2(s)$$

b) Cálculo del potencial estándar de la celda:
Cálculo del potencial en el ánodo:

$$Cd^0 + 2OH^- - 2e^- \leftrightarrows Cd(OH)_2(s)$$

$$E^0_{Ánodo} = -0.81 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{|OH^-|^2}$$

Si la concentración de OH^- es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{Ánodo} = -0.81\ V$$

Cálculo del potencial del cátodo:

$$NiO_2(s) + 2H_2O + 2e^- \leftrightarrows Ni(OH)_2(s) + 2OH^-$$

Respuesta (*continuación*)

$$E^0_{Cátodo} = 0.49 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{|OH^-|^2}$$

Si la concentración de OH− es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{Cátodo} = 0.49V$$

La diferencia de potencial de la celda se calcula como:

$$\Delta E^0_{Celda} = E^0_{Cátodo} - E^0_{Ánodo}$$

$$\Delta E^0_{Celda} = 0.49 + 0.81 = 1.30\ V$$

$$\Delta E^0_{Celda} = 1.30\ V$$

c) Cálculo del número de celdas que conforman una batería de 7.2 u 8.4 V:

$$-\ \text{Celda de } 7.2\ V = \frac{7.2\ V}{1.3\ V} = 5.5$$

Para construir una batería de 7.2 V se necesitan 6 celdas conectadas en serie.

$$-\ \text{Celda de } 8.4\ V = \frac{8.4\ V}{1.3\ V} = 6.5$$

Para construir una batería de 8.4 V se necesitan 7 celdas conectadas en serie.

Problema resuelto

Una celda de combustible es un dispositivo electroquímico de conversión de energía, similar a una batería, pero se diferencia de esta última en que su diseño permite el reabastecimiento continuo de los reactivos consumidos, es decir, produce electricidad desde una fuente externa de combustible y oxígeno, sus electrodos son catalíticos y relativamente estables y las celdas se agrupan combinándolas en serie o en paralelo.

Las celdas de combustible son muy útiles como fuentes de energía en naves espaciales, estaciones meteorológicas, localizaciones rurales. En 2009, diferentes compañías automotrices firmaron un acuerdo para introducir al mercado vehículos eléctricos impulsados con pilas o también llamadas baterías o celdas de combustible.

Las medias reacciones involucradas en una celda de combustible son:

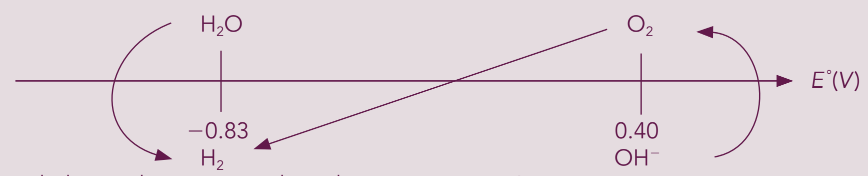
$$2H_2O(l) + 2e^- \leftrightarrows H_2(g) + 2OH^-(ac) \qquad E^0 = -0.83\ V$$

$$2H_2O(l) + O_2(g) + 4e^- \leftrightarrows 4OH^-(ac) \qquad E^0 = 0.40\ V$$

a) Señala la reacción que ocurre espontáneamente en la celda.
b) Calcula el potencial estándar de la celda.

Respuesta

a) Reacción que ocurre espontáneamente:
Se traza una escala de potencial:



La reacción no balanceada que se produce de manera espontánea es:

$$O_2(g) + H_2(g) \leftrightarrows OH^-(ac) + H_2O$$

La reacción balanceada es:

$$2H_2(g) + O_2(g) \leftrightarrows 2H_2O(l)$$

Respuesta (*continuación*)

b) Cálculo del potencial estándar de la celda:
Cálculo del potencial en el ánodo:

$$H_2(g) + 2OH^- - 2e^- \leftrightarrows 2H_2O(l)$$

$$E^0_{Ánodo} = -0.83 + \frac{0.06}{2}\log\frac{1}{|OH^-|^2}$$

Si la concentración de OH— es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{Ánodo} = -0.83V$$

Cálculo del potencial del cátodo:

$$O_2(g) + 2H_2O(l) + 4e^- \leftrightarrows 4OH^-(ac)$$

$$E^0_{Cátodo} = 0.40 + \frac{0.06}{4}\log\frac{1}{|OH^-|^4}$$

Si la concentración de OH^- es 1 M, el término logarítmico se elimina, por lo que:

$$E^0_{Cátodo} = 0.40V$$

La diferencia de potencial de la celda se calcula como:

$$\Delta E^0_{Celda} = E^0_{Cátodo} - E^0_{Ánodo}$$
$$\Delta E^0_{Celda} = 0.40 + 0.83 = 1.23\ V$$
$$\Delta E^0_{Celda} = 1.23\ V$$



Alerta

Para asignar el cátodo y el ánodo en una celda electroquímica, considera que la semirreacción que tenga el potencial más positivo actuará como cátodo, mientras que aquella con el potencial más negativo funcionará como ánodo.

Problema resuelto

Calcula el potencial de una disolución de Cr^{3+} 0.33 M a la que se introduce una barra de cromo metálico. Dato:

$$E^0_{(Cr^{3+}/Cr^0)} = -0.74V$$

Respuesta

La semirreacción del sistema y su expresión de Nernst correspondiente es:

$$Cr^{3+} + 3e^- \rightleftarrows Cr^0; \qquad E_{eq} = -0.74 + \frac{0.06}{3}\log|Cr^{3+}|$$

El potencial se calcula a partir de la expresión de Nernst, sustituyendo la concentración de Cr(III).

$$E_{eq} = -0.74 + \frac{0.06}{3}\log 0.33$$
$$E_{eq} = -0.74 + 0.02(-0.481)$$
$$E_{eq} = -0.75\ V$$

Problema resuelto

Problema resuelto
A una mezcla de U^{4+} y Fe^{2+} se agrega poco a poco una disolución de Ce(IV) 0.1000 N.
Datos:

$$E^0_{(Fe^{3+}/Fe^{2+})} = 0.77\ V$$

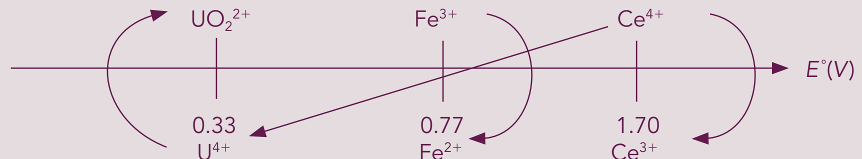
$$E^0_{(Ce^{4+}/Ce^{3+})} = 1.70\ V$$

$$E^0_{(UO_2^{2+}/U^{4+})} = 0.33\ V$$

a) Establece todas las reacciones que ocurren cuando se hace una adición paulatina de Ce(IV) a la mezcla de U^{4+} y Fe^2.
b) Calcula las constantes de equilibrio para cada reacción planteada.
c) Haz una tabla de variación de concentraciones conforme se incrementa la adición de Ce(IV).
d) Calcula el potencial de equilibrio de la disolución constituida por la mezcla de reductores.
e) Expresa las ecuaciones que permiten calcular el potencial de equilibrio de la disolución en cada punto importante de la tabla de variación de concentraciones.

Respuesta

Reacciones que ocurren cuando se adiciona una disolución de Ce(IV) a otra que contiene una mezcla de U^{4}+ y Fe^{2+}.



La escala muestra que cuando se adiciona cerio(IV) a una mezcla que contiene U(IV) y Fe(II), primero se da la reacción del Ce(IV) con U(IV). Cuando este último se agota y se continúa la adición de Ce(IV), entonces ocurre la reacción con el Fe(II).

Las reacciones balanceadas que ocurren son las siguientes:
Primera reacción: $2H_2O + U^{4+} + 2Ce^{4+} \leftrightarrows UO_2^{2+} + 2Ce^{3+} + 4H^+$

Segunda reacción: $Fe^{2+} + Ce^{4+} \leftrightarrows Fe^{3+} + Ce^{3+}$

Cálculo de las constantes de equilibrio:

Primera reacción: $2H_2O + U^{4+} + 2Ce^{4+} \leftrightarrows UO_2^{2+} + 2Ce^{3+} + 4H^+$
Aplicando la ley de acción de masas se obtiene:

$$K^{1era}_{Reacción} = \frac{|UO_2^{2+}||Ce^{3+}|^2|H^+|^4}{|U^{4+}||Ce^{4+}|^2}$$

Para calcular la constante de equilibrio, se igualan las expresiones de Nernst:

$$1.70 + 0.06\log\frac{|Ce^{4+}|}{|Ce^{3+}|} = 0.33 + \frac{0.06}{2}\log\frac{|UO_2^{2+}||H^+|^4}{|U^{4+}|}$$

Si se multiplica por 2 toda la igualdad:

$$3.4 + 0.06\log\frac{|Ce^{4+}|^2}{|Ce^{3+}|^2} = 0.66 + 0.06\log\frac{|UO_2^{2+}||H^+|^4}{|U^{4+}|}$$

Al reagrupar términos:

$$3.4 - 0.66 = 0.06\log\frac{|UO_2^{2+}||H^+|^4|Ce^{3+}|^2}{|U^{4+}||Ce^{4+}|^2}$$

$$2.74 = 0.06\log K^{1era}_{Reacción}$$

$$K^{1era}_{Reacción} = 10^{\frac{2.74}{0.06}} = 10^{45.7} = 5.01\times10^{45}$$

$$K^{1era}_{Reacción} = 5.01\times10^{45}$$

Respuesta (*continuación*)

El valor de la constante indica que la reacción está desplazada a la derecha y que es muy cuantitativa.

Segunda reacción: Fe^{21} 1 Ce^{41} ⇆ Fe^{31} 1 Ce^{31}

La constante de equilibrio para la reacción anterior se expresa como: $K^{2a}_{Re\,acción} = \frac{|Fe^{3+}||Ce^{3+}|}{|Fe^{2+}||Ce^{4+}|}$

Al igualar las expresiones de Nernst: $1.70 + 0.06\log\frac{|Ce^{4+}|}{|Ce^{3+}|} = 0.77 + 0.06\log\frac{|Fe^{3+}|}{|Fe^{2+}|}$

Al reagrupar términos: $1.7 - 0.77 = 0.06\log\frac{|Fe^{3+}||Ce^{3+}|}{|Fe^{2+}||Ce^{4+}|}$

$$0.93 = 0.06\log K^{2a}_{Reacción}$$

$$K^{2a}_{Re\,acción} = 10^{\frac{0.93}{0.06}} = 10^{15.5} = 3.16\times10^{15}$$

$$K^{2a}_{Re\,acción} = 3.16\times10^{15}$$

El valor de la constante indica que la reacción está desplazada a la derecha y es cuantitativa.
Cuando se compara el valor de las dos constantes de reacción anteriores, se observa que la primera reacción es mucho más cuantitativa que la segunda.
También se puede calcular el valor de una constante de reacción mediante la siguiente fórmula:

$$K_{Re\,acción} = 10^{\frac{(\Delta E)n}{0.06}}$$

Donde:
ΔE 5 Diferencia de potencial dado por los dos sistemas redox involucrados. Siempre considera $E_{cátodo}$ 2 $E_{ánodo}$.
n 5 Número de electrones intercambiados.

c) Tabla de variación de concentraciones conforme se incrementa la adición de Ce(IV).
Se considera que tanto las especies por titular como el titulante tienen el mismo orden de concentraciones.

Primera reacción	$2H_2O$	1	U^{41}	1	$2Ce^{41}$	⇆	UO_2^{21}	1	$2Ce^{31}$	1	$4H^{1}$
Inicio x 5 0			Co								
Agregado					xCo						
Antes punto de equivalencia 0 < x < 2			$Co-\left(\frac{1}{2}xCo\right)$ $Co\left(1-\frac{1}{2}x\right)$		ε ≈ 0		$\frac{xCo}{2}$		xCo		
Punto de equivalencia x 5 2			ε ≈ 0		2ε ≈ 0		Co		2Co		
Segunda reacción	Fe^{21}	1	Ce^{41}	⇆	Fe^{31}	1	Ce^{31}				
Inicio	Co						2Co				
Agregado			x'Co								
Apeq 0 < x' < 1	$Co-x'Co$ $Co(1-x')$		ε' ≈ 0		x'Co		2Co1 x'Co Co(2 1 x')				
Segunda reacción	$2H_2O$	1	U^{41}	1	$2Ce^{41}$	⇆	UO_2^{21}	1	$2Ce^{31}$	1	$4H^{1}$
Peq x' 5 1 x_T 5 3 *	ε' ≈ 0		ε' ≈ 0		Co		3Co				
Dpeq x' > 1 x_T > 3 * *x_T 5 x 1 x'	ε' ≈ 0		$x'Co-Co$ $Co(x'-1)$ $Co(x_T-3)$		Co		3Co				

Respuesta (*continuación*)

d) Calculo del potencial de equilibrio de la disolución constituida por la mezcla de reductores.
Al inicio, la disolución contiene una mezcla de U^{4+} + Fe^{2+} (ambos reductores), el más fuerte es U^{4+}. Esta especie es la que impone el potencial de la disolución. Por cálculo numérico no es posible determinar el potencial, ya que se llega a una indeterminación al aplicar la ecuación de Nernst para el sistema del uranio, y porque no hay U(VI) presente en disolución. Aún así se puede asegurar que el potencial será mucho menor a 0.33 V. En la práctica sí es posible medir el potencial utilizando un potenciómetro y un par de electrodos, por ejemplo, platino y calomel. Se concluye que cuando hay un reductor en disolución, el potencial no es calculable pero sí medible. Lo mismo se aplica cuando hay un oxidante solo en disolución.

e) Expresión de las ecuaciones que permiten calcular el potencial de equilibrio de la disolución en cada punto importante de la tabla de variación de concentraciones.

Avance de las reacciones	Especies que imponen el potencial	Ecuación que se aplica para el cálculo del potencial
Inicio $x = 0$	U^{4+}	<< 0.33V
Antes del 1er punto de equivalencia $0 < x' < 2$	U^{4+} / UO_2^{2+}	$E_{eq} = 0.33 + 0.03 \log \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}}$
Primer punto de equivalencia $x = 2$	UO_2^{2+}; Fe^{2+}	$E_{eq} = \frac{2(0.33) + 0.77}{3} = 0.48V$
Inicio 2ª reacción $x' = 0$	UO_2^{2+}; Fe^{2+}	$E_{eq} = \frac{2(0.33) + 0.77}{3} = 0.48V$
Antes del 2º punto de equivalencia $0 < x' < 1$	Fe^{3+}/Fe^{2+}	$E_{eq} = 0.77 + 0.06 \log \frac{x'}{1 - x'}$
2º punto de equivalencia x' 51 $x_T = 3$	Fe^{3+}; Ce^{3+}	$2E_{eq} = 1.70 + 0.77 + 0.06 \log \frac{Co}{3}$
Después del 2º punto de equivalencia $x' > 1$ $x_T > 3$	Ce^{4+}/Ce^{3+}	$E_{eq} = 1.70 + 0.06 \log \frac{x_T - 3}{3}$

Problema resuelto

Una muestra de agua residual contiene 27 mg/L de cianuro como NaCN. Determina la cantidad teórica (estequiométricamente) de cloro requerida para destruir este residuo, suponiendo que se producen 1000L/día de dicha agua residual.

Respuesta

La ecuación de la reacción balanceada que ocurre entre el cianuro y el cloro es:

$2NaCN + 5Cl_2 + 12NaOH \leftrightarrows N_2 + Na_2CO_3 + 10NaCl + 6H_2O$

De acuerdo con la estequiometría de la reacción, se requieren 2.5 moles de Cl2 por mol de NaCN.
La masa total de NaCN que se descarga diariamente es:

$$\text{Masa (NaCN)} = \frac{27\text{ mg}}{\text{L}} \times 1000\text{ L} = 27000\text{ mg} = 27\text{g de NaCN}$$

Cálculo de la cantidad de NaCN expresado en mol:

$$n_{NaCN} = \frac{27\text{ g}}{49\text{ g/mol}} = 0.551\text{ mol}$$

Cantidad de cloro requerido para el tratamiento del agua residual:

$$n_{Cl_2} = 0.551\text{ mol} \times 2.5 = 1.38\text{ m}$$

Se requieren 1.38 moles de cloro para el tratamiento de los 1000 L de agua residual que se generan diariamente.
En la práctica se requieren cantidades mucho mayores que las calculadas estequiométricamente, debido a tiempos incompletos de reacción.

Problema resuelto

Calcula la cantidad de cobre que se deposita en un periodo de dos horas, cuando se realiza una electrólisis de una disolución de sulfato de cobre (II) y se aplica una corriente de 0.5 amperes.

Respuesta

El primer paso es calcular el peso equivalente del cobre. La semirreacción que se produce en el cátodo es: $Cu^{2+} + 2e^- \leftrightarrows Cu^0$. Como el cobre intercambia un par de electrones, el peso equivalente resulta de dividir su masa atómica entre dos. Si la masa atómica del cobre es de 63.54 g/mol, entonces el peso equivalente de cobre será de 31.77g/eq.
El segundo paso es calcular el número de coulombs que pasaron por la disolución de cobre(II). Dicho número se obtiene al multiplicar el tiempo en segundos por la corriente en amperes.
Tiempo = 2 h × 3 600 s = 7 200 s
Q = 0.5 amperes × 7 200 s = 3 600 coulombs
Al saber que 96 500 coulombs depositan 31.77 g de cobre, podemos calcular la cantidad de cobre depositada por 3 600 coulombs.

$$\text{Masa(Cu)} = \frac{3600 \times 31.77}{96500} = 1.185\text{ g}$$

Masa de cobre depositado = 1.185 g

Problema resuelto

Calcula el peso de sodio y cloro que se forma cuando se pasan 10 000 coulombs de electricidad a través de cloruro de sodio fundido.

Respuesta

Las semirreacciones que se producen en cada electrodo son:
Cátodo: $Na^{+} + 1e^{-} \leftrightarrows Na^{0}$
Ánodo: $2Cl^{-} \leftrightarrows Cl_2 + 2e^{-}$
Tanto el sodio como el cloro intercambian un electrón por mol, por lo que sus pesos equivalentes son de 23 g para el sodio y de 35.5 g para el cloro. Esas cantidades se forman cuando se hace pasar 1 F (96, 500 C/mol).
Cálculo de la masa formada de sodio y cloro cuando se hacen pasar 10 000 C.

$$\text{Masa(Na)} = \frac{10000\ \text{C}}{96500\ \text{C}} \times 23\ \text{g} = 2.38\ \text{g de Na}$$

2.38 g de sodio

$$\text{Masa}(Cl_2) = \frac{10000\ \text{C}}{96500\ \text{C}} \times 35.5\text{g} = 3.68\ \text{g de}\ Cl_2$$

3.68 g de cloro

Problema resuelto

¿Qué cantidad de electricidad se requiere para descomponer 1 lb (454 g) de agua por electrólisis? La reacción general es:

$$2H_2O \leftrightarrows 2H_2 + O_2$$

Respuesta

Un mol de agua (18 g) contiene 2 equivalentes de hidrógeno (2 g) y 2 equivalentes de oxígeno (16 g), el peso equivalente del agua es de 9 g. Esta masa de agua será la que se descomponga por el paso de 1 faradio de electricidad (produciendo 1 g de hidrógeno y 8 g de oxígeno). Para descomponer una libra de agua se necesita la siguiente cantidad de electricidad:

$$Q = \frac{454g}{9g} \times 1\ \text{faradio} = 50.4\ \text{faradios}$$

Q = 50.4 faradios



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Nomenclatura

E = Módulo de elasticidad

I = Momento de inercia (cm^4, in^4)

L = Longitud total de la viga entre soportes (cm, m, in o ft)

M_{max} = Momento máximo (N-m, lb-in, kip-ft.)

M_1 = Momento máximo en el apoyo 1 (N-m, kip-in, Kip-ft.)

M_2 = Momento máximo en el apoyo 2 (N-m, kip-in, Kip-ft.)

M_x = Momento a una distancia x desde el extreme de la viga (N-m, lb-in, kip-in.)

P = Carga concentrada (N, lb o kips)

P_1 = Carga concentrada (N, lb o kips)

P_2 = Carga concentrada diferente a P_1 (N, lb o kips)

R = Reacción en los extremos de la viga para cualquier condición de carga simétrica (N, lb o kips)

R_1 = Reacción en el apoyo 1 (N, lb o kips)

R_2 = Reacción en el apoyo 2 (N, lb o kips)

V = Cortante máximo para cualquier condición de carga simétrica (N, lb o kips)

V_1 = Cortante máximo en el apoyo 1 (N, lb o kips)

V_2 = Cortante máximo en el apoyo 2 (N, lb o kips)

V_x = Cortante a una distancia x desde el extreme de la viga (N, lb o kips)

W = Carga total en la viga (N, lb o kips)

a = Distancia a lo largo de la viga (cm, m o in)

b = Distancia b a lo largo de la viga puede ser mayor o menor que *a* (cm, m o in)

l = Longitud total de la viga (cm, m, in o ft)

w = Carga uniformemente distribuida por unidad de longitud (N/m, kips/in, Kips/ft)

x = Cualquier distancia a lo largo de la viga (cm, m, in o ft)

Δ_{max} = Máxima deformación (cm, in)

Δ_a = Deformación en el punto de aplicación de la carga (cm, in)

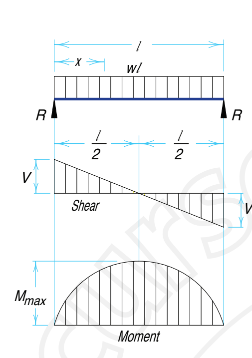
Δ_x = Deformación a cualquier distancia *x desde el apoyo* (cm, in)



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag 1

1. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Carga Total Uniforme . . . . $= wl$

$R = V$ . . . . $= \frac{wl}{2}$

V_x . . . . $= w\left(\frac{l}{2} - x\right)$

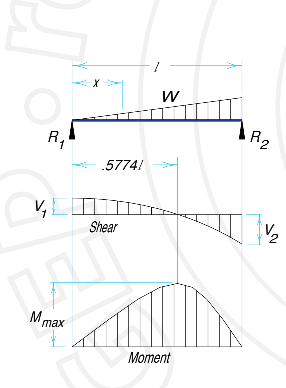
M_{max} (en el centro) . . . . $\frac{wl^2}{8}$

M_x . . . . $= \frac{wx}{2}(l - x)$

Δ_{max} (en el centro) . . . . $= \frac{5wl^4}{384EI}$

Δ_x . . . . $= \frac{wx}{24EI}(l^3 - 2lx^2 + x^3)$

2. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA AUMENTANDO UNIFORMEMENTE HACIA UN EXTREMO



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{16W}{9\sqrt{3}} = 1.0264W$

$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{W}{3}$

$R_2 = V_2$ max . . . . $= \frac{2W}{3}$

V_x . . . . $= \frac{W}{3} - \frac{Wx^2}{l^2}$

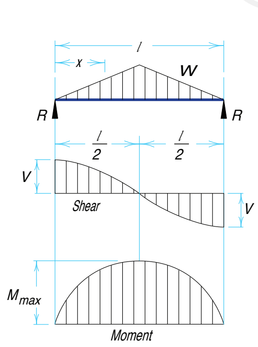
M_{max} (en $x = \frac{l}{\sqrt{3}} = .5774\,l$) . . . . . . $= \frac{2Wl}{9\sqrt{3}} = .1283\,Wl$

M_x . . . . $= \frac{Wx}{3l^2}(l^2 - x^2)$

Δ_{max} (en $x = l\sqrt{1 - \sqrt{\frac{8}{15}}} = .5193\,l$) . . $= 0.1304\,\frac{Wl^3}{EI}$

Δ_x . . . . $= \frac{Wx}{180EIl^2}(3x^4 - 10l^2x^2 + 7l^4)$

3. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA AUMENTANDO UNIFORMEMENTE HACIA EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{4W}{3}$

$R = V$ . . . . $= \frac{W}{2}$

V_x (si $x < \frac{l}{2}$) . . . . $= \frac{W}{2l^2}(l^2 - 4x^2)$

M_{max} (al centro) . . . . $= \frac{Wl}{6}$

M_x (si $x < \frac{l}{2}$) . . . . $= Wx\left(\frac{1}{2} - \frac{2x^2}{3l^2}\right)$

Δ_{max} (al centro) . . . . $= \frac{Wl^3}{60EI}$

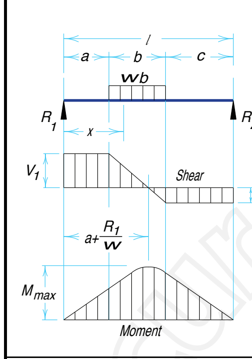
Δ_x (si $x < \frac{l}{2}$) . . . . $= \frac{Wx}{480EIl^2}(5l^2 - 4x^2)^2$



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

4. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA UNIFORME, DISTRIBUIDA PARCIALMENTE



$R_1 = V_1$ (max. si $a < c$) . . . . $= \dfrac{wb}{2l}(2c + b)$

$R_2 = V_2$ (max. si $a > c$) . . . . $= \dfrac{wb}{2l}(2a + b)$

V_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) . . . $= R_1 - w(x - a)$

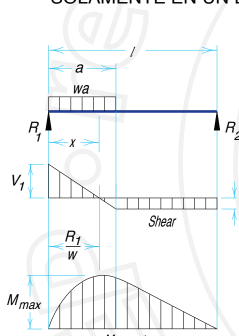
M_{max} $\left(\text{si } x = a + \dfrac{R_1}{w}\right)$ . . . . $= R_1\left(a + \dfrac{R_1}{2w}\right)$

M_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 x$

M_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) . . . $= R_1 x - \dfrac{w}{2}(x - a)^2$

M_x (si $x > (a + b)$) . . . . $= R_2(l - x)$

5. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA UNIFORME, DISTRIBUIDA PARCIALMENTE SOLAMENTE EN UN EXTREMO



$R_1 = V_1$ max . . . . $= \dfrac{wa}{2l}(2l - a)$

$R_2 = V_2$ . . . . $= \dfrac{wa^2}{2l}$

V_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 - wx$

M_{max} $\left(\text{en } x = \dfrac{R_1}{w}\right)$ . . . . $= \dfrac{R_1^2}{2w}$

M_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 x - \dfrac{wx^2}{2}$

M_x (si $x > a$) . . . . $= R_2(l - x)$

Δ_x (si $x < a$) . . . . $= \dfrac{wx}{24EIl}(a^2(2l - a)^2 - 2ax^2(2l - a) + lx^3)$

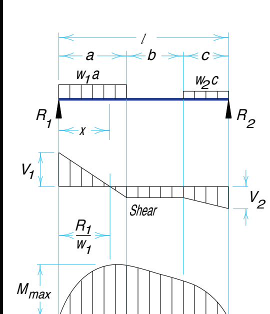
Δ_x (si $x > a$) . . . . $= \dfrac{wa^2(l - x)}{24EIl}(4xl - 2x^2 - a^2)$

6. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGAS UNIFORMES, DISTRIBUIDAS PARCIALMENTE EN AMBOS EXTREMOS



$R_1 = V_1$ . . . . $= \dfrac{w_1 a(2l - a) + w_2 c^2}{2l}$

$R_2 = V_2$ . . . . $= \dfrac{w_2 c(2l - c) + w_1 a^2}{2l}$



V_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 - w_1 x$

V_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) $= R_1 - w_1 a$

V_x (si $x > (a + b)$) . . . . $= R_2 - w_2(l - x)$

M_{max} $\left(\text{en } x = \dfrac{R_1}{w_1} \text{ cuando } R_1 < w_1 a\right)$ $= \dfrac{R_1^2}{2w_1}$

M_{max} $\left(\text{en } x = l - \dfrac{R_1}{w_2} \text{ cuando } R_2 < w_2 c\right)$ $= \dfrac{R_2^2}{2w_2}$

M_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 x - \dfrac{w_1 x^2}{2}$

M_x (si $x > a$ o $< (a + b)$) . . . $= R_1 x - \dfrac{w_1 a}{2}(2x - a)$

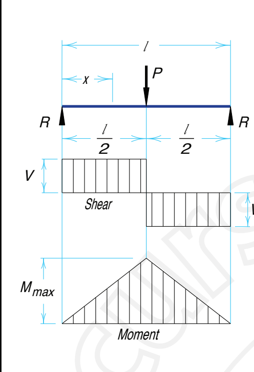
M_x (si $x > (a + b)$) . . . . $= R_2(l - x) - \dfrac{w_2(l - x)^2}{2}$



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

7. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . $= 2P$

$R = V$ . . . . $= \frac{P}{2}$

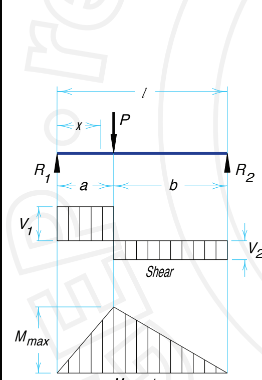
M_{max} (debajo de la carga) . . . . $= \frac{Pl}{4}$

M_x $\left(\text{si } x < \frac{1}{2}\right)$ . . . . $= \frac{Px}{2}$

Δ_{max} (debajo de la carga) . . . . $= \frac{Pl^3}{48EI}$

Δ_x $\left(\text{si } x < \frac{1}{2}\right)$ . . . . $= \frac{Px}{48EI}(3l^2 - 4x^2)$

8. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{8Pab}{l^2}$

$R_1 = V_1$ (max si $a < b$) . . . . $= \frac{Pb}{l}$

$R_2 = V_2$ (max si $a > b$) . . . . $= \frac{Pa}{l}$

M_{max} (en el punto de la carga) . . . . $= \frac{Pab}{l}$

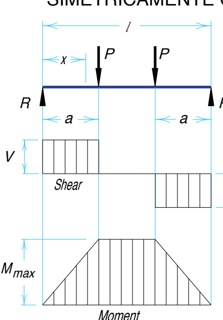
M_x (si $x < a$) . . . . $= \frac{Pbx}{l}$

Δ_{max} $\left(\text{en } x = \sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}} \text{ si } a > b\right)$ . . . $= \frac{Pab(a+2b)\sqrt{3a(a+2b)}}{27EIl}$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . $= \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$

Δ_x (si $x < a$) . . . . $= \frac{Pbx}{6EIl}(l^2 - b^2 - x^2)$

9. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON DOS CARGAS CONCENTRADAS E IGUALES, SIMÉTRICAMENTE COLOCADAS



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{8Pa}{l}$

$R = V$ . . . . $= P$

M_{max} (entre ambas cargas) . . . . $Pa=$

M_x (si $x < a$) . . . . $= Px$

Δ_{max} (en el centro) . . . . $\frac{Pa}{24EI}(3l^2 - 4a^2)$

Δ_x (si $x < a$) . . . . $= \frac{Px}{6EI}(3la - 3a^2 - x^2)$

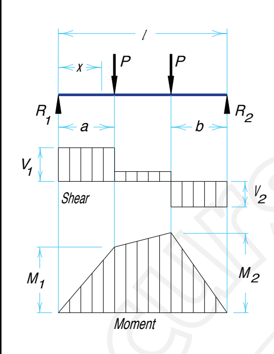
Δ_x (si $x > a$ o $< (l - a)$) . . . . $= \frac{Pa}{6EI}(3lx - 3x^2 - a^2)$



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

10. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON DOS CARGAS CONCENTRADAS E IGUALES. PERO COLOCADAS EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1$ (max. si $a < b$) . . . . $= \frac{P}{l}(l - a + b)$

$R_2 = V_2$ (max. si $a > b$) . . . . $= \frac{P}{l}(l - b + a)$

V_x (si $x > a$ o $< (l - b)$) . . . . . $= \frac{P}{l}(b - a)$

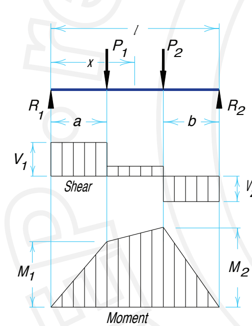
M_1 (max. si $a > b$) . . . . $= R_1 a$

M_2 (max. si $a < b$) . . . . $= R_2 b$

M_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 x$

M_x (si $x > a$ o $< (l - b)$) . . . . . $= R_1 x - P(x - a)$

11. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS CON DOS CARGAS CONCENTRADAS Y DESIGUALES COLOCADAS EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{P_1(l - a) + P_2 b}{l}$

$R_2 = V_2$ . . . . $= \frac{P_1 a + P_2(l - b)}{l}$

V_x (si $x > a$ o $< (l - b)$) . . . . . $= R_1 - P_1$

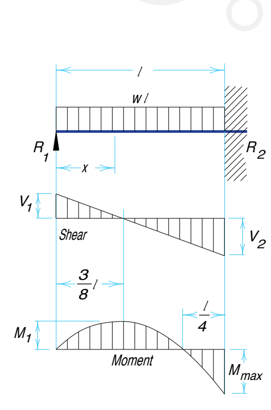
M_1 (max. si $R_1 < P_1$) . . . . $= R_1 a$

M_2 (max. si $R_2 < P_2$) . . . . $= R_2 b$

M_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 x$

M_x (si $x > a$ o $< (l - b)$) . . . . . $= R_1 x - P(x - a)$

12. VIGA EMPOTRADA DE UN EXTREMO Y APOYADA EN EL OTRO EXTREMO CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Carga Total Uniforme . . . . $= wl$

$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{3wl}{8}$

$R_2 = V_{2\,max}$ . . . . $= \frac{5wl}{8}$

V_x . . . . $= R_1 - wx$

M_{max} . . . . $= \frac{wl^2}{8}$

M_x $\left(\text{en } x = \frac{3}{8}l\right)$ . . . . $= \frac{9}{128}wl^2$

M_x . . . . $= R_1 x - \frac{wx^2}{2}$

Δ_{max} $\left(\text{en } x = \frac{l}{16}(1 + \sqrt{33}) = .4215\,l\right)$ . . . $= \frac{wl^4}{185EI}$

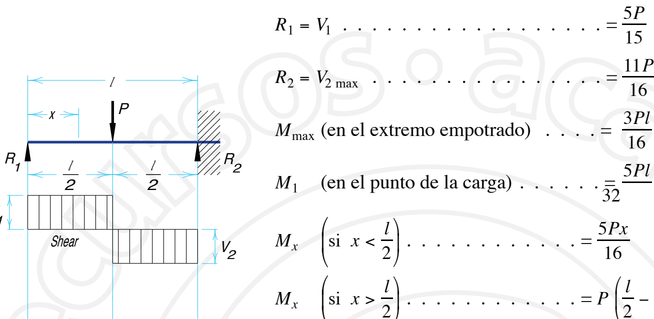
Δ_x . . . . $\frac{wx}{48EI}(l^3 - 3lx + 2x^3)$



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

13. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y APOYADA EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{3P}{2}$

$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{5P}{15}$

$R_2 = V_{2\,max}$ . . . . $= \frac{11P}{16}$

M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . $= \frac{3Pl}{16}$

M_1 (en el punto de la carga) . . . . . . $= \frac{5Pl}{32}$

$M_x \left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . $= \frac{5Px}{16}$

$M_x \left(\text{si } x > \frac{l}{2}\right)$ . . . . $= P\left(\frac{l}{2} - \frac{11x}{16}\right)$

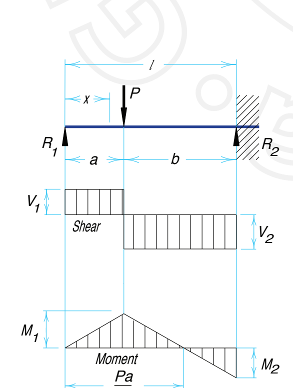
$\Delta_{max} \left(\text{en } x = l\sqrt{\frac{1}{5}} = .4472\,l\right)$ . . . . $= \frac{Pl^3}{48EI\sqrt{5}} = .009317\,\frac{Pl^3}{EI}$

Δ_x (en el punto de la carga) . . . . . . $= \frac{7PL^3}{768EI}$

$\Delta_x \left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . $= \frac{Px}{96EI}(3l^2 - 5x^2)$

$\Delta_x \left(\text{si } x > \frac{l}{2}\right)$ . . . . $= \frac{P}{96EI}(x - l)^2(11x - 2l)$

14. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y APOYADA EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA APLICADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{Pb^2}{2l^3}(a + 2l)$

$R_2 = V_2$ . . . . $= \frac{Pa}{2l^3}(3l^2 - a^2)$

M (en el punto de la carga) . . . . $R_1 a\,. =$

M_2 (en el extremo empotrado) . . . . . $\frac{Pab}{2l^2}(a + l) =$

M_x (si $x < a$) . . . . $= R_1 x$

M_x (si $x > a$) . . . . $= R_1 x - P(x - a)$

$\Delta_{max} \left(\text{si } a < .414\,l \text{ at } x = l\frac{(l^2 + a^2)}{(3l^2 - a^2)}\right) = \frac{Pa(l^2 + a^2)^3}{3EI(3l^2 - a^2)^2}$

$\Delta_{max} \left(\text{si } a > .414\,l \text{ at } x = l\sqrt{\frac{a}{2l + a}}\right) = \frac{Pab^2}{6EI}\sqrt{\frac{a}{2l + a}}$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . $\frac{Pa^2b^3}{12EIl^3}(3l + a)$

Δ (si $x < a$) . . . . $= \frac{Pb^2x}{12EIl^3}(3al^2 - 2lx^2 - ax^2)$

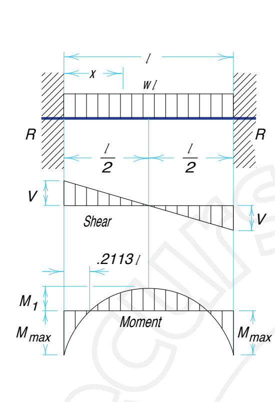
Δ_x (si $x > a$) . . . . $= \frac{Pa}{12EIl^2}(l - x)^2\,(3l^2x - a^3x - 2a^2l)$



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

15 VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{2wl}{3}$

$R = V$ . . . . $= \frac{wl}{2}$

V_x . . . . $= w\left(\frac{l}{2} - x\right)$

M_{max} (en los extremos) . . . . $= \frac{wl^2}{12}$

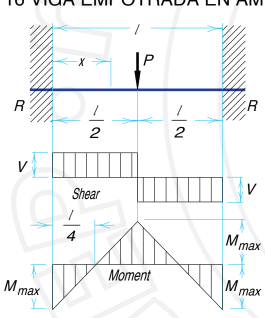
M_1 (en el centro) . . . . $= \frac{wl^2}{24}$

M_x . . . . $= \frac{w}{12}(6lx - l^2 - 6x^2)$

Δ_{max} (en el centro) . . . . $= \frac{wl^4}{384EI}$

Δ_x . . . . $= \frac{wx^2}{24EI}(l - x)^2$

16 VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO



Carga Total Uniforme . . . . $= P$

$R = V$ . . . . $= \frac{P}{2}$

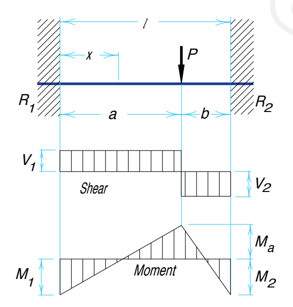
M_{max} (en el centro y en los extremos) . . $= \frac{Pl}{8}$

M_x $\left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . $= \frac{P}{8}(4x - l)$

Δ_{max} (en el centro) . . . . $= \frac{Pl^3}{192EI}$

Δ_x $\left(\text{si } x < \frac{l}{2}\right)$ . . . . $= \frac{Px^2}{48EI}(3l - 4x)$

17 VIGA EMPOTRADA EN AMBOS EXTREMOS CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



$R_1 = V_1$ (max. si $a < b$) . . . . $= \frac{Pb^2}{l^3}(3a + b)$

$R_2 = V_2$ (max. si $a > b$) . . . . $= \frac{Pa^2}{l^3}(a + 3b)$

M_1 (max. si $a < b$) . . . . $= \frac{Pab^2}{l^2}$

M_2 (max. si $a > b$) . . . . $= \frac{Pa^2b}{l^2}$

M_a (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{2Pa^2b^2}{l^3}$

M_x (si $x < a$) . . . . $= R_1x - \frac{Pab^2}{l^2}$

Δ_{max} $\left(\text{si } a > b \text{ at } x = \frac{2al}{3a + b}\right)$ . . . . $= \frac{2Pa^3b^2}{3EI(3a + b)^2}$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . . $= \frac{Pa^3b^3}{3EIl^3}$

Δ_x (si $x < a$) . . . . $= \frac{Pb^2x^2}{6EIl^2}(3al - 3ax - bx)$

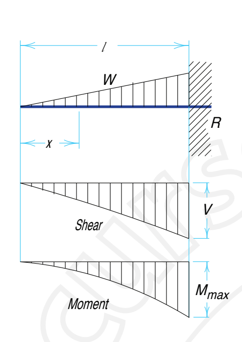


DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS

Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

18. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE EN EL OTRO CON CARGA AUMENTANDO UNIFORMEMENTE HASTA EL EMPOTRE



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{8}{3}W$

$R = V$ . . . . $= W$

V_x . . . . $= W\frac{x^2}{l^2}$

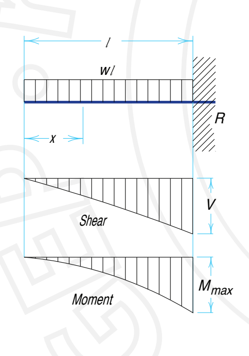
M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \frac{Wl}{3}$

M_x . . . . $= \frac{Wx^3}{3l^2}$

Δ_{max} (en el extremo libre) . . . . $= \frac{Wl^3}{15EI}$

Δ_x . . . . $= \frac{W}{60EIl^2}(x^5 - 5l^4x + 4l^5)$

19. CANTILEVER BEAM—UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD



Carga Total Uniforme . . . . $= 4wl$

$R = V$ . . . . $= wl$

V_x . . . . $= wx$

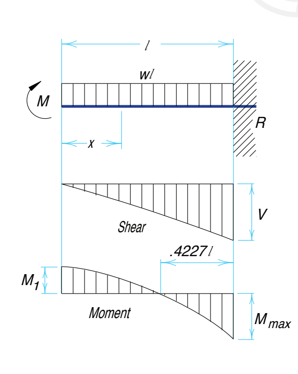
M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \frac{wl^2}{2}$

M_x . . . . $= \frac{wx^2}{2}$

Δ_{max} (en el extremo libre) . . . . $= \frac{wl^4}{8EI}$

Δ_x . . . . $= \frac{w}{24EI}(x^4 - 4l^3x + 3l^4)$

20. BEAM FIXED AT ONE END, FREE TO DEFLECT VERTICALLY BUT NOT ROTATE AT OTHER—UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD



Carga Total Uniforme . . . . $= \frac{8}{3}wl$

$R = V$ . . . . $= wl$

V_x . . . . $= wx$

M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \frac{wl^2}{3}$

M_x . . . . $= \frac{w}{6}(l^2 - 3x^2)$

Δ_{max} (en el extremo guiado) . . . . $= \frac{wl^4}{24EI}$

Δ_x . . . . $= \frac{w(l^2 - x^2)^2}{24EI}$



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

21. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE EN EL OTRO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO DE LA VIGA



Carga Total Uniforme . . . . $= \dfrac{8Pb}{l}$



$R = V$ . . . . $= P$



M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= Pb$

M_x (si $x > a$) . . . . $= P(x - a)$

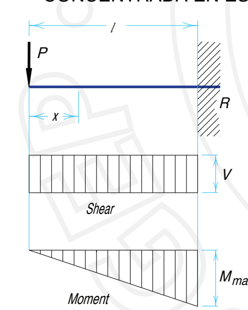
Δ_{max} (en el extremo libre) . . . . $= \dfrac{Pb^2}{6EI}(3l - b)$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . . . $= \dfrac{Pb^3}{3EI}$

Δ_x (si $x < a$) . . . . $= \dfrac{Pb^2}{6EI}(3l - 3x - b)$

Δ_x (si $x > a$) . . . . $= \dfrac{P(l - x)^2}{6EI}(3b - l + x)$

22. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN ESTE EXTREMO



Carga total uniforme . . . . $= 8P$

$R = V$ . . . . $= P$

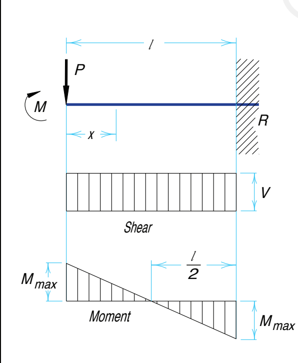
M_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= Pl$

M_x . . . . $= Px$

Δ_{max} (en el extremo empotrado) . . . . . $= \dfrac{Pl^3}{3EI}$

Δ_x . . . . $= \dfrac{P}{6EI}(2l^3 - 3l^2x + x^3)$

23. VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO Y LIBRE PERO GUIADA EN EL OTRO EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN ESTE EXTREMO



Carga total uniforme . . . . $= 4P$

$R = V$ . . . . $= P$

M_{max} (en ambos extremos) . . . . $= \dfrac{Pl}{2}$

M_x . . . . $= P\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$

Δ_{max} (en el extremo guiado) . . . . $= \dfrac{pl^3}{12EI}$

Δ_x . . . . $= \dfrac{P(l - x)^2}{12EI}(l + 2x)$

DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

24. VIGA APOYADA EN AMBOS EXTREMOS PERO SOBRESALIENDO UNO CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA

$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{w}{2l}(l^2 - a^2)$

$R_2 = V_2 + V_3$ . . . . $= \frac{w}{2l}(l + a)^2$

V_2 . . . . $= wa$

V_3 . . . . $= \frac{w}{2l}(l^2 + a^2)$

V_x (entre los apoyos) . . . . . $= R_1 - wx$

V_{x_1} (para el sobresaliente) . . . $= w(a - x_1)$

M_1 $\left(\text{en } x = \frac{l}{2}\left[1 - \frac{a^2}{l^2}\right]\right)$ . . . . . $= \frac{w}{8l^2}(l + a)^2(l - a)^2$

M_2 (at R_2) . . . . $= \frac{wa^2}{2}$

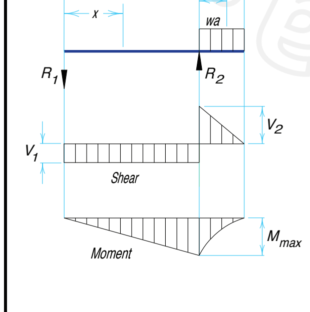
M_x (entre apoyos) . . . . $= \frac{wx}{2l}(l^2 - a^2 - xl)$

M_{x_1} (para el sobresaliente) . . . $= \frac{w}{2}(a - x_1)^2$

Δ_x (entre apoyos) . . . . $= \frac{wx}{24EIl}(l^4 - 2l^2x^2 + lx^3 - 2a^2l^2 + 2a^2x^2)$

Δ_{x_1} (para el sobresaliente) . . . $= \frac{wx_1}{24EI}(4a^2l - l^3 + 6a^2x_1 - 4ax_1^2 + x_1^3)$

25. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO EN UN EXTREMO CON CARGA UNIFORME EL SOBRESALIENTE



$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{wa^2}{2l}$

R_2 $V_1 + V_2$ . . . . $= \frac{wa}{2l}(2l + a)$

V_2 . . . . $= wa$

V_{x_1} (para el sobresaliente) . . . $= w(a - x_1)$

M_{max} (at R_2) . . . . $= \frac{wa^2}{2}$

M_x (entre apoyos) . . . . $= \frac{wa^2x}{2l}$

M_{x_1} (para el sobresaliente) . . . $= \frac{w}{2}(a - x_1)^2$

Δ_{max} $\left(\text{entre apoyos en } x = \frac{l}{\sqrt{3}}\right)$ $= \frac{wa^2l^2}{18\sqrt{3}EI} = 0.03208\,\frac{wa^2l^2}{EI}$

Δ_{max} (para el sobresaliente en $x_1 = a$) $= \frac{wa^3}{24EI}(4l + 3a)$

Δ_x (entre apoyos) . . . . $= \frac{wa^2x}{12EIl}(l^2 - x^2)$

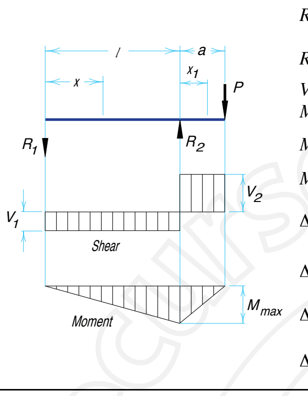
Δ_{x_1} (para el sobresaliente) . . . $= \frac{wx_1}{24EI}(4a^2l + 6a^2x_1 - 4ax_1^2 + x_1^3)$



DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS
Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

26. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO UN EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL EXTREMO DEL SOBRESALIENTE



$R_1 = V_1$ . . . . $= \frac{Pa}{l}$

$R_2 = V_1 + V_2$ . . . . $= \frac{P}{l}(l + a)$

V_2 . . . . $= P$

M_{max} (en R_2) . . . . $= Pa$

M_x (entre los apoyos) . . . . $= \frac{Pax}{l}$

M_{x_1} (para el sobresaliente) . . . . $= P(a - x_1)$

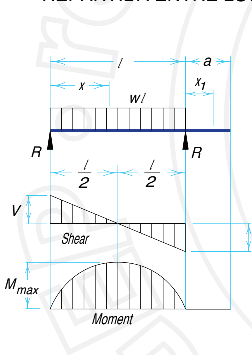
Δ_{max} $\left(\text{entre los apoyos en } x = \frac{l}{\sqrt{3}}\right)$ . . . . . $= \frac{Pal^2}{9\sqrt{3}\,EI} = .06415\,\frac{Pal^2}{EI}$

Δ_{max} (para sobresaliente en $x_1 = a$) . . . . . . $= \frac{Pa^2}{3EI}(l + a)$

Δ_x (entre apoyos) . . . . $= \frac{Pax}{6EIl}(l^2 - x^2)$

Δ_{x_1} (para el sobresaliente) . . . . $= \frac{Px_1}{6EI}(2al + 3ax_1 - x_1^2)$

27. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO UN EXTREMO CON CARGA UNIFORMEMENTE. REPARTIDA ENTRE LOS DOS APOYOS



Carga total uniforme . . . . $= wl$

$R = V$ . . . . $= \frac{wl}{2}$

V_x . . . . $= w\left(\frac{l}{2} - x\right)$

M_{max} (en el centro) . . . . $= \frac{wl^2}{8}$

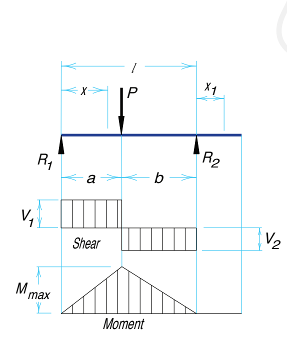
M_x . . . . $= \frac{wx}{2}(l - x)$

Δ_{max} (en el centro) . . . . $= \frac{5wl^4}{384EI}$

Δ_x . . . . $= \frac{wx}{24EI}(l^2 - 2lx^2 + x^3)$

Δ_{x_1} . . . . $= \frac{wl^3x_1}{24EI}$

28. VIGA CON DOS APOYOS SOBRESALIENDO UN EXTREMO CON UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO ENTRE LOS APOYOS



Carga total uniforme . . . . $= \frac{8Pab}{l^2}$

$R_1 = V_1$ (max. si $a < b$) . . . . $= \frac{Pb}{l}$

$R_2 = V_2$ (max. si $a > b$) . . . . $= \frac{Pa}{l}$

M_{max} (en el punto de la carga) . . . . $= \frac{Pab}{l}$

M_x (si $x < a$) . . . . $= \frac{Pbx}{l}$

Δ_{max} $\left(\text{en } x = \sqrt{\frac{a(a + 2b)}{3}} \text{ si } a > b\right)$ . . . . . $= \frac{Pab(a + 2b)\sqrt{3a(a + 2b)}}{27EIl}$

Δ_a (en el punto de la carga) . . . . $= \frac{Pa^2b^2}{3EIl}$

Δ_x (si $x < a$) . . . . $= \frac{Pbx}{6EIl}(l^2 - b^2 - x^2)$

Δ_x (si $x > a$) . . . . $= \frac{Pa(l - x)}{6EIl}(2lx - x^2 - a^2)$

Δ_{x_1} . . . . $= \frac{Pabx_1}{6EIl}(l + a)$

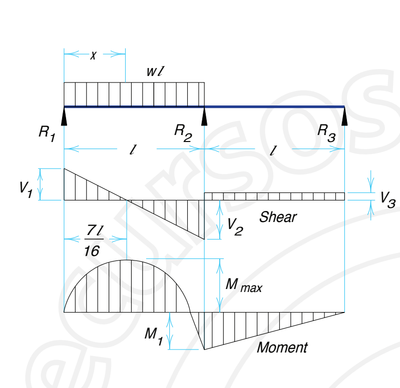


DIAGRAMAS Y FÓRMULAS DE VIGAS

Por diversas condiciones de carga estática

Para el significado de los símbolos, vea pag. 1

29. VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS IGUALES CON CARGA UNIFORMEMENTE REPARTIDA SOBRE UN CLARO



Carga total uniforme $= \frac{49}{64} wl$

$R_1 = V_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{7}{16} wl$

$R_2 = V_2 + V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{5}{8} wl$

$R_3 = V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = -\frac{1}{16} wl$

$V_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{9}{16} wl$

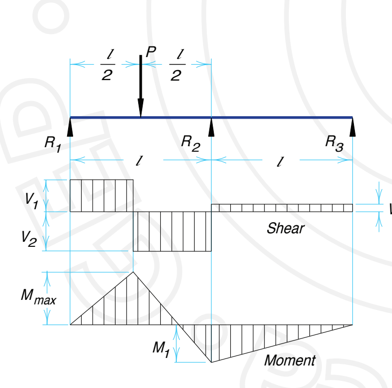
$M_{max} \left(\text{en } x = \frac{7}{16} l\right) \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{49}{512} wl^2$

$M_1 \;\; (\text{en apoyo } R_2) \;.\;.\;.\;.\; = \frac{1}{16} wl^2$

$M_x \;\; (\text{si } x < l) \;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{wx}{16}(7l - 8x)$

Δ_{max} (en $0.472\,l$ from R_1) . . $= .0092\, wl^4 / EI$

30. VIGA CONTINUA DE DOS CLAROS IGUALES CON UNA CARGA CONCENTRADA EN EL CENTRO DE UN CLARO



Carga total uniforme $= \frac{13}{8} P$

$R_1 = V_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{13}{32} P$

$R_2 = V_2 + V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{11}{16} P$

$R_3 = V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = -\frac{3}{32} P$

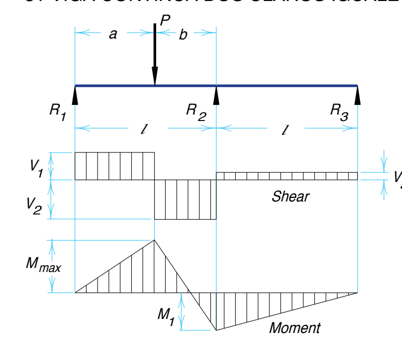
$V_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{19}{32} P$

M_{max} (en el punto de la carga) $= \frac{13}{64} Pl$

$M_1 \;\; (\text{en apoyo } R_2) \;.\;.\;.\;.\; = \frac{3}{32} Pl$

Δ_{max} (at $0.480\,l$ from R_1) . . $= .015\, Pl^3 / EI$

31 VIGA CONTINUA DOS CLAROS IGUALES, UNA CARGA CONCENTRADA EN CUALQUIER PUNTO



$R_1 = V_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{Pb}{4l^3}(4l^2 - a(l + a))$

$R_2 = V_2 + V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{Pa}{2l^3}(2l^2 + b(l + a))$

$R_3 = V_3 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = -\frac{Pab}{4l^3}(l + a)$

$V_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = \frac{Pa}{4l^3}(4l^2 + b(l + a))$

M_{max} (en el punto de la carga) $= \frac{Pab}{4l^3}(4l^2 - a(l + a))$

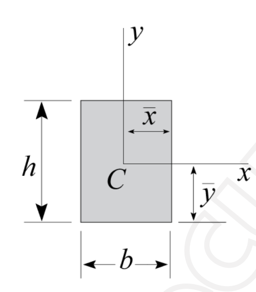
M_1 (en el apoyo R_2) . . . . $= \frac{Pab}{4l^2}(l + a)$

Propiedades de áreas planas

Notación:

A = área
$\bar{x}$, $\bar{y}$ = distancias al centroide C
I_x, I_y = momentos de inercia con respecto a los ejes x y y, respectivamente
I_{xy} = producto de inercia con respecto a los ejes x y y
$I_P = I_x + I_y$ = momento polar de inercia con respecto al origen de los ejes x y y
I_{BB} = momento de inercia con respecto al eje B-B

1

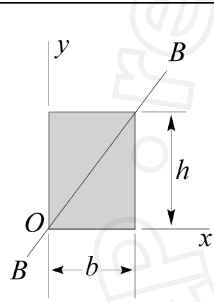


Rectángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = bh \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{2} \qquad S = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2)$$

2

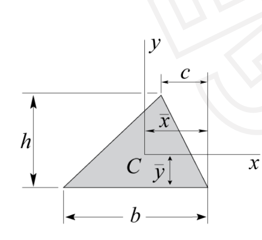


Rectángulo (origen de los ejes en una esquina)

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \qquad I_y = \frac{hb^3}{3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4} \qquad I_P = \frac{bh}{3}(h^2 + b^2) \qquad S = \frac{bh^2}{6}$$

$$I_{BB} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$$

3



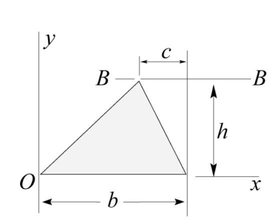
Triángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b + c}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{72}(b - 2c) \qquad I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2 - bc - c^2)$$

4



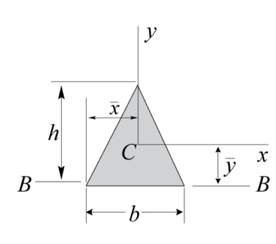
Triángulo (origen de los ejes en un vértice)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{bh}{12}(3b^2 - 3bc - c^2)$$

$$I_{xy} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2c) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{4}$$

Propiedades de áreas planas

5



Triángulo isósceles (origen de los ejes en el centroide)

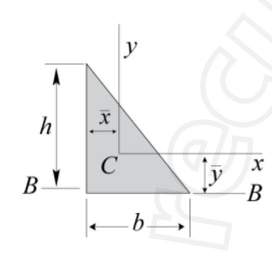
$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{hb^3}{48} \qquad I_{xy} = 0$$

$$I_P = \frac{bh}{144}(4h^2 + 3b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{12}$$

(*Nota*: para un triángulo equilátero, $h = \sqrt{3}b/2$)

6



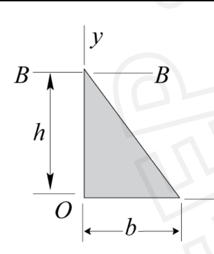
Triángulo rectángulo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{bh}{2} \qquad \bar{x} = \frac{b}{3} \qquad \bar{y} = \frac{h}{3}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \qquad I_y = \frac{hb^3}{36} \qquad I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_P = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{12}$$

7

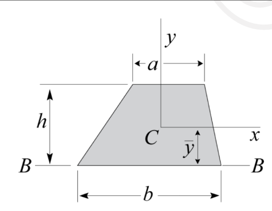


Triángulo rectángulo (origen de los ejes en un vértice)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad I_y = \frac{hb^3}{12} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$

$$I_P = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) \qquad I_{BB} = \frac{bh^3}{4}$$

8

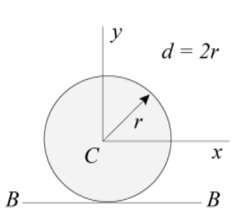


Trapecio (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{h(a+b)}{2} \qquad \bar{y} = \frac{h(2a+b)}{3(a+b)}$$

$$I_x = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a+b)} \qquad I_{BB} = \frac{h^3(3a+b)}{12}$$

9



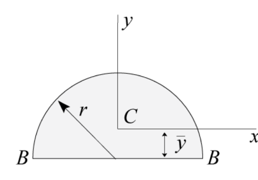
Círculo (origen de los ejes en el centro)

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \qquad I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \qquad S = \frac{\pi d^3}{32} \doteq \frac{d^3}{10}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \qquad I_{BB} = \frac{5\pi r^4}{4} = \frac{5\pi d^4}{64}$$

Propiedades de áreas planas

10

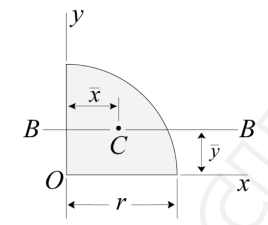


10 Semicírculo (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0.1098r^4 \qquad I_y = \frac{\pi^4}{8} \qquad I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = \frac{\pi r^4}{8}$$

11

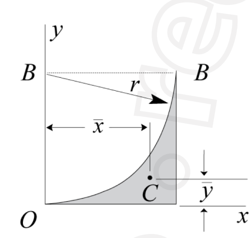


Cuadrante (origen de los ejes en el centro del círculo)

$$A = \frac{\pi r^2}{4} \qquad \bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16} \qquad I_{xy} = \frac{r^4}{8} \qquad I_{BB} = \frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{144\pi} \approx 0.0.05488r^4$$

12

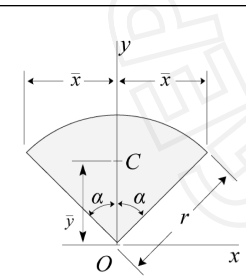


Tímpano del cuadrante (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$$A = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)r^2 \qquad \bar{x} = \frac{2r}{3(4-\pi)} \approx 0.7766r \qquad \bar{y} = \frac{(10-3\pi)r}{3(4-\pi)} \approx 0.2234r$$

$$I_x = \left(1 - \frac{5\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.01825r^4 \qquad I_y = I_{BB} = \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16}\right)r^4 \approx 0.1370r^4$$

13



Sector circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

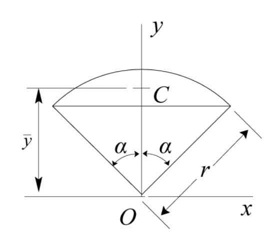
α = ángulos en radianes ($\alpha \leq \pi/2$)

$$A = \alpha r^2 \qquad \bar{x} = r \text{ sen } \alpha \qquad \bar{y} = \frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha + \text{ sen } \alpha \cos\alpha) \qquad I_y = \frac{r^4}{4}(\alpha - \text{ sen } \alpha \cos\alpha)$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\alpha r^4}{2}$$

14



Segmento circular (origen de los ejes en el centro del círculo)

α = ángulos en radianes ($\alpha \leq \pi/2$)

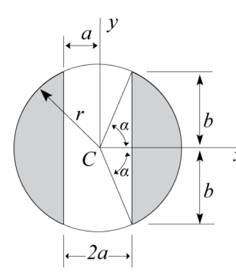
$$A = r^2(\alpha - \text{ sen } \alpha \cos\alpha) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{3}\left(\frac{\text{sen}^3\alpha}{\alpha - \text{ sen } \alpha\cos\alpha}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha + \text{ sen } \alpha\cos\alpha + 2\alpha + \text{ sen}^3\alpha\cos\alpha) \qquad I_{xy} = 0$$

$$I_y = \frac{r^4}{12}(3\alpha - 3\text{sen } \alpha\cos\alpha - 2\alpha + \text{ sen}^3\alpha\cos\alpha)$$

Propiedades de áreas planas

15 **Círculo con núcleo removido** (origen de los ejes en el centro del círculo)

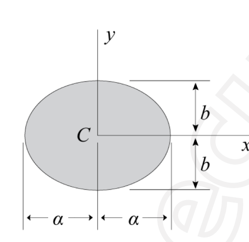


α = ángulos en radianes (α ≤ π/2)

$$\alpha = \arccos\frac{a}{r} \qquad b = \sqrt{r^2 - a^2} \qquad A = 2r^2\left(a - \frac{ab}{r^2}\right)$$

$$I_x = \frac{r^4}{6}\left(3a - \frac{3ab}{r^2} - \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_y = \frac{r^4}{2}\left(a - \frac{ab}{r^2} - \frac{2ab^3}{r^4}\right) \qquad I_{xy} = 0$$

16 **Elipse** (origen de los ejes en el centroide)



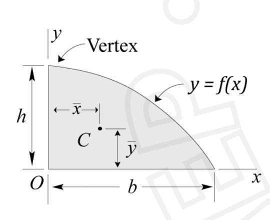
$$A = \pi ab \qquad I_x = \frac{\pi ab^3}{4} \qquad I_y = \frac{\pi ba^3}{2}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = \frac{\pi ab}{4}\left(b^2 + a^2\right)$$

$$\text{Circunferencia} \approx \pi\left[1.5(a+b) - \sqrt{ab}\right] \quad (a/3 \le b \le a)$$

$$\approx 4.17b^2/a \quad (0 \le b \le a/3)$$

17 **Segmento parabólico** (origen de los ejes en la esquina)

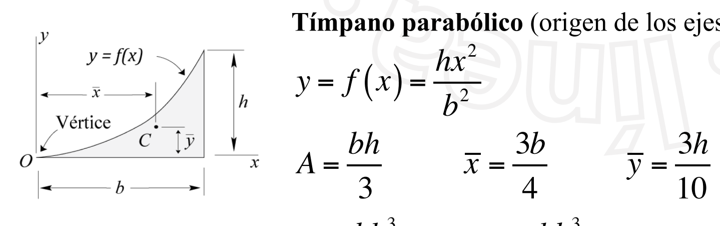


$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$A = \frac{2bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{8} \qquad \bar{y} = \frac{2h}{5}$$

$$I_x = \frac{16bh^3}{105} \qquad I_y = \frac{2hb^3}{15} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

18 **Tímpano parabólico** (origen de los ejes en el vértice)



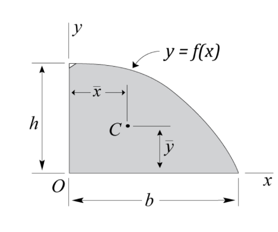
$$y = f(x) = \frac{hx^2}{b^2}$$

$$A = \frac{bh}{3} \qquad \bar{x} = \frac{3b}{4} \qquad \bar{y} = \frac{3h}{10}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{21} \qquad I_y = \frac{hb^3}{5} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{12}$$

Propiedades de áreas planas

19



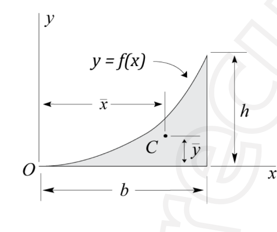
Segmento de grado *n* (origen de los ejes en la esquina)

$$y = f(x) = h\left(1 - \frac{x^n}{b^n}\right) \qquad (n > 0)$$

$$A = bh\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)} \qquad \bar{y} = \frac{hn}{2n+1}$$

$$I_x = \frac{2bh^3n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)} \qquad I_y = \frac{hb^3n}{3(n+3)} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2n^2}{4(n+1)(n+2)}$$

20



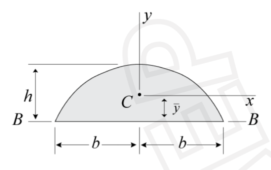
Tímpano de grado *n* (origen de los ejes en el punto de tangencia)

$$y = f(x) = \frac{hx^n}{b^n} \qquad (n > 0)$$

$$A = \frac{bh}{n+1} \qquad \bar{x} = \frac{b(n+1)}{n+2} \qquad \bar{y} = \frac{h(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3(3n+1)} \qquad I_y = \frac{hb^3}{n+3} \qquad I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4(n+1)}$$

21



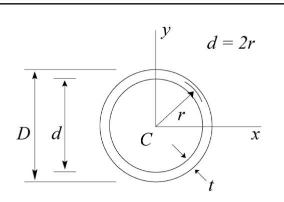
Onda senoidal (origen de los ejes en el centroide)

$$A = \frac{4bh}{\pi} \qquad \bar{y} = \frac{\pi h}{8}$$

$$I_x = \left(\frac{8}{9\pi} - \frac{\pi}{16}\right)bh^3 \approx 0.08659bh^3 \qquad I_y = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{32}{\pi^3}\right)hb^3 \approx 0.2412hb^3$$

$$I_{xy} = 0 \quad \bar{x} = \frac{3b}{8} \quad I_{BB} = \frac{8bh^3}{9\pi}$$

22



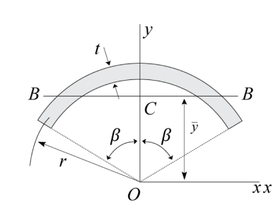
Anillo circular delgado (origen de los ejes en el centro)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

$$A = 2\pi rt \qquad I_x = I_y = \pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{8}$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_P = 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \qquad S = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$$

Propiedades de áreas planas

23



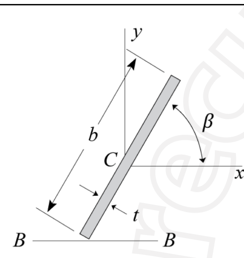
Arco circular delgado (origen de los ejes en el centro del círculo)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño
β = ángulo en radianes (*Nota:* para un arco semicircular, $\beta = \pi/2$)

$$A = 2\beta r t \qquad \bar{y} = \frac{r\ \text{sen}\beta}{\beta}$$

$$I_x = r^3 t(\beta + \text{sen}\beta\cos\beta) \qquad I_y = r^3 t(\beta - \text{sen}\beta\cos\beta)$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{BB} = r^3 t\left(\frac{2\beta + \text{sen}\ 2\beta}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{\beta}\right)$$

24

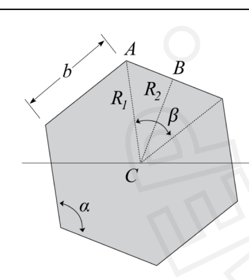


Rectángulo delgado (origen de los ejes en el centroide)
Fórmulas aproximadas para el caso en que t es pequeño

$$A = bt$$

$$I_x = \frac{tb^3}{12}\text{sen}^2\beta \qquad I_y = \frac{tb^3}{12}\cos^2\beta \qquad I_{BB} = \frac{tb^3}{3}\text{sen}^2\beta$$

25



Polígono regular con *n* lados (origen de los ejes en el centroide)

C = centroide (en el centro del polígono)
n = número de lados ($n \geq 3$) b = longitud de un lado
β = ángulo central para un lado α = ángulo interior (o ángulo en el vértice)

$$\beta = \frac{360^\circ}{n} \qquad \alpha = \left(\frac{n-2}{n}\right)180^\circ \qquad \alpha + \beta = 180^\circ$$

R_1 = radio del círculo circunscrito (línea CA) R_2 = radio del círculo inscrito (línea CB)

$$R_1 = \frac{b}{2}\csc\frac{\beta}{2} \qquad R_2 = \frac{b}{2}\cot\frac{\beta}{2} \qquad A = \frac{nb^2}{4}\cot\frac{\beta}{2}$$

I_c = momento de inercia respecto a cualquier eje por C (el centroide C es un punto principal y todo eje por C es un eje principal)

$$I_c = \frac{nb^4}{192}\left(\cot\frac{\beta}{2}\right)\left(3\cot^2\frac{\beta}{2} + 1\right) \qquad I_P = 2I_c$$





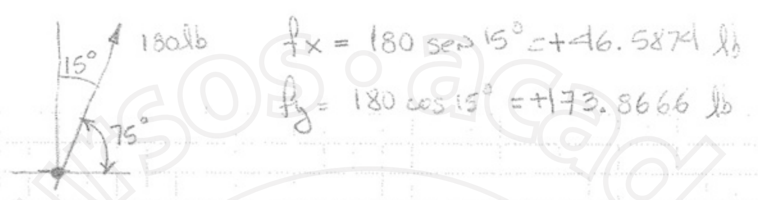
A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1 a) componentes x y y de cada cable.

125 lb, 30°

$f_x = 125 \cos 30° = -108.2532$ lb

$f_y = 125 \operatorname{sen} 30° = +62.5000$ lb



$f_x = 180 \operatorname{sen} 15° = +46.5874$ lb

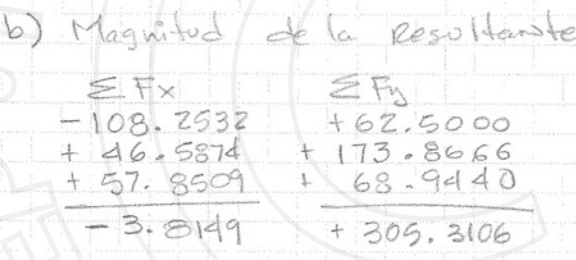
$f_y = 180 \cos 15° = +173.8666$ lb

90 lb, 50°

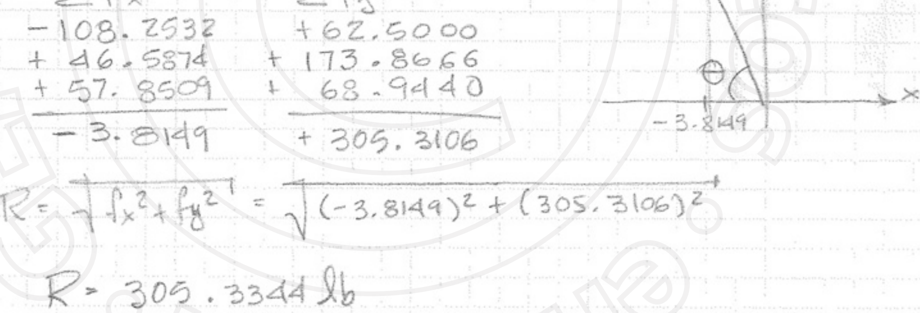
$f_x = 90 \cos 50° = +57.8509$ lb

$f_y = 90 \operatorname{sen} 50° = +68.9440$ lb

b) Magnitud de la resultante



ΣF_x	ΣF_y
−108.2532	+62.5000
+ 46.5874	+ 173.8666
+ 57.8509	+ 68.9440
− 3.8149	+ 305.3106



$R = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(-3.8149)^2 + (305.3106)^2}$

$R = 305.3344$ lb

c) dirección de la resultante

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{305.3106}{3.8149}\right) = 89.2841°$



1.2 a) Componentes x, y

1.42 kN = 1,420 N

$f_x = 1420 \cos 25° = -1,286.9571$ N

$f_y = 1420 \operatorname{sen} 25° = +600.1179$ N

1.36 kN = 1360 N

$f_x = 1360 \cos 75° = +351.9939$ N

$f_y = 1360 \operatorname{sen} 75° = +1,313.6591$ N

875 N

$f_x = 875 \cos 45° = +618.7184$ N

$f_y = 875 \operatorname{sen} 45° = +618.7184$ N

b) Magnitud de la resultante.

ΣF_x	ΣF_y
−1 286.9571	+600.1179
+ 351.9939	+1,313.6591
+ 618.7184	+ 618.7184
−316.2448	2,532.4954

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-316.2448)^2 + (2532.4954)^2}$$

$$R = 2,552.1645 \text{ N}$$

c) Dirección de la Resultante.

2532.4954

−316.2448

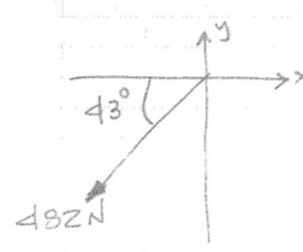
$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{2532.4954}{316.2448}\right) = 82.8820°$$

$$\theta = 82.8820°$$





1.3 a) Componentes x y y



$f_x = 482 \cos 43° = -352.5125\ N$

$f_y = 482 \text{ sen } 43° = -328.7232\ N$

69°
21°
1274 N

$f_x = 1274 \text{ sen } 21° = -456.5608\ N$

$f_y = 1274 \cos 21° = -1,189.3815\ N$

18°
2356N

$f_x = 2356 \cos 18° = +2,240.6892$

$f_y = 2356 \text{ sen } 18 = -728.0440$

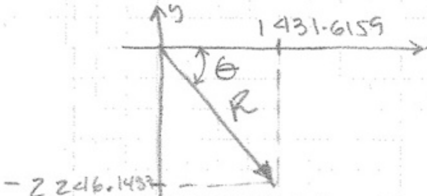
b) Magnitud de la resultante

ΣF_x	ΣF_y
−352.5125	−328.7232
−456.5608	−1 189.3815
+2 240.6892	−728.0440
1,431.6159	−2, 246.1487

$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1431.6159)^2 + (-2\,246.1487)^2}$

$R = 2,663.5893\ N$

c) Dirección de la resultante



$\theta = tg^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{2\,246.1487}{1431.6159}\right)$

$\theta = 57.488°$



1.4 a) Componentes x y y.

(763 lb, 40° desde el eje y)

$f_x = 763 \text{ sen } 40° = +490.4469 \text{ lb}$

$f_y = 763 \cos 40° = +584.4919 \text{ lb}$

(639 lb, 30° desde el eje x, 60° desde el eje y)

$f_x = 639 \cos 30° = +553.3902 \text{ lb}$

$f_y = 639 \text{ sen } 30° = +319.50 \text{ lb}$

(1 154 lb, 15° desde el eje y, hacia abajo)

$f_x = 1\,154 \text{ sen } 15° = +298.6772 \text{ lb}$

$f_y = 1\,154 \cos 15° = -1\,114.6784 \text{ lb}$

b) Magnitud de la Resultante

ΣF_x	ΣF_y
+490.4469	+584.4919
+553.3902	+319.50
+298.6772	−1114.6784
1 342.5143	−210.6865

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1342.5143)^2 + (-210.6865)^2}$$

$$R = 1,358.9457 \text{ lb}$$

c) Dirección de la resultante

(Diagrama: componentes 1342.5143 y −210.6865, resultante R, ángulo θ)

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{210.6865}{1342.5143}\right)$$

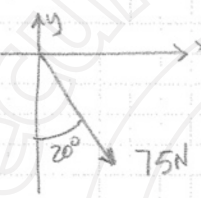
$$\theta = 8.9189°$$

1.5 a) Componentes X y Y

60N, 45°

$f_x = 60 \cos 45° = -42.4264\ N$

$f_y = 60 \operatorname{sen} 45° = +42.4264\ N$



$f_x = 50 \operatorname{sen} 65° = -45.3154\ N$

$f_y = 50 \cos 65° = -21.1309\ N$

20°, 75N

$f_x = 75 \operatorname{sen} 20° = +25.6515\ N$

$f_y = 75 \cos 20° = -70.4769\ N$

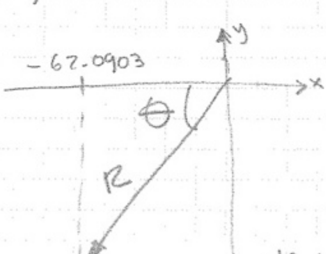
b) Magnitud de la Resultante

ΣF_x	ΣF_y
−42.4264	+42.4264
−45.3154	−21.1309
+25.6515	−70.4769
−62.0903	−49.1814

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-62.0903)^2 + (-49.1814)^2}$$

$$R = 79.2087\ N$$

c) Dirección de la resultante



$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{49.1814}{62.0903}\right)$$

$$\theta = 38.3826°$$

1.6 a) Componentes X y Y

$f_x = 205 \operatorname{sen} 17^\circ = -59.9362 \text{ lb}$

$f_y = 205 \cos 17^\circ = -196.0425 \text{ lb}$

205 lb, 17°

$f_x = 95 \operatorname{sen} 60^\circ = +82.2724 \text{ lb}$

$f_y = 95 \cos 60^\circ = -47.50 \text{ lb}$

95 lb, 60°

$f_x = 125 \cos 38^\circ = +98.5013 \text{ lb}$

$f_y = 125 \operatorname{sen} 38^\circ = +76.9577 \text{ lb}$

125 lb, 38°

b) Magnitud de la Resultante

ΣF_x	ΣF_y
−59.9362	−196.0425
+82.2724	−47.50
+98.5013	+76.9577
120.8375	−166.5848

$$R = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(120.8375)^2 + (-166.5848)^2}$$

$$R = 205.7965 \text{ lb}$$

c) Dirección de la Resultante

120.8375, −166.5848, θ

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{f_y}{f_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{166.5848}{120.8375}\right)$$

$$\theta = 54.0436^\circ$$

1.7 a) Componentes X y Y

1.365 kN, 16°

$f_x = 1365 \cos 16° = -1312.1222\,N$

$f_y = 1365 \operatorname{sen} 16° = +376.2450\,N$

893 N, 55°

$f_x = 893 \cos 55° = -512.2038\,N$

$f_y = 893 \operatorname{sen} 55° = -731.5028\,N$

756 N, 34°

$f_x = 756 \operatorname{sen} 34° = +422.7498\,N$

$f_y = 756 \cos 34° = -626.7524\,N$

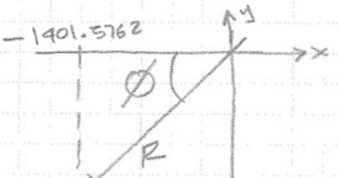
ΣF_x	ΣF_y
−1 312.1222	+ 376.2450
− 512.2038	− 731.5028
+ 422.7498	− 626.7524
− 1,401.5762	− 982.0102

b) Magnitud de la resultante

$$R = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{(-1401.5762)^2 + (-982.0102)^2}$$

$$R = 1,711.3620\,N$$

c) Dirección de la resultante



$$\varnothing = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{-982.0102}{-1401.5762}\right)$$

$$\varnothing = 35.0169°$$



1.8 a) componentes X y Y

$F_1 = 35$ kN, 55°, 25°, 35°, 65°, 60 kN $= F_2$

$F_{1x} = 35 \cos 35° = +28.6703$ kN

$F_{1y} = 35 \sin 35° = -20.0752$ kN

$F_{2x} = 60 \cos 65° = +25.3571$ kN

$F_{2y} = 60 \sin 65° = +54.3785$ kN

ΣF_x	ΣF_y
+28.6703	−20.0752
+25.3571	+54.3785
54.0274	34.3033

b) $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(54.0274)^2 + (34.3033)^2}$

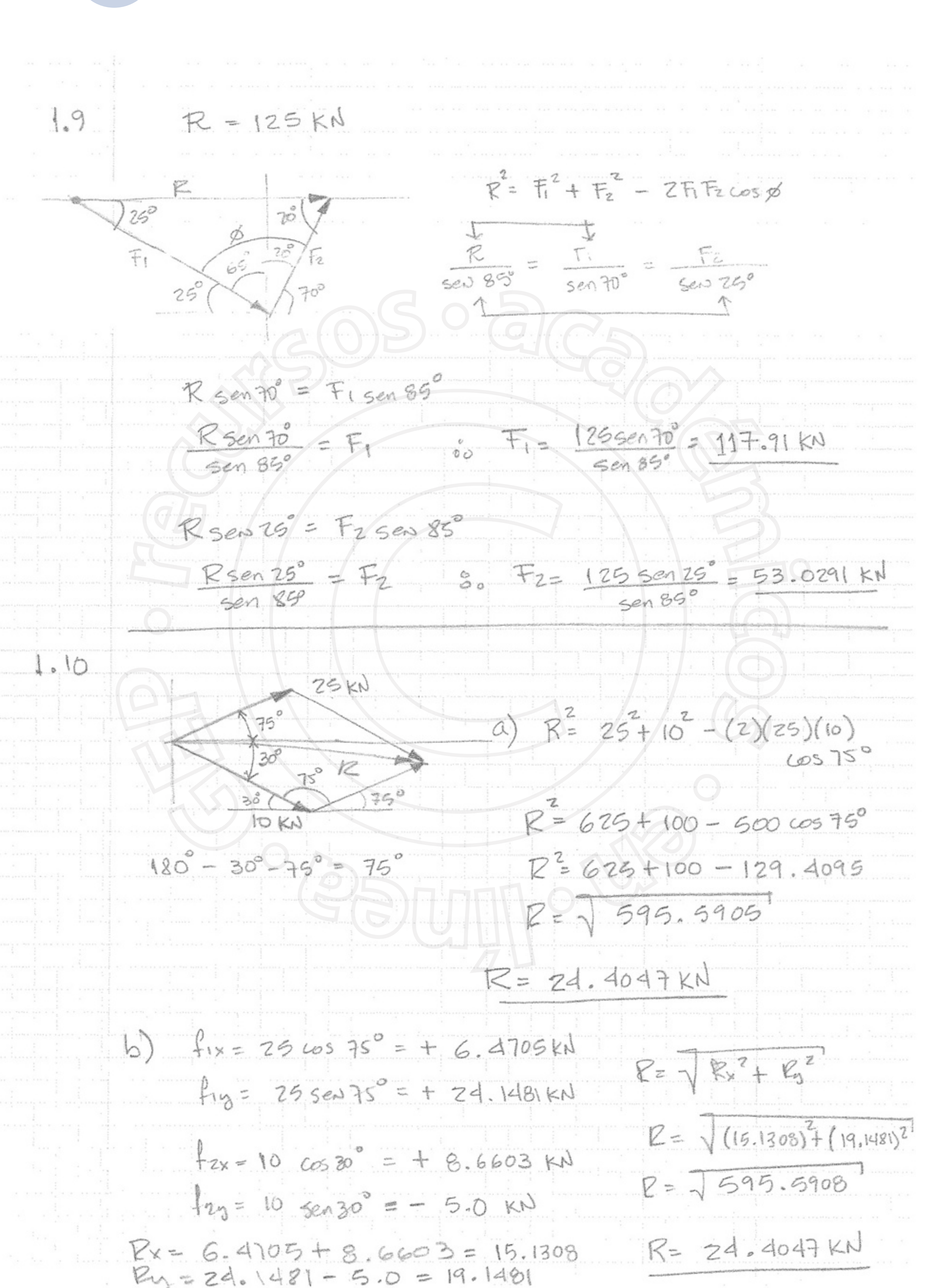
$R = 63.9975 \doteq 64$ kN

c) Dirección de la resultante

(y, 34.3033, R, Ø, x, 54.0274)

$\varnothing = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{34.3033}{54.0274}\right)$

$\varnothing = 32.4124°$


1.9
R = 125 KN
R
25°
70°
F1
ϕ
65
70°
F2
25°
70°
R² = F1² + F2² − 2F1F2 cos ϕ
R / sen 85° = F1 / sen 70° = F2 / sen 25°
R sen 70° = F1 sen 85°
R sen 70° / sen 85° = F1 ∴ F1 = 125 sen 70° / sen 85° = 117.91 KN
R sen 25° = F2 sen 85°
R sen 25° / sen 85° = F2 ∴ F2 = 125 sen 25° / sen 85° = 53.0291 KN
1.10
25 KN
75°
30°
75°
R
30°
75°
10 KN
180° − 30° − 75° = 75°
a) R² = 25² + 10² − (2)(25)(10) cos 75°
R² = 625 + 100 − 500 cos 75°
R² = 625 + 100 − 129.4095
R = √595.5905
R = 24.4047 KN
b) f1x = 25 cos 75° = + 6.4705 KN
f1y = 25 sen 75° = + 24.1481 KN
f2x = 10 cos 30° = + 8.6603 KN
f2y = 10 sen 30° = − 5.0 KN
Rx = 6.4705 + 8.6603 = 15.1308
Ry = 24.1481 − 5.0 = 19.1481
R = √(Rx² + Ry²)
R = √((15.1308)² + (19.1481)²)
R = √595.5908
R = 24.4047 KN



a) Método del triángulo

1.11

750 lb, 60°, R, 30°, 345 lb

30°, 60°, 90°, 750 lb, 345 lb, α, ϕ, 60°, R

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos\phi$$

$$R^2 = (750)^2 + (345)^2 - (2)(750)(345)\cos 90^\circ$$

$$R^2 = 562\,500 + 119\,025 - 517\,500 \cos 90^\circ$$

$$R^2 = 681{,}525. - 0$$

$$R = 825.5453 \text{ lb}$$

$$\frac{R}{\operatorname{sen} 90^\circ} = \frac{345 \text{ lb}}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{750 \text{ lb}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$R \operatorname{sen}\alpha = 750 \operatorname{sen} 90^\circ$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{750 \operatorname{sen} 90}{825.5453} = \frac{750}{825.5453} = 0.9085$$

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0.9085) = 65.2976^\circ$$

β, R

$$\beta = 65.2976 - 60^\circ = 5.2976^\circ$$

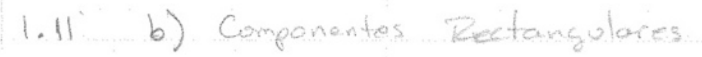
$$\therefore \beta = 5.2976^\circ$$

$$R \operatorname{sen}\phi = 345 \operatorname{sen} 90^\circ$$

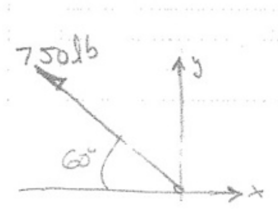
$$\operatorname{sen}\phi = \frac{345 \operatorname{sen} 90^\circ}{825.5453} = \frac{345}{825.5453} = 0.4179$$

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1}(0.4179) = 24.7024^\circ$$

$$\therefore \beta = 30 - \phi = 30^\circ - 24.7024^\circ = 5.2976^\circ$$



1.11 b) Componentes Rectangulares



$f_x = 750 \cos 60° = -375 \text{ lb}$

$f_y = 750 \operatorname{sen} 60° = +649.5191 \text{ lb}$

$f_x = 345 \cos 30° = -298.7788 \text{ lb}$

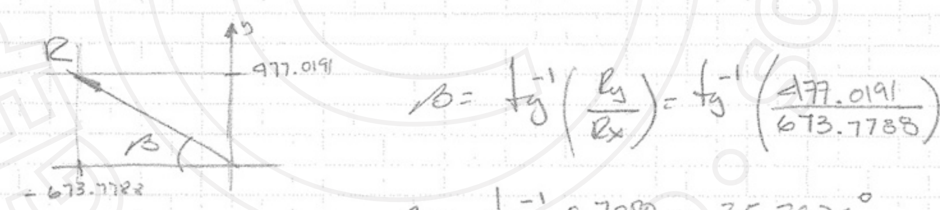
$f_y = 345 \operatorname{sen} 30° = -172.500 \text{ lb}$

$R_x = -375 - 298.7788 = -673.7788 \text{ lb}$

$R_y = +649.5191 - 172.50 = 477.0191 \text{ lb}$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-673.7788)^2 + (477.0191)^2}$

$R = 825.5453 \text{ lb}$



$\beta = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{477.0191}{673.7788}\right)$

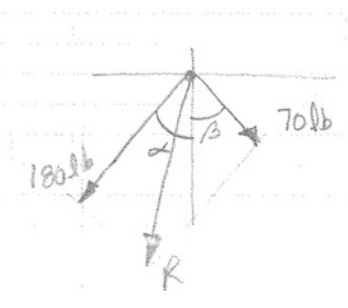
$\beta = tg^{-1}\, 0.7080 = 35.2976°$

$- 30°$

$\theta = 5.2976°$



1.12



$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{10}{15}\right) = 33.69°$

$\beta = tg^{-1}\left(\frac{5}{15}\right) = 18.4349°$

$\phi = 180° - \alpha - \beta = 180° - 33.69° - 18.4349°$

$\phi = 127.8751°$

$R^2 = 180^2 + 70^2 - 2(180)(70)\cos 127.8751°$

$R^2 = 32\,400 + 4\,900 - 25\,200 \cos 127.8751°$

$R^2 = 37,300 + 15\,471.3439$

$R^2 = 52,771.3439$

$\therefore\ R = \sqrt{52\,771.3439} = \underline{229.7201\,lb}$

$\gamma = \alpha - \theta$

$\gamma = 33.69° - 13.91°$

$\gamma = \underline{19.78°}$

$\frac{R}{\text{sen}\,\phi} = \frac{70\,lb}{\text{sen}\,\theta}$ $\quad R\,\text{sen}\,\theta = 70\,\text{sen}\,\phi$

$\text{sen}\,\theta = \frac{70\,\text{sen}\,\phi}{R}$

$\text{sen}\,\theta = \frac{70\,\text{sen}\,127.8751°}{229.7201} = 0.2405$ $\quad \theta = \text{sen}^{-1}\,0.2405$ $\quad \theta = 13.91°$

$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{77.71}{216.1762}\right)$

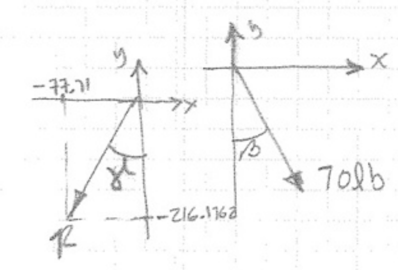
$\gamma = \underline{19.7723°}$

$f_x = 180\,\text{sen}\,33.69° = -99.8459\,lb$

$f_y = 180\cos 33.69° = -149.7692\,lb$

$f_x = 70\,\text{sen}\,18.4349° = +22.1359\,lb$

$f_y = 70\cos 18.4349° = -66.4070\,lb$



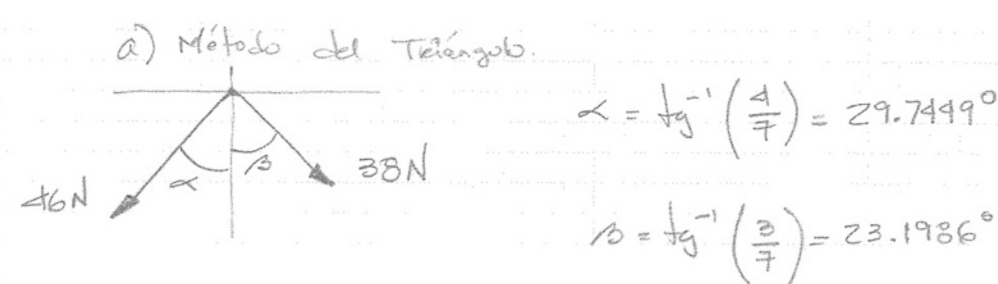
$R_x = -99.8459 + 22.1359 = -77.71\,lb$

$R_y = -149.7692 - 66.4070 = -216.1762\,lb$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-77.71)^2 + (-216.1762)^2} = \underline{229.7194\,lb}$



1.13 a) Método del Triángulo



$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) = 29.7449°$

$\beta = tg^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) = 23.1986°$

$\phi = 180° - \alpha - \beta = 180° - 29.7449 - 23.1986$

$\phi = 127.0565°$

$R^2 = 46^2 + 38^2 - (2)(46)(38)\cos 127.0565°$

$R^2 = 2116 + 1444 - 3496 \cos 127.0565$

$R^2 = 2116 + 1444 + 2106.6975 = 5,666.6975$

$\therefore R = 75.2775\ N$

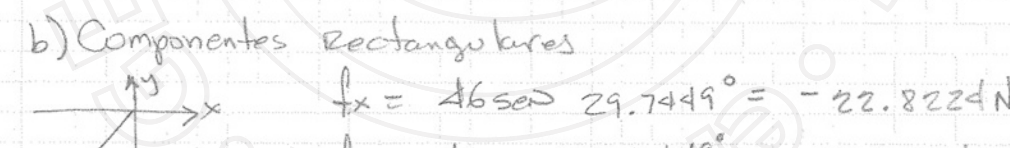
$\frac{R}{\text{sen}\,\phi} = \frac{38N}{\text{sen}\,\theta}$ $\quad R\,\text{sen}\,\theta = 38\,\text{sen}\,\phi$

$\text{sen}\,\theta = \frac{38\,\text{sen}\,127.0565°}{75.2775} = 0.4029$

$\theta = \text{sen}^{-1}\,0.4029 = 23.7565°$

$\gamma = \alpha - \theta = 29.7449° - 23.7565° = 5.9884°$

b) Componentes Rectangulares



$f_x = 46\,\text{sen}\,29.7449° = -22.8224\,N$

$f_y = 46\cos 29.7449° = -39.9392N$

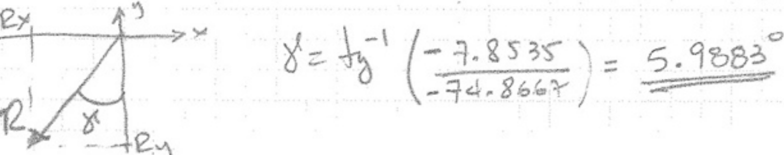
$f_x = 38\,\text{sen}\,23.1986° = +14.9689N$

$f_y = 38\cos 23.1986° = -34.9275N$

$R_x = -22.8224 + 14.9689 = -7.8535N$

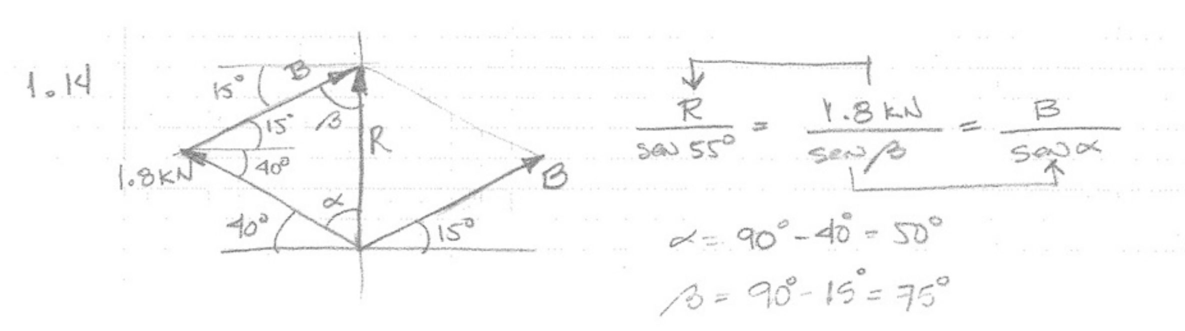
$R_y = -39.9392 - 34.9275 = -74.8667N$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-7.8535)^2 + (-74.8667)^2} = 75.2775N$



$\gamma = tg^{-1}\left(\frac{-7.8535}{-74.8667}\right) = 5.9883°$





$$R \operatorname{sen} \beta = 1.8 \operatorname{sen} 55^\circ$$

$$R \operatorname{sen} 75^\circ = 1.8 \operatorname{sen} 55^\circ$$

$$R = \frac{1.8 \operatorname{sen} 55^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \underline{\underline{1.5265 \text{ kN}}}$$

$$1.8 \operatorname{sen} \alpha = B \operatorname{sen} \beta$$

$$1.8 \operatorname{sen} 50^\circ = B \operatorname{sen} 75^\circ$$

$$\therefore \; B = \frac{1.8 \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \underline{\underline{1.4275 \text{ kN}}}$$

1.15

B, 20°, 20°, 70°, β, R, 30°, 682 lb, α 60°, 30°, 20°, B

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

$$\frac{R}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{682}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{B}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$R \operatorname{sen} \beta = 682 \operatorname{sen} 50^\circ$$

$$R = \frac{682 \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} = \underline{555.9715 \text{ lb}}$$

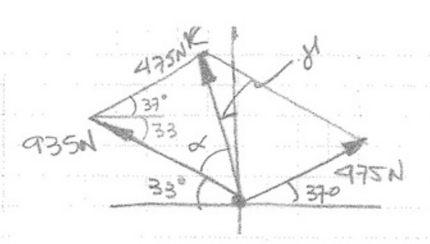
$$682 \operatorname{sen} \alpha = B \operatorname{sen} \beta$$

$$682 \operatorname{sen} 60^\circ = B \operatorname{sen} 70^\circ$$

$$\therefore \; B = \frac{682 \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 70^\circ} = \underline{628.5346 \text{ lb}}$$



1.16



$\theta = 37° + 33° = 70°$

$R^2 = 935^2 + 475^2 - (2)(935)(475)\cos 70° =$

$R^2 = 874\ 225 + 225\ 625 - 888\ 250 \cos 70°$

$R^2 = 874\ 225 + 225\ 625 - 303\ 799.3923$

$R = \sqrt{796\ 050.6077} = 892.2167\ \text{N}$

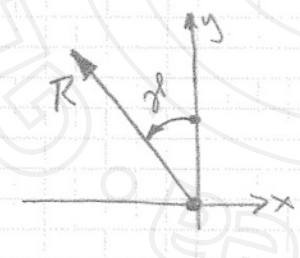
$R = \underline{892.2167\text{N}}$

$\frac{R}{\text{sen } 70°} = \frac{475}{\text{sen } \alpha}$ $\quad R \text{ sen } \alpha = 475 \text{ sen } 70°$

$\text{sen } \alpha = \frac{475 \text{ sen } 70°}{892.2167} = 0.5003$

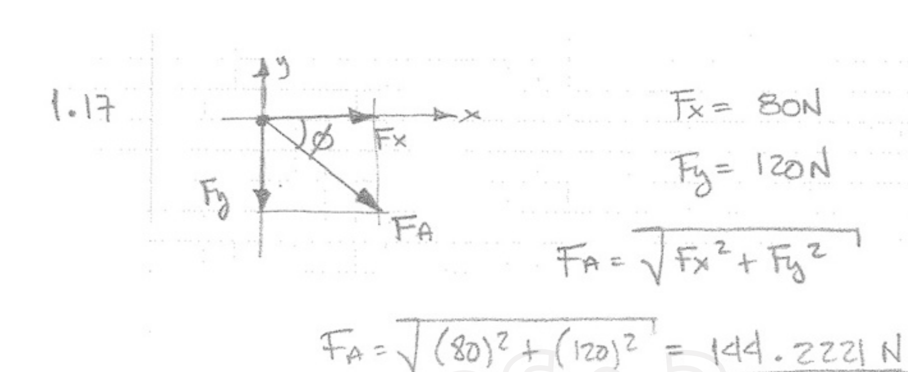
$\therefore \alpha = \text{sen}^{-1}\ 0.5003 = 30.0182°$

$\gamma = 90° - 33° - \alpha = 90 - 33° - 30.0182° = \underline{26.9818°}$





1.17



$F_x = 80\text{N}$

$F_y = 120\text{N}$

$F_A = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$F_A = \sqrt{(80)^2 + (120)^2} = 144.2221\ \text{N}$

$\varnothing = tg^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{120}{80}\right) = 56.3099^\circ$

1.18

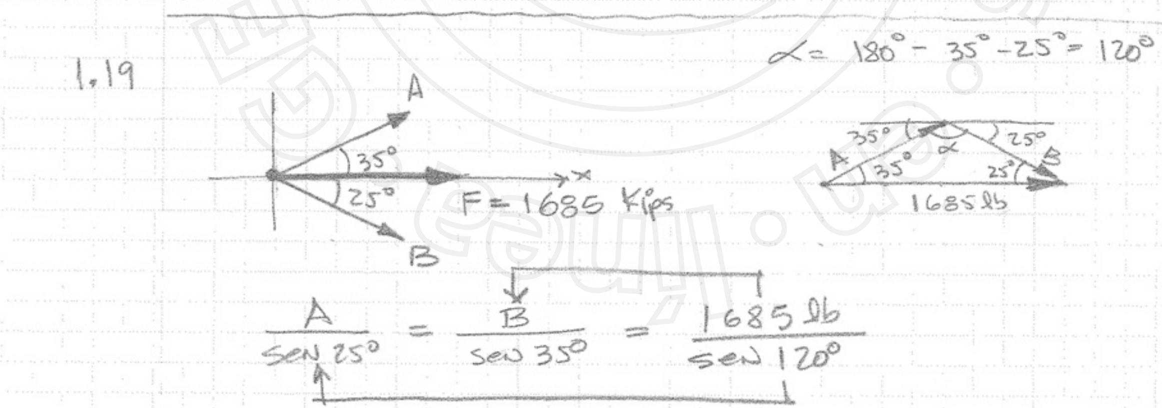
$F_x = 1350\ \text{lb} \cos 43^\circ = +987.3275\ \text{lb}$

$F_y = 1350\ \text{lb}\ \text{sen}\ 43^\circ = -920.6978\ \text{lb}$

$F = 1350\ \text{lb}$

1.19

$\alpha = 180^\circ - 35^\circ - 25^\circ = 120^\circ$



$\frac{A}{\text{sen}\ 25^\circ} = \frac{B}{\text{sen}\ 35^\circ} = \frac{1685\ \text{lb}}{\text{sen}\ 120^\circ}$

$A\ \text{sen}\ 120^\circ = 1685\ \text{lb}\ \text{sen}\ 25^\circ \qquad A = \frac{1685\ \text{sen}\ 25^\circ}{\text{sen}\ 120^\circ} = 822.2758$

$B\ \text{sen}\ 120^\circ = 1685\ \text{lb}\ \text{sen}\ 35^\circ \qquad B = \frac{1685\ \text{sen}\ 35^\circ}{\text{sen}\ 120^\circ} = 1\,115.9907$

$A = 822.2758\ \text{lb} \qquad B = 1,115.9907\ \text{lb}$



1.20

$\alpha = 180° - 20° - 15° = 145°$

56 kN 20° 15° 83 kN α 20° ϕ γ R x y

$$R^2 = (56)^2 + (83)^2 - (2)(56)(83)\cos 145°$$

$$R^2 = 3\,136 + 6\,889 - 9\,296 \cos 145°$$

$$R = \sqrt{17\,639.8374} = \underline{132.8150 \text{ kN}}$$

$$\frac{R}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{83 \text{ kN}}{\operatorname{sen}\phi}$$

$$R \operatorname{sen}\phi = 83 \operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{83 \operatorname{sen}\alpha}{R} = \frac{83 \operatorname{sen} 145°}{132.8150} = 0.3584$$

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} 0.3584 = 21.0047°$$

$$\gamma = \phi - 20° = 21.0047° - 20° = \underline{1.0047°}$$

y

$R = 132.8150$ kN

$\gamma = 1.0047°$ x



1.21

A = 675 N, B = 325 N, C = 428 N

$W = (9.81\,m/s^2)(1850\,kg) = 18\,148.5\,N$

	N	Fx	Fy
A	675	675 (3/5) = − 405.	675 (4/5) = 540
B	325	325 sen 30° = + 162.5	325 cos 30° = 281.4583
C	428	428 (4/5) = + 342.4	428 (3/5) = 256.80
W	18 148.5	0	− 18 148.5
		+ 99.90 N	− 17 070.2417 N

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(99.90)^2 + (-17070.2417)^2}$$

$$R = 17\,070.5340\,N$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{R_x}{R_y}\right) = tg^{-1}\left(\frac{99.9}{17070.2417}\right)$$

$$\phi = 0.3353°$$

$$\theta = 90° - 0.3353° = 89.6647°$$

1.22

A = 765 lb, B = 1250 lb, C = 375 lb, W = 2450 lb

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{608.4682}{238}\right)$$

$$\theta = 68.6372°$$

	lb	Fx	Fy
A	765	765 (4/5) = − 612.0	765 (3/5) = 459.
B	1250	1250 sen 30° = + 625	1250 cos 30° = 1082.5318
C	375	375 (3/5) = + 225	375 (4/5) = 300.
W	2450	0	− 2450.
		+ 238 lb	− 608.4682 lb

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(238)^2 + (-608.4682)^2} = 653.3587\,lb$$



1.23

1675 lb, 945 lb, 785 lb, 30°, F_{Ax}, F_{Ay}, F_A (dirección supuesta)

$F_{Ax} = ?$

$F_{Ay} = ?$

$F_A = ?$

$$x = 1675\,(3/3.1623) = -1\,589.0333$$

$$y = 1675\,(1/3.1623) = +\,529.6778$$

$$x = 945\,(4/5) = +\,756.0$$

$$y = 945\,(3/5) = +\,567.0$$

$$x = 785 \,\text{sen}\, 30° = -\,392.50$$

$$y = 785 \cos 30° = -\,679.8299$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad -1589.0333 + 756 - 392.50 + F_{Ax} = 0$$

$$-1\,225.5333 + F_{Ax} = 0$$

$$F_{Ax} = 1\,225.5333 \text{ lb}$$

$$\Sigma F_y = \quad 529.6778 + 567. - 679.8299 - F_{Ay} = 0$$

$$416.8479 - F_{Ay} = 0$$

$$F_{Ay} = 416.8479 \text{ lb}$$

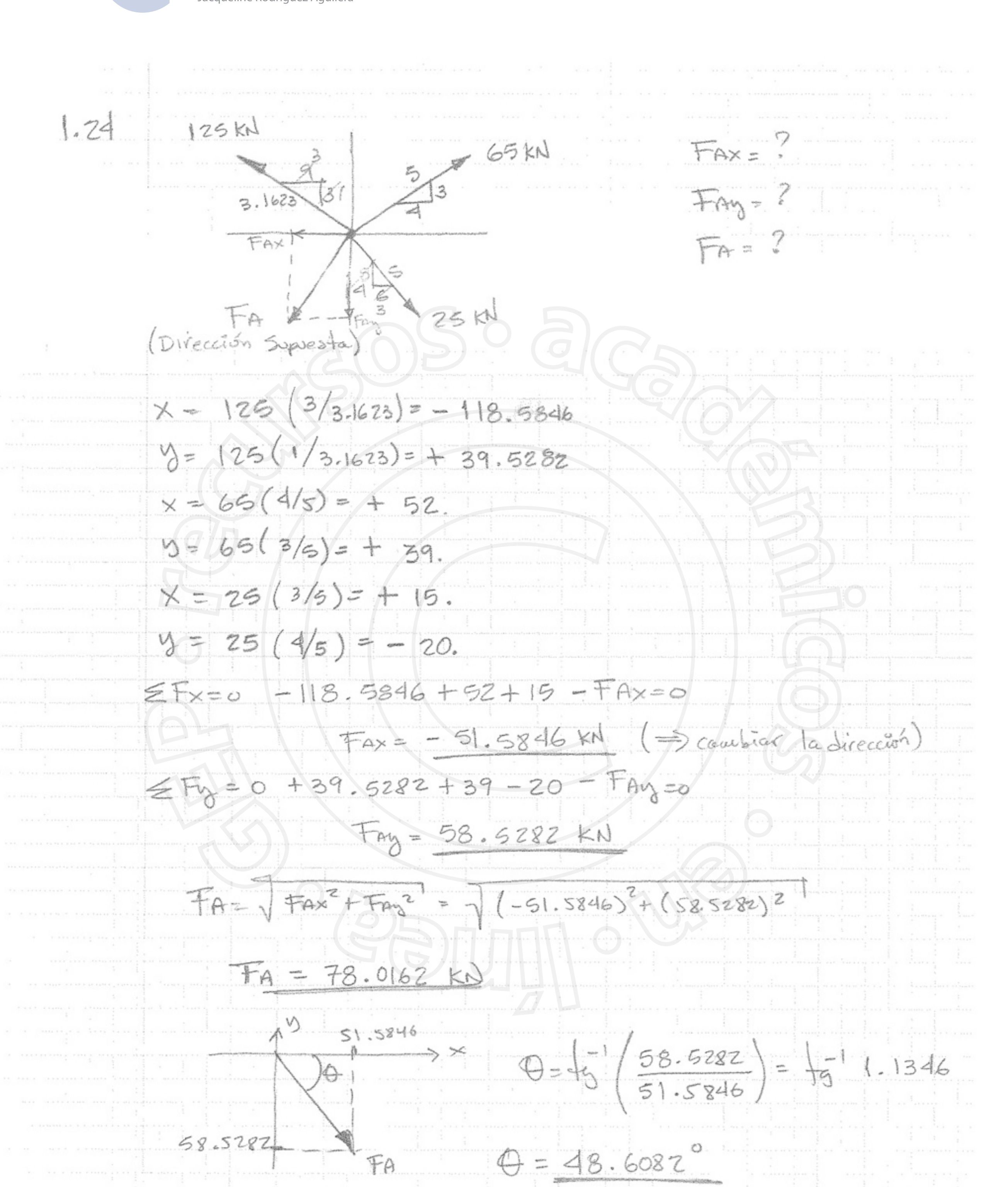
$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(1225.5333)^2 + (416.8479)^2}$$

$$F_A = 1,294.4860 \text{ lb}$$

y, x, 1225.5333, 416.8479, θ, F_A

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{416.8479}{1\,225.5333}\right) = tg^{-1}\, 0.3401$$

$$\theta = 18.7850°$$



$F_{Ax} = ?$

$F_{Ay} = ?$

$F_A = ?$

$x = 125(3/3.1623) = -118.5846$

$y = 125(1/3.1623) = +39.5282$

$x = 65(4/5) = +52.$

$y = 65(3/5) = +39.$

$x = 25(3/5) = +15.$

$y = 25(4/5) = -20.$

$\Sigma F_x = 0 \quad -118.5846 + 52 + 15 - F_{Ax} = 0$

$F_{Ax} = -51.5846 \text{ kN}$ (⇒ cambiar la dirección)

$\Sigma F_y = 0 \quad +39.5282 + 39 - 20 - F_{Ay} = 0$

$F_{Ay} = 58.5282 \text{ kN}$

$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{(-51.5846)^2 + (58.5282)^2}$

$F_A = 78.0162 \text{ kN}$

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{58.5282}{51.5846}\right) = tg^{-1}\, 1.1346$

$\theta = 48.6082°$

Grupo Editorial Patria

1.25 $F_{AP} = 865$ Kips

$F_x = ?$ $\theta_x = ?$
$F_y = ?$ $\theta_y = ?$
$F_z = ?$ $\theta_z = ?$

$$\vec{AP} = 20\,ft\, i - 30\,ft\, j + 60\,ft\, k$$

$$|AP| = \sqrt{(20)^2 + (-30)^2 + (+60)^2} = 70\ ft$$

$$\frac{F_{AP}}{|AP|} = \frac{865}{70} = 12.3571\ \text{Kips/ft}$$

$$\vec{F_{AP}} = 12.3571\left[20ft\, i - 30ft\, j + 60ft\, k\right]$$

$$\vec{F_{AP}} = 247.1420\ \text{Kips}\ i - 370.7130\ \text{Kips}\ j + 741.4260\ \text{kips}\ k$$

$F_{APx} = 247.1420$ kips

$F_{APy} = -370.7130$ Kips

$F_{APz} = 741.4260$ kips

$$\cos\theta_x = \frac{F_{APx}}{F} = \frac{247.1420}{865} = 0.2857$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_{APy}}{F} = \frac{-370.7130}{865} = -0.4286$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_{APz}}{F} = \frac{741.4260}{865} = 0.8571$$

$$\theta_x = \cos^{-1} 0.2857 = 73.3985^\circ$$

$$\theta_y = \cos^{-1} -0.4286 = 115.3768^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1} 0.8571 = 31.0030^\circ$$

1.26 $F_{AP} = 81\,315\text{ N} = 81.315\text{ kN}$

$F_x = ?$ $\theta_x = ?$

$F_y = ?$ $\theta_y = ?$

$F_z = ?$ $\theta_z = ?$

$\overrightarrow{AP} = 7\text{ m } i - 15\text{ m } j + 25\text{ m } k$

$|\overline{AP}| = \sqrt{(7)^2 + (-15)^2 + (25)^2} = 29.9833\text{ m}$

$\frac{F_{AP}}{|AP|} = \frac{81.315}{29.9833} = 2.7120\text{ kN/m}$

$\overrightarrow{F_{AP}} = 2.7120\left[7\text{ m } i - 15\text{ m } j + 25\text{ m } k\right]$

$\overline{F_{AP}} = 18.9840\text{ kN } i - 40.6800\text{ kN } j + 67.8000\text{ kN } k$

$F_{APx} = 18.9840\text{ kN}$

$F_{APy} = -40.68\text{ kN}$

$F_{APz} = 67.80\text{ kN}$

$\cos\theta_x = \frac{18.9840}{81.315} = 0.2335$

$\cos\theta_y = \frac{-40.68}{81.315} = -0.5003$

$\cos\theta_z = \frac{67.80}{81.315} = 0.8338$

$\theta_x = \cos^{-1} 0.2335 = 76.4990°$

$\theta_y = \cos^{-1} -0.5003 = 120.0183°$

$\theta_z = \cos^{-1} 0.8338 = 33.5095°$



1.27 $T_{AP} = 985$ kN $\quad P_z = ?$ — es vertical P_k

$\vec{AP} = +5\,m\,i - 15\,m\,j - 35\,m\,k$

$\vec{BP} = +7\,m\,i + 20\,m\,j - 35\,m\,k$

$\vec{CP} = -10\,m\,i + 3\,m\,j - 35\,m\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(5)^2 + (-15)^2 + (-35)^2} = 38.4057\ m$

$|BP| = \sqrt{(7)^2 + (20)^2 + (-35)^2} = 40.9145\ m$

$|CP| = \sqrt{(-10)^2 + (3)^2 + (-35)^2} = 36.5240\ m$

$\vec{F_{AP}} = \frac{T_{AP}}{38.4057}\left[5i - 15j - 35k\right]$

$\vec{F_{BP}} = \frac{T_{BP}}{40.9145}\left[7i + 20j - 35k\right]$

$\vec{F_{CP}} = \frac{T_{CP}}{36.5240}\left[-10i + 3j - 35k\right]$

$\vec{F_{AP}} = (0.1302\,i - 0.3906\,j - 0.9113\,k)\,T_{AP}$

$\vec{F_{BP}} = (0.1711\,i + 0.4888\,j - 0.8554\,k)\,T_{BP}$

$\vec{F_{CP}} = (-0.2738\,i + 0.0821\,j - 0.9583\,k)\,T_{CP}$

$\vec{F_{AP}} = 0.1302\,T_{AP}\,i - 0.3906\,T_{AP}\,j - 0.9113\,T_{AP}\,k$

$\vec{F_{BP}} = 0.1711\,T_{BP}\,i + 0.4888\,T_{BP}\,j - 0.8554\,T_{BP}\,k$

$\vec{F_{CP}} = -0.2738\,T_{CP}\,i + 0.0821\,T_{CP}\,j - 0.9583\,T_{CP}\,k$

$\sum F_x i = 0 \qquad 0.1302\,T_{AP} + 0.1711\,T_{BP} - 0.2738\,T_{CP} = 0$

$\sum F_y j = 0 \qquad -0.3906\,T_{AP} + 0.4888\,T_{BP} + 0.0821\,T_{CP} = 0$

$\sum F_z k = 0 \qquad \underbrace{-0.9113\,T_{AP}} - 0.8554\,T_{BP} - 0.9583\,T_{CP} + P_z = 0$

Si sustituimos $T_{AP} = 985$ kN tenemos:



1.'6+ CONT.:

$$\Sigma F_x=0 \quad 128.2470 + 0.1711\,T_{BP} - 0.2738\,T_{CP}=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=0 \quad -384.7410 + 0.4888\,T_{BP} + 0.0821\,T_{CP}=0 \qquad (2)$$

$$\Sigma F_z=0 \quad -897.6305 - 0.8555\,T_{BP} - 0.9583\,T_{CP} + P_z=0 \qquad (3)$$

$$T_{BP} = \frac{-128.2470}{0.1711} + \frac{0.2738\,T_{CP}}{0.1711}$$

$$T_{BP} = -749.5441 + 1.6002\,T_{CP}$$

$$-384.7410 + 0.4888\left[-749.5441 + 1.6002\,T_{CP}\right] + 0.0821\,T_{CP}=0$$

$$-384.7410 - 366.3772 + 0.7822\,T_{CP} + 0.0821\,T_{CP}=0$$

$$-751.1182 + 0.8643\,T_{CP}=0$$

$$T_{CP} = \frac{751.1182}{0.8643} = \underline{869.0480 \text{ KN}}$$

$$T_{BP} = -749.5441 + 1.6002(869.0480)$$

$$T_{BP} = -749.5441 + 1.390.6506$$

$$T_{BP} = \underline{641.1065 \text{ KN}}$$

$$P_z = 897.6305 + 0.8555\,T_{BP} + 0.9583\,T_{CP}$$

$$P_z = 897.6305 + 0.8555(641.1065) + 0.9583(869.0480)$$

$$P_z = 897.6305 + 548.4666 + 832.8087$$

$$P_z = \underline{2,278.9058 \text{ KN}}$$

1.28 $T_{BP} = 746\ kN \qquad P_y = ?$

$\vec{AP} = 7m\,i - 20m\,j - 40m\,k$

$\vec{BP} = 9m\,i + 25m\,j - 40m\,k$

$\vec{CP} = -12m\,i + 5m\,j - 40m\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(7)^2 + (-20)^2 + (-40)^2} = 45.2659$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(9)^2 + (25)^2 + (-40)^2} = 48.0208$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-12)^2 + (5)^2 + (-40)^2} = 42.0595$

$\vec{F}_{AP} = \dfrac{T_{AP}}{45.2659}[7m\,i - 20m\,j - 40m\,k]$

$\vec{F}_{BP} = \dfrac{T_{BP}}{48.0208}[9m\,i + 25m\,j - 40m\,k]$

$\vec{F}_{CP} = \dfrac{T_{CP}}{42.0595}[-12m\,i + 5m\,j - 40m\,k]$

$\vec{F}_{AP} = 0.1546\,T_{AP}\,i - 0.4418\,T_{AP}\,j - 0.8837\,T_{AP}\,k$

$\vec{F}_{BP} = 0.1874\,T_{BP}\,i + 0.5206\,T_{BP}\,j - 0.8330\,T_{BP}\,k$

$\vec{F}_{CP} = -0.2853\,T_{CP}\,i + 0.1189\,T_{CP}\,j - 0.9510\,T_{CP}\,k$

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.1546\,T_{AP} + 0.1874\,T_{BP} - 0.2853\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.4418\,T_{AP} + 0.5206\,T_{BP} + 0.1189\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z k = 0 \quad -0.8837\,T_{AP} - 0.8330\,T_{BP} - 0.9510\,T_{CP} + P_z = 0$

Sustituyendo el valor de $T_{BP} = 746\ kN$ tenemos:

$0.1546\,T_{AP} + 0.1874(746) - 0.2853\,T_{CP} = 0$

$-0.4418\,T_{AP} + 0.5206(746) + 0.1189\,T_{CP} = 0$

$-0.8837\,T_{AP} - 0.8330(746) - 0.9510\,T_{CP} + P_z = 0$

$0.1546\,T_{AP} + 139.8004 - 0.2853\,T_{CP} = 0$ —— (1)

$-0.4418\,T_{AP} + 388.3676 + 0.1189\,T_{CP} = 0$ —— (2)

$-0.8837\,T_{AP} - 621.4180 - 0.9510\,T_{CP} + P_z = 0$ —— (3)



1.28 continuación

$$T_{AP} = \frac{-139.8004}{0.1546} + \frac{0.2853\,T_{CP}}{0.1546}$$

$$T_{AP} = -904.2717 + 1.8454\,T_{CP}$$

$$-0.4418\left[-904.2717 + 1.8454\,T_{CP}\right] + 388.3676 + 0.1189\,T_{CP} = 0$$

$$+399.5072 - 0.8153\,T_{CP} + 388.3676 + 0.1189\,T_{CP} = 0$$

$$787.8748 - 0.6964\,T_{CP} = 0$$

$$\frac{787.8748}{0.6964} = T_{CP} \quad \therefore \quad T_{CP} = \underline{1,131.3538 \text{ kN}}$$

$$T_{AP} = -904.2717 + 1.8454\,(1\,131.3538)$$

$$T_{AP} = -904.2717 + 2\,087.8003 = \underline{1,183.5286 \text{ kN}}$$

$$-0.8837\,(1\,183.5286) - 621.4180 - 0.9510\,(1\,131.3538) + P_Z = 0$$

$$-1\,045.8842 - 621.4180 - 1\,075.9175 + P_Z = 0$$

$$\therefore \quad P_Z = \underline{2,743.2197 \text{ kN}}$$



1.29 $T_{CP} = 1075 \text{ kN}$ $\quad P_z = ?$

$\vec{AP} = 6m\,i - 23m\,j - 38m\,k$

$\vec{BP} = 11m\,i + 27m\,j - 38m\,k$

$\vec{CP} = -14m\,i + 7m\,j - 38m\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(6)^2 + (-23)^2 + (-38)^2} = 44.8219$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(11)^2 + (27)^2 + (-38)^2} = 47.8957$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-14)^2 + (7)^2 + (-38)^2} = 41.0974$

$\vec{F}_{AP} = \frac{T_{AP}}{44.8219}[6m\,i - 23m\,j - 38m\,k]$

$\vec{F}_{BP} = \frac{T_{BP}}{47.8957}[11m\,i + 27m\,j - 38m\,k]$

$\vec{F}_{CP} = \frac{T_{CP}}{41.0974}[-14m\,i + 7m\,j - 38m\,k]$

$\vec{F}_{AP} = 0.1339\,T_{AP}\,i - 0.5131\,T_{AP}\,j - 0.8478\,T_{AP}\,k$

$\vec{F}_{BP} = 0.2297\,T_{BP}\,i + 0.5637\,T_{BP}\,j - 0.7934\,T_{BP}\,k$

$\vec{F}_{CP} = -0.3407\,T_{CP} + 0.1703\,T_{CP}\,j - 0.9246\,T_{CP}\,k$

$\Sigma F_{x}i = 0 \quad 0.1339\,T_{AP} + 0.2297\,T_{BP} - 0.3407\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{y}j = 0 \quad -0.5131\,T_{AP} + 0.5637\,T_{BP} + 0.1703\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{z}k = 0 \quad -0.8478\,T_{AP} - 0.7934\,T_{BP} - 0.9246\,T_{CP} + P_z = 0$

Si sustituimos el valor de $T_{CP} = 1075$ kN tenemos:

$0.1339\,T_{AP} + 0.2297\,T_{BP} - 0.3407(1075) = 0$

$-0.5131\,T_{AP} + 0.5637\,T_{BP} + 0.1703(1075) = 0$

$-0.8478\,T_{AP} - 0.7934\,T_{BP} - 0.9246(1075) + P_z = 0$



1.29 continuación

$$0.1339\,T_{AP} + 0.2297\,T_{BP} - 366.2525 = 0$$

$$-0.5131\,T_{AP} + 0.5637\,T_{BP} + 183.0725 = 0$$

$$-0.8478\,T_{AP} - 0.7934\,T_{BP} - 993.9450 + P_z = 0$$

$$T_{AP} = \frac{-0.2297\,T_{BP}}{0.1339} + \frac{366.2525}{0.1339}$$

$$T_{AP} = -1.7155\,T_{BP} + 2735.2689$$

$$-0.5131\left[-1.7155\,T_{BP} + 2735.2689\right] + 0.5637\,T_{BP} + 183.0725 = 0$$

$$+0.8802\,T_{BP} - 1403.4665 + 0.5637\,T_{BP} + 183.0725 = 0$$

$$1.4439\,T_{BP} - 1220.3940 = 0$$

$$\therefore \quad T_{BP} = \frac{1220.3940}{1.4439} = 845.2067$$

$$\underline{T_{BP} = 845.2067\ \text{kN}}$$



1.30

$T_{AP} = 3{,}245$ Kips

$\vec{AP} = +12ft\,i - 67ft\,j - 120\,ft\,k$

$\vec{BP} = +50\,ft\,i + 42ft\,j - 120\,ft\,k$

$\vec{CP} = -34\,ft\,i + 17\,ft\,j - 120ft\,k$

$|\vec{AP}| = \sqrt{(12)^2 + (-67)^2 + (-120)^2} = 137.9601$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(50)^2 + (42)^2 + (-120)^2} = 136.6163$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-34)^2 + (17)^2 + (-120)^2} = 125.8769$

$\vec{F_{AP}} = \frac{T_{AP}}{137.9601}[12ft\,i - 67\,ft\,j - 120\,ft\,k]$

$\vec{F_{BP}} = \frac{T_{BP}}{136.6163}[50\,ft\,i + 42ft\,j - 120\,ft\,k]$

$\vec{F_{CP}} = \frac{T_{CP}}{125.8767}[-34\,ft\,i + 17\,ft\,j - 120\,ft\,k]$

$\vec{F_{AP}} = 0.0870\,T_{AP}\,i - 0.4856\,T_{AP}\,j - 0.8698\,T_{AP}\,k$

$\vec{F_{BP}} = 0.3660\,T_{BP}\,i + 0.3074\,T_{BP}\,j - 0.8784\,T_{BP}\,k$

$\vec{F_{CP}} = -0.2701\,T_{CP}\,i + 0.1351\,T_{CP}\,j - 0.9533\,T_{CP}\,k$

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.0870\,T_{AP} + 0.3660\,T_{BP} - 0.2701\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.4856\,T_{AP} + 0.3074\,T_{BP} + 0.1351\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z = 0 \quad -0.8698\,T_{AP} - 0.8784\,T_{BP} - 0.9533\,T_{CP} + P_z = 0$

$-0.0870(3245) + 0.3660\,T_{BP} - 0.2701\,T_{CP} = 0$

$-0.4856(3245) + 0.3074\,T_{BP} + 0.1351\,T_{CP} = 0$

$-0.8698(3245) - 0.8784\,T_{BP} - 0.9533\,T_{CP} + P_z = 0$

$-282.3150 + 0.3660\,T_{BP} - 0.2701\,T_{CP} = 0$ —— (1)

$-1575.7720 + 0.3074\,T_{BP} + 0.1351\,T_{CP} = 0$ —— (2)

$-2822.5010 - 0.8784\,T_{BP} - 0.9533\,T_{CP} + P_z = 0$ —— (3)



1.30 continuación

$$0.3660\,T_{BP} = 0.2701\,T_{CP} + 282.3150$$

$$T_{BP} = \frac{0.2701\,T_{CP}}{0.3660} + \frac{282.3150}{0.3660}$$

$$T_{BP} = 0.7380\,T_{CP} + 771.3525$$

$$-1575.7720 + 0.3074\left[0.7380\,T_{CP} + 771.3525\right] + 0.1351\,T_{CP} = 0$$

$$-1575.7720 + 0.2269\,T_{CP} + 237.1138 + 0.1351\,T_{CP} = 0$$

$$-1\,338.6582 + 0.3620\,T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{1\,338.6582}{0.3620}$$

$$T_{CP} = \underline{3{,}697.9508 \text{ Kips}}$$

$$T_{BP} = 0.7380\,(3\,697.9508) + 771.3525$$

$$T_{BP} = 2\,729.0877 + 771.3525$$

$$T_{BP} = \underline{3{,}500.4402 \text{ Kips}}$$

$$-2822.5010 - 0.8784\,(3500.4402) - 0.9533\,(3697.9508) + P_z = 0$$

$$-2822.5010 - 3\,074.7867 - 3\,525.2565 + P_z = 0$$

$$-9{,}422.5442 + P_z = 0$$

$$\therefore\ P_z = \underline{9{,}422.5442 \text{ Kips}}$$

1.31 Placa $W_z = (3\ 545\ kg)(9.81\ m/s^2) = 34\ 776.45\ N$

$$W_z = 34.776\ kN$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad -T_{AP} \operatorname{sen} 45^\circ \cos 10^\circ + T_{BP} \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 35^\circ + T_{CP} \operatorname{sen} 45^\circ \cos 65^\circ = 0 \quad \text{—— (1)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad T_{AP} \operatorname{sen} 45^\circ \cos 80^\circ + T_{BP} \operatorname{sen} 45^\circ \cos 35^\circ - T_{CP} \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 65^\circ = 0 \quad \text{—— (2)}$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad -T_{AP} \cos 45^\circ - T_{BP} \cos 45^\circ - T_{CP} \cos 45^\circ + 34.776 = 0 \quad \text{(3)}$$

$$-0.6964\ T_{AP} + 0.4056\ T_{BP} + 0.2988\ T_{CP} = 0 \quad \text{—— (1)}$$

$$0.1228\ T_{AP} + 0.5792\ T_{BP} - 0.6409\ T_{CP} = 0 \quad \text{—— (2)}$$

$$-0.7071\ T_{AP} - 0.7071\ T_{BP} - 0.7071\ T_{CP} + 34.776 = 0$$

$$-T_{AP} - T_{BP} - T_{CP} + 49.1807 = 0 \quad \text{—— (3)}$$

Despejamos T_{AP} de la ec (3) y sustituimos en la ec. (1):

$$T_{AP} = -T_{BP} - T_{CP} + 49.1809$$

$$-0.6964 [-T_{BP} - T_{CP} + 49.1809] + 0.4056\ T_{BP} + 0.2988\ T_{CP} = 0$$

$$+0.6964\ T_{BP} + 0.6964\ T_{CP} - 34.2496 + 0.4056\ T_{BP} + 0.2988\ T_{CP} = 0$$

$$1.1020\ T_{BP} + 0.9952\ T_{CP} - 34.2496 = 0$$

$$1.1020\ T_{BP} = 34.2496 - 0.9952\ T_{CP}$$

$$T_{BP} = \frac{34.2496}{1.1020} - \frac{0.9952\ T_{CP}}{1.1020}$$

$$T_{BP} = 31.0795 - 0.9031\ T_{CP}$$

$$0.1228 [-T_{BP} - T_{CP} + 49.1809] + 0.5792 [31.0795 - 0.9031\ T_{CP}] - 0.6409\ T_{CP} = 0$$

$$-0.1228\ T_{BP} - 0.1228\ T_{CP} + 6.0394 + 18.0012 - 0.5231\ T_{CP} - 0.6409\ T_{CP} = 0$$



1.31 continuación

$$-0.1228\,T_{BP} - 1.2868\,T_{CP} + 24.0406 = 0$$

Si sustituimos el valor de T_{BP} tenemos:

$$-0.1228\,[31.0795 - 0.9031\,T_{CP}] - 1.2868\,T_{CP} + 24.0406 = 0$$

$$-3.8166 + 0.1109\,T_{CP} - 1.2868\,T_{CP} + 24.0406 = 0$$

$$20.2240 - 1.1759\,T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{20.2240}{1.1759} = \underline{17.1987\ \text{kN}}$$

$$T_{BP} = 31.0795 - 0.9031\,[17.1987]$$

$$T_{BP} = 31.0795 - 15.5321 = \underline{15.5474\ \text{kN}}$$

$$T_{AP} = -15.5474 - 17.1987 + 49.1809$$

$$\underline{T_{AP} = 16.4348\ \text{kN}}$$



1.32 Placa $W_z = 7850$ lb

$\Sigma F_x = 0 \quad -T_{AP}\,\text{sen}\,60°\cos 20° + T_{BP}\,\text{sen}\,60°\,\text{sen}\,35°$

$T_{CP}\,\text{sen}\,60°\cos 65° = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad +T_{AP}\,\text{sen}\,60°\cos 80° + T_{BP}\,\text{sen}\,60°\cos 35° - T_{CP}\,\text{sen}\,60°\,\text{sen}\,65° = 0$

$\Sigma F_z = 0 \quad -T_{AP}\cos 60° - T_{BP}\cos 60° - T_{CP}\cos 60° + 7850 = 0$

$-0.8138\,T_{AP} + 0.4967\,T_{BP} + 0.3660\,T_{CP} = 0$ ___ (1)

$+0.1504\,T_{AP} + 0.7094\,T_{BP} - 0.7849\,T_{CP} = 0$ ___ (2)

$-0.50\,T_{AP} - 0.50\,T_{BP} - 0.50\,T_{CP} + 7850 = 0$ ___ (3)

Si despejamos T_{AP} de la ec (1) y la sust. en la ec. (2):

$$T_{AP} = \frac{0.4967\,T_{BP}}{0.8138} + \frac{0.3660\,T_{CP}}{0.8138}$$

$$T_{AP} = 0.6103\,T_{BP} + 0.4497\,T_{CP}$$

$$+0.1504\left[0.6103\,T_{BP} + 0.4497\,T_{CP}\right] + 0.7094\,T_{BP} - 0.7849\,T_{CP} = 0$$

$$0.0918\,T_{BP} + 0.0676\,T_{CP} + 0.7094\,T_{BP} - 0.7849\,T_{CP} = 0$$

$$0.8012\,T_{BP} - 0.7173\,T_{CP} = 0$$

$$T_{BP} = \frac{0.7173}{0.8012}\,T_{CP} = 0.8953\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = 0.6103\,(0.8953\,T_{CP}) + 0.4497\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = 0.5464\,T_{CP} + 0.4497\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = 0.9961\,T_{CP}$$

$$-0.50\left[0.9961\,T_{CP}\right] - 0.50\left[0.8953\,T_{CP}\right] - 0.50\,T_{CP} + 7850 = 0$$

$$-0.4981\,T_{CP} - 0.4477\,T_{CP} - 0.50\,T_{CP} + 7850 = 0$$

$$-1.4458\,T_{CP} + 7850 = 0$$

$$T_{CP} = \frac{7850}{1.4458} = \underline{5{,}429.52 \text{ lb}}$$



1.32 continuación

$$T_{AP} = 0.9961\,(5429.52) = 5{,}408.3449 \text{ lb}$$

$$T_{BP} = 0.8953\,(5429.52) = 4{,}861.0493 \text{ lb}$$

1.33 $W_z = 3964\text{ N}$

$$\vec{AP} = 0.30\text{m}\,i - 0.8\text{m}\,j - 2\text{m}\,k$$

$$\vec{BP} = 0.75\text{m}\,i + 0.7\text{m}\,j - 2\text{m}\,k$$

$$\vec{CP} = -0.5\text{m}\,i + 0.7\text{m}\,j - 2\text{m}\,k$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(0.3)^2 + (-0.8)^2 + (-2)^2} = 2.1749$$

$$|\vec{BP}| = \sqrt{(0.75)^2 + (0.7)^2 + (-2)^2} = 2.2478$$

$$|\vec{CP}| = \sqrt{(-0.5)^2 + (0.7)^2 + (-2)^2} = 2.1772$$

$$U_{\vec{AP}} = \frac{0.30}{2.1749}i - \frac{0.80}{2.1749}j - \frac{2}{2.1749}k = 0.1379i - 0.3678j - 0.9196$$

$$U_{\vec{BP}} = \frac{0.75}{2.2478}i + \frac{0.70}{2.2478}j - \frac{2}{2.2478}k = 0.3337i + 0.3114j - 0.8898k$$

$$U_{\vec{CP}} = -\frac{0.5}{2.1772}i + \frac{0.70}{2.1772}j - \frac{2}{2.1772}k = -0.2297i + 0.3215j - 0.9186$$

$$\vec{T_{AP}} = T_{AP}(0.1379i - 0.3678j - 0.9196k)$$

$$\vec{T_{AP}} = 0.1379\,T_{AP}\,i - 0.3678\,T_{AP}\,j - 0.9196\,T_{AP}\,k$$

$$\vec{T_{BP}} = T_{BP}(0.3337i + 0.3114j - 0.8898k)$$

$$\vec{T_{BP}} = 0.3337\,T_{BP}\,i + 0.3114\,T_{BP}\,j - 0.8898\,T_{BP}\,k$$

$$\vec{T_{CP}} = T_{CP}(-0.2297i + 0.3215j - 0.9186k)$$

$$\vec{T_{CP}} = -0.2297\,T_{CP}\,i + 0.3215\,T_{CP}\,j - 0.9186\,T_{CP}\,k$$

1.33 continuación

$$\sum F_{xi}=0 \quad 0.1379\,T_{AP}+0.3337\,T_{BP}-0.2297\,T_{CP}=0$$

$$\sum F_{yj}=0 \quad -0.3678\,T_{AP}+0.3114\,T_{BP}+0.3215\,T_{CP}=0$$

$$\sum F_{zk}=0 \quad -0.9196\,T_{AP}-0.8898\,T_{BP}-0.9186\,T_{CP}+3964=0$$

$$T_{AP}=-\frac{0.3337\,T_{BP}}{0.1379}+\frac{0.2297\,T_{CP}}{0.1379}$$

$$T_{AP}=-2.4199\,T_{BP}+1.6657\,T_{CP}$$

$$-0.9196\left[-2.4199\,T_{BP}+1.6657\,T_{CP}\right]-0.8898\,T_{BP}-0.9186\,T_{CP}+3964=$$

$$+2.2253\,T_{BP}-1.5318\,T_{CP}-0.8898\,T_{BP}-0.9186\,T_{CP}+3964=0$$

$$1.3355\,T_{BP}-2.4504\,T_{CP}+3964=0$$

$$T_{BP}=\frac{2.4504}{1.3355}\,T_{CP}-\frac{3964}{1.3355}=1.8348\,T_{CP}-2968.1767$$

$$T_{AP}=-2.4199\left[1.8348\,T_{CP}-2968.1767\right]+1.6657\,T_{CP}$$

$$T_{AP}=-4.44\,T_{CP}+7182.6908+1.6657\,T_{CP}$$

$$T_{AP}=-2.7743\,T_{CP}+7182.6908$$

$$-0.3678\left[-2.7743\,T_{CP}+7182.6908\right]+0.3114\left[1.8348\,T_{CP}-2968.1767\right]+0.3215\,T_{CP}=0$$

$$+1.0204\,T_{CP}-2641.7937+0.5714\,T_{CP}-924.2902+0.3215\,T_{CP}=0$$

$$1.9133\,T_{CP}-3566.0839=0$$

$$T_{CP}=\frac{3566.0839}{1.9133}=\underline{1863.8394\text{ N}}$$

$$T_{AP}=-2.7743(1863.8394)+7182.6908=\underline{2011.8412\text{ N}}$$

$$T_{BP}=1.8348(1863.8394)-2968.1767=\underline{451.5958\text{ N}}$$

1.34 $W = 8{,}750 \text{ lb} \quad \therefore \quad P_z = 8\,750 \text{ lb}$

$$\vec{AP} = +12\text{in}\, i - 35\text{in}\, j - 80\text{in}\, k$$
$$\vec{BP} = +33\text{in}\, i + 30\text{in}\, j - 80\text{in}\, k$$
$$\vec{CP} = -20\text{in}\, i + 30\text{in}\, j - 80\text{in}\, k$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(12)^2 + (-35)^2 + (-80)^2} = 88.1419$$

$$|\vec{BP}| = \sqrt{(33)^2 + (30)^2 + (-80)^2} = 91.5915$$

$$|\vec{CP}| = \sqrt{(-20)^2 + (30)^2 + (-80)^2} = 87.7496$$

$$\vec{T_{AP}} = \frac{T_{AP}}{88.1419}\left[12\text{in}\, i - 35\text{in}\, j - 80\text{in}\, k\right]$$

$$\vec{T_{AP}} = 0.1361\, T_{AP}\, i - 0.3971\, T_{AP}\, j - 0.9076\, T_{AP}\, k$$

$$\vec{T_{BP}} = \frac{T_{BP}}{91.5915}\left[33\text{in}\, i + 30\text{in}\, j - 80\text{in}\, k\right]$$

$$\vec{T_{BP}} = 0.3603\, T_{BP}\, i + 0.3275\, T_{BP}\, j - 0.8734\, T_{BP}\, k$$

$$\vec{T_{CP}} = \frac{T_{CP}}{87.7496}\left[-20\text{in}\, i + 30\text{in}\, j - 80\text{in}\, k\right]$$

$$\vec{T_{CP}} = -0.2279\, T_{CP}\, i + 0.3419\, T_{CP}\, j - 0.9117\, T_{CP}\, k$$

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.1361\, T_{AP} + 0.3603\, T_{BP} - 0.2279\, T_{CP} = 0$ ——— (1)

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.3971\, T_{AP} + 0.3275\, T_{BP} + 0.3419\, T_{CP} = 0$ ——— (2)

$\Sigma F_z k = 0 \quad -0.9076\, T_{AP} - 0.8734\, T_{BP} - 0.9117\, T_{CP} + P_z = 0$ ——— (3)

Si despejamos T_{AP} de la ec. (1) tenemos:

$$T_{AP} = -\frac{0.3603}{0.1361} T_{BP} + \frac{0.2279\, T_{CP}}{0.1361}$$

GRUPO EDITORIAL PATRIA

1.34 continuación

$$T_{AP} = -2.6473\,T_{BP} + 1.6745\,T_{CP}$$

$$-0.3971[-2.6473\,T_{BP} + 1.6745\,T_{CP}] + 0.3275\,T_{BP} + 0.3419\,T_{CP} = 0$$

$$+1.0512\,T_{BP} - 0.6649\,T_{CP} + 0.3275\,T_{BP} + 0.3419\,T_{CP} = 0$$

$$1.3787\,T_{BP} - 0.3230\,T_{CP} = 0$$

$$T_{BP} = \frac{0.3230\,T_{CP}}{1.3787} = 0.2343\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = -2.6473(0.2343\,T_{CP}) + 1.6745\,T_{CP}$$

$$T_{AP} = -0.6203\,T_{CP} + 1.6745\,T_{CP} = 1.0542\,T_{CP}$$

$$-0.9076(1.0542\,T_{CP}) - 0.8734(0.2343\,T_{CP}) - 0.9117\,T_{CP} + 8750 = 0$$

$$-0.9568\,T_{CP} - 0.2046\,T_{CP} - 0.9117\,T_{CP} + 8750 = 0$$

$$-2.0731\,T_{CP} + 8750 = 0$$

$$T_{CP} = \frac{8750}{2.0731} = \underline{4\,220.7322\text{ lb}}$$

$$T_{BP} = 0.2343\,T_{CP} = 0.2343(4220.7322) = \underline{988.9176\text{ lb}}$$

$$T_{AP} = 1.0542\,T_{CP} = 1.0542(4\,220.7322) = \underline{4{,}449.4959\text{ lb}}$$



1.35

$$\vec{AP} = 74\,kN\,[\cos 25^\circ \cos 35^\circ\, i + \cos 25^\circ\, \text{sen}\, 35^\circ\, j - \text{sen}\, 25^\circ\, k]$$

$$\vec{AP} = 74\,kN\,[0.7424 i + 0.5198 j - 0.4226 k]$$

$$\vec{AP} = 54.9376\,kN\, i + 38.4652\,kN\, j - 31.2724\,kN\, j$$

a) $AP_x = 54.9376\ kN$

$AP_y = 38.4652\ kN$

$AP_z = -31.2724\ KN$

b) $\cos\theta_x = \dfrac{AP_x}{F_{AP}} = \dfrac{54.9376}{74} = 0.7424 \qquad \theta_x = \cos^{-1} 0.7424$

$\theta_x = \underline{42.0637^\circ}$

$\cos\theta_y = \dfrac{AP_y}{F_{AP}} = \dfrac{38.4652}{74} = 0.5198 \qquad \theta_y = \cos^{-1} 0.5198$

$\theta_y = \underline{58.6812^\circ}$

$\cos\theta_z = \dfrac{AP_z}{F_{AP}} = \dfrac{-31.2724}{74} = -0.4226 \qquad \theta_z = \cos^{-1} -0.4226$

$\theta_z = \underline{114.9988^\circ}$

1.36

$$\vec{BP} = 12.5\,kN\,[-\cos 60^\circ\, \text{sen}\, 20^\circ\, i + \cos 60^\circ \cos 20^\circ\, j - \text{sen}\, 60^\circ\, k]$$

$$\vec{BP} = 12.5\,kN\,[-0.1710 i + 0.4698 j - 0.8660 k]$$

$$\vec{BP} = -2.1375\,kN\, i + 5.8725\,kN\, j - 10.8250\,kN\, k$$

a) $BP_x = -2.1375\ kN$

$BP_y = +5.8725\ kN$

$BP_z = -10.8250\ kN$

b) $\cos\theta_x = \dfrac{BP_x}{F_{BP}} = \dfrac{-2.1375}{12.5} = -0.1710 \qquad \theta_x = \cos^{-1} -0.1710 = \underline{99.8460^\circ}$

$\cos\theta_y = \dfrac{BP_y}{F_{BP}} = \dfrac{+5.8725}{12.5} = 0.4698 \qquad \theta_y = \cos^{-1} 0.4698 = \underline{61.9787^\circ}$

$\cos\theta_z = \dfrac{BP_z}{F_{BP}} = \dfrac{-10.8250}{12.5} = -0.8660 \qquad \theta_z = \cos^{-1} -0.8660 = \underline{149.9971^\circ}$



1.37 $T_{AP} = 85$ kips

a) El peso de la caja $P_z = ?$

$\vec{AP} = 0i - 5j - 5k$ (ft)

$\vec{BP} = 4i + 2j - 5k$ (ft)

$\vec{CP} = -3i + 2j - 5k$ (ft)

$|\vec{AP}| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = 7.0711$

$|\vec{BP}| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = 6.7082$

$|\vec{CP}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (-5)^2} = 6.1644$

$$\vec{T_{AP}} = \frac{T_{AP}}{7.0711}(0i - 5j - 5k) = -0.7071\,T_{AP}j - 0.7071\,T_{AP}k$$

$$\vec{T_{BP}} = \frac{T_{BP}}{6.7080}(4i + 2j - 5k) = 0.5963\,T_{BP}i + 0.2982\,T_{BP}j - 0.7454\,T_{BP}k$$

$$\vec{T_{CP}} = \frac{T_{CP}}{6.1644}(-3i + 2j - 5k) = -0.4867\,T_{CP}i + 0.3244\,T_{CP}j - 0.8111\,T_{CP}k$$

$\Sigma F_{xi} = 0 \quad +0.5963\,T_{BP} - 0.4867\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj} = 0 \quad -0.7071\,T_{AP} + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk} = 0 \quad -0.7071\,T_{AP} - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$

$0.5963\,T_{BP} - 0.4867\,T_{CP} = 0$ ——— (1)

$-0.7071(85) + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$-60.1035 + 0.2982\,T_{BP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$ ——— (2)

$-0.7071(85) - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$

$-60.1035 - 0.7454\,T_{BP} - 0.8111\,T_{CP} + P_z = 0$ ——— (3)

$$T_{BP} = \frac{0.4867\,T_{CP}}{0.5963} = 0.8162\,T_{CP}$$

$-60.1035 + 0.2982(0.8162\,T_{CP}) + 0.3244\,T_{CP} = 0$

$-60.1035 + 0.2434\,T_{CP} + 0.3244\,T_{CP} = 0$



1.37 continuación

$$-60.1035 + 0.5678\, T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{60.1035}{0.5678} = \underline{105.8533 \text{ Kips}}$$

$$T_{BP} = 0.8162\, T_{CP} = 0.8162(105.8533) = \underline{86.3975 \text{ Kips}}$$

$$-60.1035 - 0.7454(86.3975) - 0.8111(105.8533) + P_z = 0$$

$$-60.1035 - 64.4007 - 85.8576 + P_z = 0$$

$$\therefore P_z = \underline{210.3618 \text{ Kips}}$$

1.38 $T_{BP} = 135$ Kips

$\Sigma F_x i = 0$ $\quad 0.5963\, T_{BP} - 0.4867\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y j = 0$ $\quad -0.7071\, T_{AP} + 0.2982\, T_{BP} + 0.3244\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z k = 0$ $\quad -0.7071\, T_{AP} - 0.7454\, T_{BP} - 0.8111\, T_{CP} + P_z = 0$

$$0.5963(135) - 0.4867\, T_{CP} = 0$$

$$T_{CP} = \frac{80.5005}{0.4867} = \underline{165.4007 \text{ Kips}}$$

$$-0.7071\, T_{AP} + 0.2982(135) + 0.3244(165.4007) = 0$$

$$-0.7071\, T_{AP} + 40.2570 + 53.6560 = 0$$

$$T_{AP} = \frac{93.9130}{0.7071} = \underline{132.8143 \text{ Kips}}$$

$$-0.7071(132.8143) - 0.7454(135) - 0.8111(165.4007) + P_z = 0$$

$$-93.9130 - 100.6290 - 134.1565 + P_z = 0$$

$$\therefore P_z = \underline{328.6985 \text{ Kips}}$$

1.39 $T_{CP} = 64$ Kips

$\Sigma F_{xi} = 0 \quad 0.5963\, T_{BP} - 0.4867\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj} = 0 \quad -0.7071\, T_{AP} + 0.2982\, T_{BP} + 0.3244\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk} = 0 \quad -0.7071\, T_{AP} - 0.7454\, T_{BP} - 0.8111\, T_{CP} + P_z = 0$

$$0.5963\, T_{BP} - 0.4867(64) = 0$$

$$T_{BP} = \frac{31.1488}{0.5963} = \underline{52.2368 \text{ Kips}}$$

$$-0.7071\, T_{AP} + 0.2982(52.2368) + 0.3244(64) = 0$$

$$-0.7071\, T_{AP} + 15.5770 + 20.7616 = 0$$

$$T_{AP} = \frac{36.3386}{0.7071} = \underline{51.3910 \text{ Kips}}$$

$$-0.7071(51.3910) - 0.7454(52.2368) - 0.8111(64) + P_z = 0$$

$$-36.3386 - 38.9373 - 51.9104 + P_z = 0$$

$$\therefore \quad P_z = \underline{127.1863 \text{ Kips}}$$

1.40 $P_z = 1645$ lb

$\Sigma F_{xi} = 0 \quad 0.5963\, T_{BP} - 0.4867\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{yj} = 0 \quad -0.7071\, T_{AP} + 0.2982\, T_{BP} + 0.3244\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_{zk} = 0 \quad -0.7071\, T_{AP} - 0.7454\, T_{BP} - 0.8111\, T_{CP} + 1645 = 0$

$$T_{BP} = \frac{0.4867\, T_{CP}}{0.5963} = 0.8162\, T_{CP}$$

$$-0.7071\, T_{AP} + 0.2982(0.8162\, T_{CP}) + 0.3244\, T_{CP} = 0$$

$$-0.7071\, T_{AP} + 0.2434\, T_{CP} + 0.3244\, T_{CP} = 0$$

$$-0.7071\, T_{AP} + 0.5678\, T_{CP} = 0$$

$$T_{AP} = \frac{0.5678\, T_{CP}}{0.7071} = 0.8030\, T_{CP}$$

1.40 continuación

$$-0.7071(0.8030\,T_{CP}) - 0.7454(0.8162\,T_{CP}) - 0.8111\,T_{CP} + 1645 = 0$$

$$-0.5678\,T_{CP} - 0.6084\,T_{CP} - 0.8111\,T_{CP} + 1645 = 0$$

$$-1.9873\,T_{CP} + 1645 = 0$$

$$T_{CP} = \frac{1645}{1.9873} = 827.7563 \text{ lb}$$

$$T_{BP} = 0.8162\,T_{CP} = 0.8162(827.7563) = \underline{675.6147 \text{ lb}}$$

$$T_{AP} = 0.8030\,T_{CP} = 0.8030(827.7563) = \underline{664.6883 \text{ lb}}$$

1.41 $T_{AP} = 45$ kN

$$\vec{AP} = 0i - 1.65j - 1.75k \quad (m)$$

$$\vec{BP} = 1.5i + 0.6j - 1.75k \quad (m)$$

$$\vec{CP} = -1.2i + 0.6j - 1.75k \quad (m)$$

$$|\vec{AP}| = \sqrt{(-1.65)^2 + (-1.75)^2} = 2.4052$$

$$|\vec{BP}| = \sqrt{(1.5)^2 + (0.6)^2 + (-1.75)^2} = 2.3817$$

$$|\vec{CP}| = \sqrt{(-1.2)^2 + (0.6)^2 + (-1.75)^2} = 2.2051$$

$$\vec{T}_{AP} = \frac{T_{AP}}{2.4052}\left[-1.65j - 1.75k\right] = -0.6860\,T_{AP}j - 0.7276\,T_{AP}k$$

$$\vec{T}_{BP} = \frac{T_{BP}}{2.3817}\left[1.5i + 0.6j - 1.75k\right] = 0.6298\,T_{BP}i + 0.2519\,T_{BP}j - 0.7348\,T_{BP}k$$

$$\vec{T}_{CP} = \frac{T_{CP}}{2.2051}\left[-1.2i + 0.6j - 1.75k\right] = -0.5442\,T_{CP}i + 0.2721\,T_{CP}j - 0.7936\,T_{CP}k$$

1.41 continuación

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.6298\, T_{BP} - 0.5442\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.6860\, T_{AP} + 0.2519\, T_{BP} + 0.2721\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z k = 0 \quad -0.7276\, T_{AP} - 0.7348\, T_{BP} - 0.7936\, T_{CP} + P_z = 0$

$0.6298\, T_{BP} - 0.5442\, T_{CP} = 0$

$T_{BP} = \frac{0.5442\, T_{CP}}{0.6298} = 0.8641\, T_{CP}$

$-0.6860(45) + 0.2519(0.8641\, T_{CP}) + 0.2721\, T_{CP} = 0$

$-30.870 + 0.2177\, T_{CP} + 0.2721\, T_{CP} = 0$

$0.4898\, T_{CP} = 30.870$

$T_{CP} = \frac{30.870}{0.4898} = \underline{63.0257\ \text{kN}}$

$T_{BP} = 0.8641(63.0257) = \underline{54.4605\ \text{kN}}$

$-0.7276(45) - 0.7348(54.4605) - 0.7936(63.0257) + P_z = 0$

$-32.7420 - 40.0176 - 50.0172 + P_z = 0$

$\therefore P_z = \underline{122.7768\ \text{kN}}$

1.42 $T_{BP} = 76\ \text{kN}$

$\Sigma F_x i = 0 \quad 0.6298(76) - 0.5442\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_y j = 0 \quad -0.6860\, T_{AP} + 0.2519(76) + 0.2721\, T_{CP} = 0$

$\Sigma F_z k = 0 \quad -0.7276\, T_{AP} - 0.7348(76) - 0.7936\, T_{CP} + P_z = 0$

$47.8648 = 0.5442\, T_{CP}$

$\frac{47.8648}{0.5442} = T_{CP} \quad \therefore T_{CP} = \underline{87.9544\ \text{kN}}$

$-0.6860\, T_{AP} + 19.1444 + 0.2721(87.9544) = 0$

$19.1444 + 23.9324 = 0.6860\, T_{AP}$

$\frac{43.0768}{} = T_{AP} \quad \therefore T_{AP} = \underline{62.7942\ \text{kN}}$



1.42 continuación

$$-0.7276(62.7942) - 0.7348(76) - 0.7936(87.9544) + P_z = 0$$

$$-45.6891 - 55.8448 - 69.8006 + P_z = 0$$

$$P_z = 171.3345 \text{ kN}$$

1.43 $T_{CP} = 94$ kN

$$\Sigma F_{xi} = 0 \quad 0.6298\, T_{BP} - 0.5442(94) = 0$$

$$\Sigma F_{yj} = 0 \quad -0.6860\, T_{AP} + 0.2519\, T_{BP} + 0.2721(94) = 0$$

$$\Sigma F_{zk} = 0 \quad -0.7276\, T_{AP} - 0.7348\, T_{BP} - 0.7936(94) + P_z = 0$$

$$T_{BP} = \frac{51.1548}{0.6298} = 81.2239 \text{ kN}$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.2519(81.2239) + 0.2721(94) = 0$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 20.4603 + 25.5774 = 0$$

$$T_{AP} = \frac{46.0377}{0.6860} = 67.1103 \text{ kN}$$

$$-0.7276(67.1103) - 0.7348(81.2239) - 0.7936(94) + P_z = 0$$

$$-48.8295 - 59.6833 - 74.5984 + P_z = 0$$

$$\therefore \; P_z = 183.1112 \text{ kN}$$

1.44 $P_z = 146$ kN

$$\Sigma F_{xi} = 0 \quad 0.6298\, T_{BP} - 0.5442\, T_{CP} = 0$$

$$\Sigma F_{yj} = 0 \quad -0.6860\, T_{AP} + 0.2519\, T_{BP} + 0.2721\, T_{CP} = 0$$

$$\Sigma F_{zk} = 0 \quad -0.7276\, T_{AP} - 0.7348\, T_{BP} - 0.7936\, T_{CP} + 146 = 0$$

$$T_{BP} = \frac{0.5442\, T_{CP}}{0.6298} = 0.8641\, T_{CP}$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.2519(0.8641\, T_{CP}) + 0.2721\, T_{CP} = 0$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.2177\, T_{CP} + 0.2721\, T_{CP} = 0$$

$$-0.6860\, T_{AP} + 0.4898\, T_{CP} = 0 \qquad T_{AP} = \frac{0.4898\, T_{CP}}{0.6860} = 0.7140\, T_{CP}$$

1.44 CONT

$-0.7276(0.7140T_{CP})-0.7348(0.8641T_{CP})-0.7936T_{CP}+146=0$

$-0.5195T_{CP}-0.6349T_{CP}-0.7936T_{CP}+146=0$

$-1.9480T_{CP}+146=0$

$\therefore \quad T_{CP}=\frac{146}{1.9480}=\underline{74.9487\text{ kN}}$

$T_{AP}=0.7140(74.9487)=\underline{53.5134\text{ kN}}$

$T_{BP}=0.8641(74.9487)=\underline{64.7632\text{ kN}}$

1.45 $T_{AP}=235\text{ N}$

$T_{BQ}=145\text{ N}$

$\vec{AP}=4m\,i+4m\,j-2.5m\,k$

$\vec{BQ}=-3m\,i+3.25m\,j+0.5m\,k$

$|\vec{AP}|=\sqrt{4^2+4^2+(-2.5)^2}=6.1847$

$|\vec{BQ}|=\sqrt{(-3)^2+(3.25)^2+(0.5)^2}=4.4511$

$\vec{T}_{AP}=\frac{235}{6.1847}[4i+4j-2.5k]=37.9970[4i+4j-2.5k]$

$\vec{T}_{AP}=151.9880\,i+151.9880\,j-94.9925\,k\ (N)$

$\vec{T}_{BQ}=\frac{145}{4.4511}[-3i+3.25j+0.5k]=32.5762[-3i+3.25j+0.5k]$

$\vec{T}_{BQ}=-97.7286\,i+105.8727\,j+16.2881\,k\ (N)$

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
A = 39.37

2.2
A = 63.6318

2.3
A = 38.6975

2.4
A = 58.5769

2.5
a) −120.25
b) −205.00
c) 82.00
d) 125.00
e) −52.00
f) −79.00

2.6
$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B} = 82m^2\hat{k}$

$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = 738m^3$

2.7
$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B} = 53.758720 = 0i - 17j - 51k$

$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = -459m^3$

2.8
$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B} = 595.5065 \qquad -44\hat{i} - 294\hat{j} - 516\hat{k}$

$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = -4796in^3$

2.9
$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B} = 63.1981 \qquad 13\hat{i} + 24\hat{j} - 57\hat{k}$

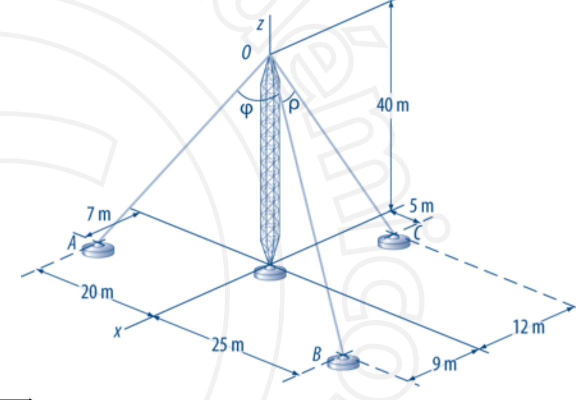
$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = -110\,ft^3$

2.10
$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B} = 172.51086 \qquad 16\hat{i} + 80\hat{j} + 152\hat{k}$

$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = 2840\,ft^3$

2.11
$\phi = 57.6540°$
$\varrho = 47.4041°$
$\propto = 41.9480°$

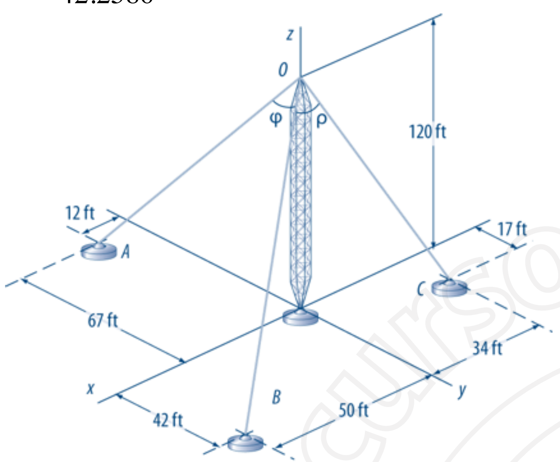


$\overrightarrow{OA} = +7i - 20j - 40k\ (m)$

$\overrightarrow{OB} = +9i + 25j - 40k$

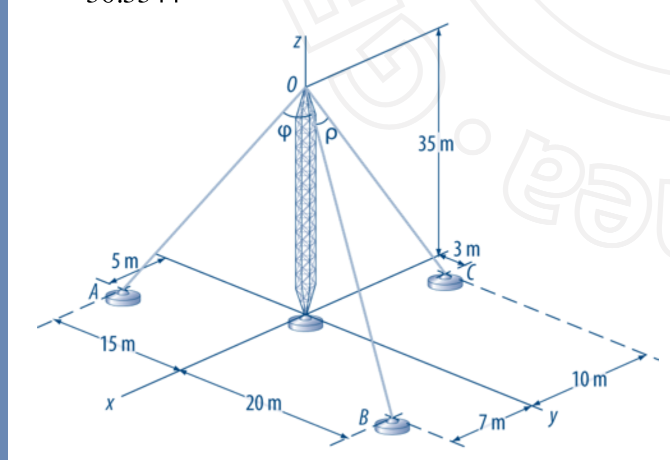
$\overrightarrow{OC} = -12i + 5j - 40k$

2.12
ϕ = 49.7177°
ϱ = 38.7369°
∝ = 42.2580°



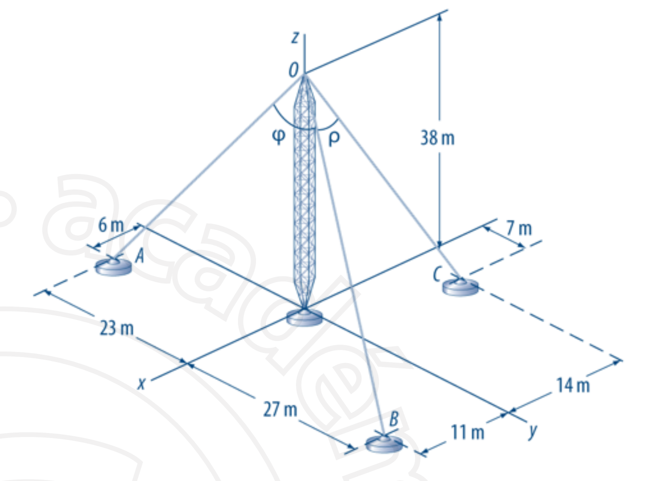
$$\overrightarrow{OA} = +12i - 67j - 120k \ (ft)$$
$$\overrightarrow{OB} = +50i + 42j - 120k$$
$$\overrightarrow{OC} = -34i + 17j - 120k$$

2.13
ϕ = 52.3426°
ϱ = 35.6044°
∝ = 36.3344°



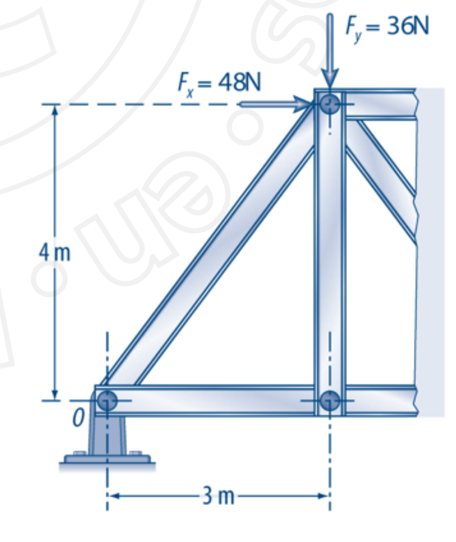
$$\overrightarrow{OA} = +5i - 15j - 35k$$
$$\overrightarrow{OB} = +7i + 20j - 35k$$
$$\overrightarrow{OC} = -10i + 3j - 35k$$

2.14
ϕ = 65.5367°
ϱ = 41.2904°
∝ = 49.3905°



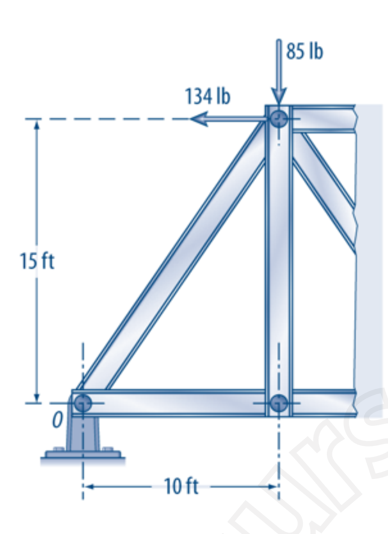
$$\overrightarrow{OA} = +6i - 23j - 38k$$
$$\overrightarrow{OB} = +11i + 27j - 38k$$
$$\overrightarrow{OC} = -14i + 7j - 38k$$

2.15



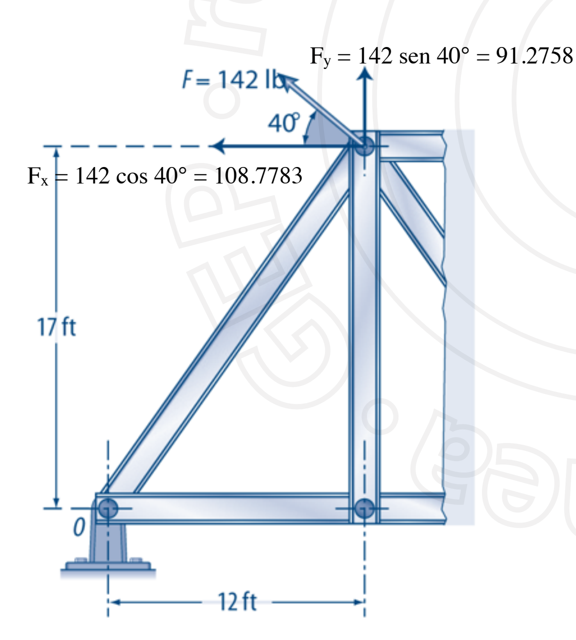
$M_0 = -(36)(3) - (48)(4) = -108 - 192 = 300$ N-m

2.16



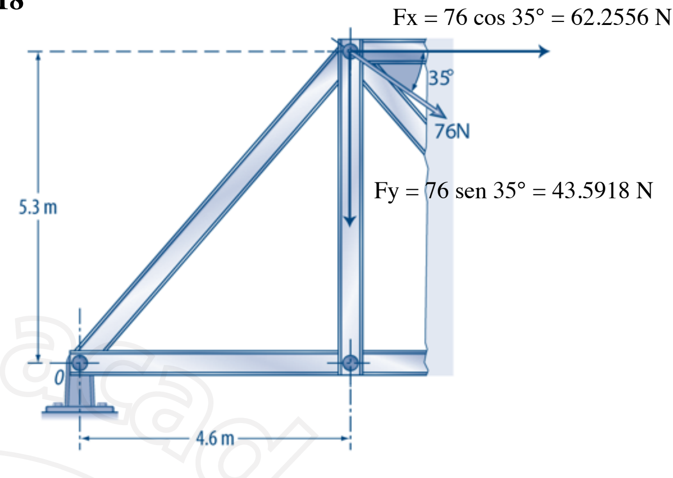
$M_0 = -(85)(10) + (134)(15)$
$M_0 = -850 + 2010$
$M_0 = 1\ 160$ lb-ft

2.17



$M_0 = +(108.7783)(17) + (91.2758)(12)$
$M_0 = 1\ 849.2311 + 1\ 095.3096$
$M_0 = 2\ 944.5407$ lb-ft

2.18



$M_0 = -(62.2556)(5.3) - (43.5918)(4.6)$
$M_0 = -329.9547$
-200.5223
$M_0 = -530.4770$ N-m



Problema 2.19

$\vec{F} = 85N\hat{i} + 64N\hat{j} - 36N\hat{k}$

$M_o = ?$

$\vec{\rho} = 0\hat{i} + 3.5\hat{j} + 5.5\hat{k}$ (mts)

$M_o = \vec{\rho} \times \vec{F}$

$$M_o = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ 0 & 3.5 & 5.5 \\ 85 & 64 & -36 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +[(3.5)(-36)-(64)(5.5)]\hat{i} \\ -[(0)(-36)-(85)(5.5)]\hat{j} \\ +[(0)(64)-(85)(3.5)]\hat{k} \end{matrix}$$

$M_o = (-126 - 352)\hat{i} + (468)\hat{j} - (298)\hat{k}$

$M = -478\hat{i} + 468\hat{j} - 298\hat{k}$ (N–m)

Problema 2.20

$\vec{F} = 132\,lb\,\hat{i} - 73\,lb\,\hat{j} - 394\,lb\,\hat{k}$

$M_o = ?$

$\vec{\rho} = 0\hat{i} + 15\,ft\,\hat{j} + 21\,ft\,\hat{k}$

$M_o = \vec{\rho} \times \vec{F}$

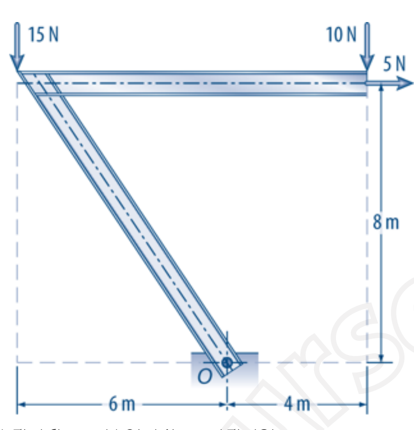
$$M_o = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ 0 & 15 & 21 \\ 132 & -73 & -394 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +[(15)(-394)-(-73)(21)]\hat{i} \\ -[(0)(-394)-(132)(21)]\hat{j} \\ +[(0)(-73)-(132)(15)]\hat{k} \end{matrix}$$

$M_o = (-5910 + 1533)\hat{i} + 2772\hat{j} - 1980\hat{k}$

$M_o = -4377\hat{i} + 2772\hat{j} - 1980\hat{k}$ (lb–ft)

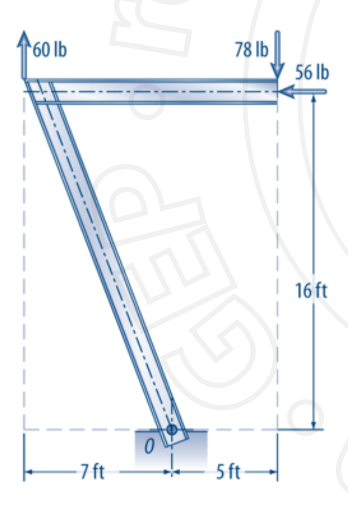


2.21



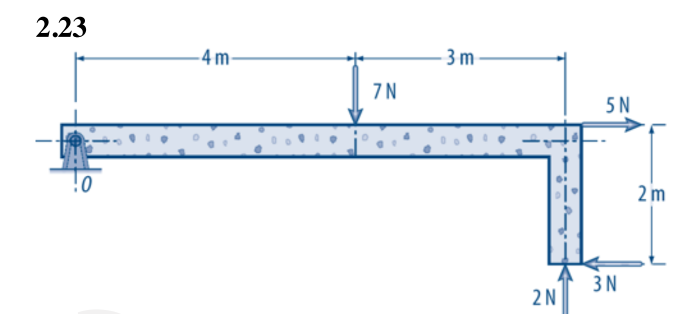
$\Sigma M_0 = (15)(6) - (10)(4) - (5)(8)$
$\Sigma M_0 = 90 - 40 - 40$
$M_0 = 10$ N-m

2.22



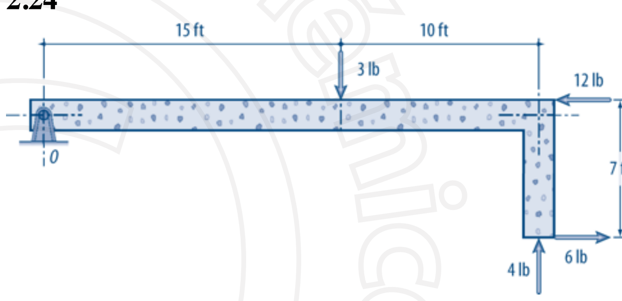
$\Sigma M_0 = (-60)(7) - (78)(5) + (56)(16)$
$\Sigma M_0 = -420 - 390 + 896$
$M_0 = 86$ lb-ft

2.23



$\Sigma M_0 = (-7)(4) - (3)(2) + (2)(7)$
$M_0 = -28 - 6 + 14$
$M_0 = -20$ N-m

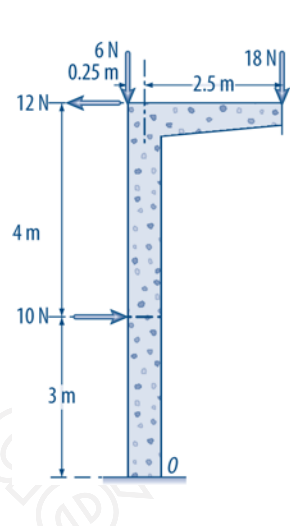
2.24



$\Sigma M_0 = (-3)(15) - (6)(7) + (4)(25)$
$M_0 = -45 + 42 + 100$
$M_0 = 97$ lb-ft



2.25



$\sum F_x = 0 \qquad -12 + 10 + Ox = 0 \qquad Ox = 12 - 10 = 2N$

$\sum F_y = 0 \qquad -6 - 18 + Oy = 0 \qquad Oy = 24N$

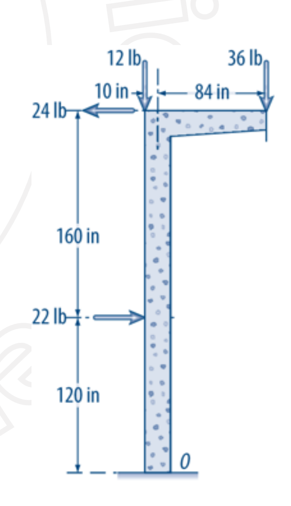
$\sum M_0 = 0 \qquad M_0 - (10)(3) + (12)(7) + (6)(0.25) - (18)(2.5) = 0$

$M_0 - 30 + 84 + 1.5 - 45 = 0$

$M_0 = +30 - 84 - 1.5 + 45$

$M_0 = -10.5$ N-m

2.26



$\sum F_x = 0 \qquad -24 + 22 + Ox = 0 \qquad Ox = 24 - 22 = 2$ lb

$\sum F_y = 0- \qquad 36 - 12 + Oy = 0 \qquad Oy = 36 + 12 = 48$ lb

$\sum M_0 = 0 \qquad + M_0 - (22)(120) + (24)(280) + (12)(10) - (36)(84) = 0$

$M_0 - 2\,640 + 6\,720 + 120 - 3\,024 = 0$

$M_0 = 2\,640 - 6\,720 - 120 + 3\,024$

$M_0 = -1\,176$ lb-in



Problema 2.27

(Diagrama: 8 m, 2 m, 35N; F_{ox}, F_{oy}, M_o; $F_x = (50)\left(\frac{4}{5}\right) = 40$; $F = 50N$; $F_y = (50)\left(\frac{3}{5}\right) = 30$)

Si aplicamos las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$\Sigma F_x = 0 \quad -F_{ox} + F_x = 0$ ——— (1)

$\Sigma F_y = 0 \quad F_{oy} + F_y - 35 = 0$ ——— (2)

$\Sigma M_o = 0 \quad -(35)(10) + (30)(8) + M_o = 0$ ——— (3)

$-F_{ox} + 40 = 0$ ——— DE (1)

$F_{ox} = \underline{40N}$

$F_{oy} + 30 - 35 = 0$ ——— DE (2)

$F_{oy} = -30 + 35 = \underline{5N}$

$-350 + 240 + M_o = 0$

$M_o = +350 - 240 = \underline{110\ N\text{-}m}$ (+)

$M_o = 110\ N\text{-}m$ (240, 350)



Problema 2.28.-

$F_x = (95)\left(\frac{4}{5}\right)$, $F_x = 76$ lb, $F = 95$ lb, $F_y = 95\left(\frac{3}{5}\right) = 57$ lb

Si aplicamos las ecuaciones de equilibrio tenemos:

$\Sigma F_x = 0$ $F_{oy} + F_y - 76 = 0$ $F_{oy} + 57 - 76 = 0$ $F_{oy} = 19$ lb

$\Sigma F_y = 0$ $-F_{ox} + 76 = 0$ $F_{ox} = 76$ lb

$\Sigma M_o = 0$ $+57(25) - 76(32) + M_o = 0$

$1425 - 2432 + M_o = 0$

$M_o = -1425 + 2432 = 1,007$ lb-ft (+)

$M_o = 1007$ 1425   2432

2.29.-

3 m, 2 m, 1 m; 2N, 4N, 5N; A, B

Nota: Para calcular los incisos a) y b) NO deberan incluirse las reacciones de los apoyos.

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -2 + 4 - 5 = -3$ N

$\Sigma M_A = -(2)(3) + (4)(5) - (5)(6) = -6 + 20 - 30 = -16$ N-m

(A: −3N, −16N-m; B)

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -5 + 4 - 2 = -3$ N

$\Sigma M_B = (2)(3) - (4)(1) = 6 - 4 = 2$ N-m

(A; B: −3N, 2N-m)





Continuación del 2.29.-

c) $\Sigma F_x = 0 \qquad \underline{A_x = 0}$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 2 + 4 - 5 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad -(2)(3) + (4)(5) - (5)(6) + 6B_y = 0$

$-6 + 20 - 30 + 6B_y = 0$

$6B_y = +6 - 20 + 30 = 16$

$B_y = \frac{16}{6} = \underline{2.6667\text{ N}}$

$\therefore \quad A_y = 2 - 4 + 5 - B_y = 3 - B_y = 3 - 2.6667$

$A_y = \underline{0.3333\text{ N}}$

A, B; 0.333 N, 2.667 N

2.30.-

A, B; 3.5 N, 1.8 N; 4 m, 2 m

NOTA: Para calcular los incisos a) y b) NO deberán incluirse las Reacciones de los Apoyos.

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -3.5 + 1.8 = \underline{-1.70\text{ N}}$

$\Sigma M_A = -(3.5)(4) + (1.8)(6)$

$= -14 + 10.8 = \underline{-3.2}$

1.70; A, B; 3.2 N-m

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -3.5 + 1.8 = \underline{-1.70\text{ N}}$

$\Sigma M_B = (3.5)(2) = \underline{7\text{ N-m}}$

-1.70 N; A, B; 3.5 N-m



Continuación 2.30

c) $\Sigma F_x = 0 \qquad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 3.5 + 1.8 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad -(3.5)(4) + (1.8)(6) + 6B_y = 0$

$-14 + 10.8 + 6B_y = 0$

$6B_y = 14 - 10.8 = 3.2$

$B_y = \frac{3.2}{6} = 0.5333\ N$

∴ $A_y = 3.5 - 1.8 - B_y = 3.5 - 1.8 - 0.533$

$A_y = 1.1667\ N$

A, B, 1.1667N, 0.5333

2.31

A, B, 2.5kN, 1.2kN, 3.7m, 1.3m, 1.0m

NOTA: Para calcular los incisos a) y b) NO deberan incluirse las reacciones en los apoyos.

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -2.5 - 1.2 = -3.7\ kN$

$\Sigma M_A = -(2.5)(3.7) - (1.2)(5) = -9.25 - 6 = -15.25\ kN\text{-}m$

3.7kN, B, 15.25 kN-m

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -2.5 - 1.2 = -3.7\ kN$

$\Sigma M_B = +(1.2)(1.0) + (2.5)(2.3) = 1.2 + 5.75 = 6.95\ kN\text{-}m$

3.7kN, A, B, 6.95 kN-m



2.31 continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 2.5 - 1.2 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -(2.5)(3.7) - (1.2)(5) + 6B_y = 0$

$-9.25 - 6 + 6B_y = 0$

$B_y = \frac{15.25}{6} = 2.5417 \text{ kN}$

$\therefore \quad A_y = 2.5 + 1.2 - B_y = 2.5 + 1.2 - 2.5417$

$A_y = 1.1583 \text{ kN}$

A, B; 1.1583 kN; 2.5417 kN

2.32

A; 3.3 kN; 2.7 kN; B; 1.8 m; 1.2 m; 2 m

NOTA: para calcular los incisos a) y b) no deberán incluirse las reacciones en los apoyos.

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 3.3 + 2.7 = 6 \text{ kN}$

$\Sigma M_A = +(3.3)(1.8) + (2.7)(3) = 5.94 + 8.1 = 14.04 \text{ kN-m}$

A; 6 kN; B; 14.04 kN-m

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 3.3 + 2.7 = 6 \text{ kN}$

$\Sigma M_B = -(3.3)(3.2) - (2.7)(2) = -10.56 - 5.40 = -15.96 \text{ kN-m}$

A; 6 kN; B; 15.96 kN-m



2.32 continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + 3.3 + 2.7 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +(3.3)(1.8) + (2.7)(3) + 5B_y = 0$

$5.94 + 8.10 + 5B_y = 0$

$B = \frac{-14.04}{5} = -2.8080 \text{ kN}$

$\therefore A_y = -3.3 - 2.7 - (-2.8080) = -3.1920 \text{ kN}$

3.3 kN 2.7 kN
−3.1920 kN −2.8080 kN

2.33.-

7N 3.6 N 1.8 N 6 N-m
A B
1.5 m 2 m 3.4 m

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -7 + 3.6 - 1.8 = -5.2 \text{N}$

$\Sigma M_A = (3.6)(1.5) - (1.8)(3.5) - 6 = 5.4 - 6.3 - 6 = -6.9 \text{ N-m}$

5.2N
A B
6.9 N-m

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -7 - 3.6 - 1.8 = -5.2 \text{N}$

$\Sigma M_B = 0 \quad (7)(6.9) - (3.6)(5.4) + (1.8)(3.4) - 6 =$

$= 48.3 - 19.44 + 6.12 - 6 = 28.98 \text{ N-m}$

5.2N
A B
28.98 N-m



2.33.- continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \qquad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 7 + 3.6 - 1.8 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad +(3.6)(1.5) - (1.8)(3.5) - 6 + 6.9 B_y = 0$

$5.4 - 6.3 - 6 + 6.9 B_y = 0$

$B_y = \dfrac{6.9}{6.9} = 1\ N$

$A_y = 7 - 3.6 + 1.8 - B_y = 5.2 - 1 = 4.2 N$

7N, 3.6N, 1.8N, 6N-m, 4.2, 1N

2.34

8kN, 17kN, 9kN, A, B, 3kN-m, 4kN-m, 2.5m, 7.5m

a) $\Sigma F_x = 0$

40.5 kN-m, A, B

$\Sigma F_y = -8 + 17 - 9 = 0$

$\Sigma M_A = 4 + (17)(2.5) - (9)(10) + 3 = 4 + 42.5 - 90 + 3 = -40.5\ kN\text{-}m$

b) $\Sigma F_x = 0$

40.5 kN-m, A, B

$\Sigma F_y = -8 + 17 - 9 = 0$

$\Sigma M_B = 0 \quad +3 - (17)(7.5) + (8)(10) + 4 = +3 - 127.5 + 80 + 4 = -40.5\ kN\text{-}m$

c) $\Sigma F_x = 0 \qquad A_x = 0$

A, B, $A_y = 4.05 kN$, $4.05 kN = B_y$

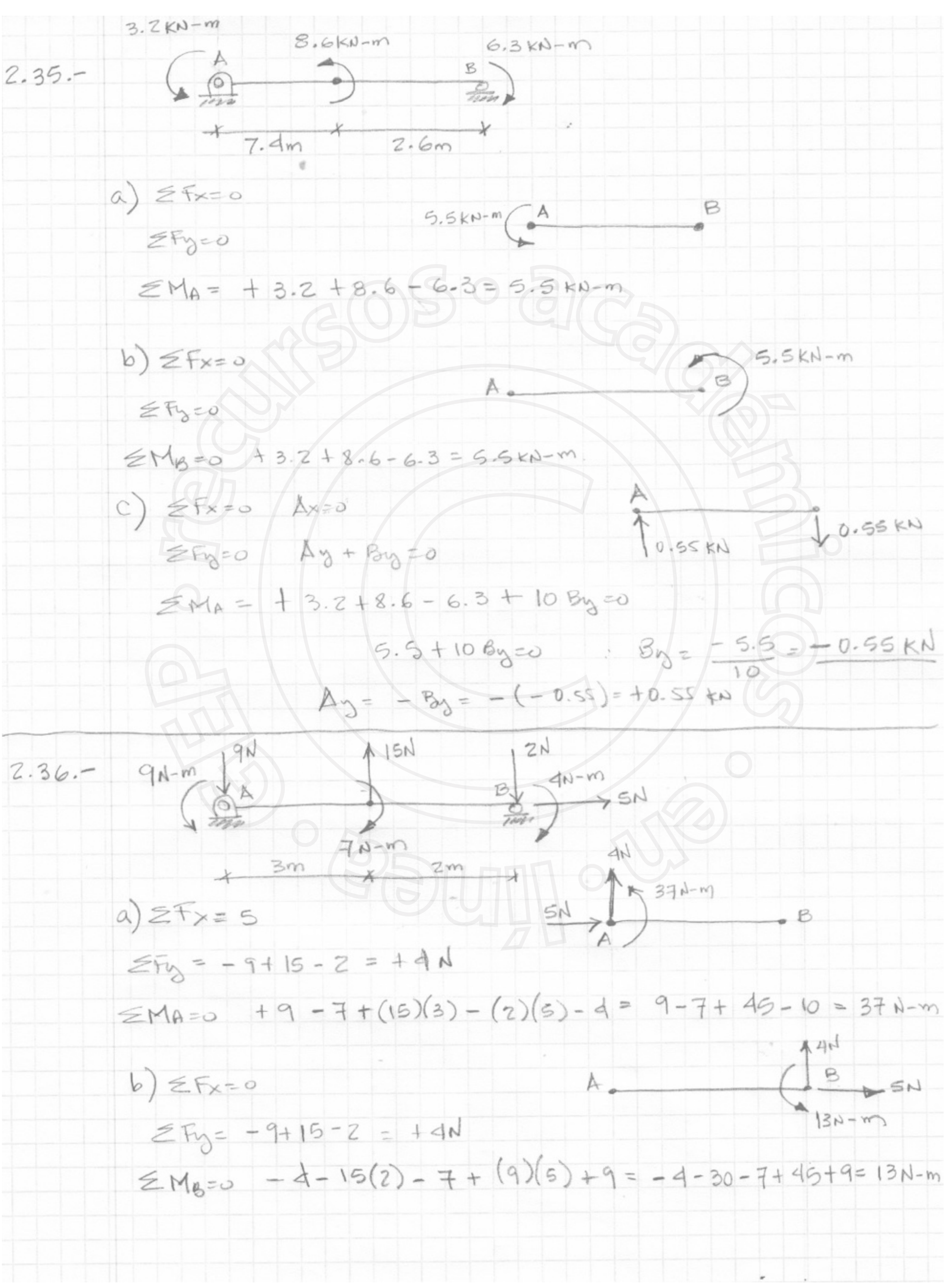
$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 8 + 17 - 9 + B_y = 0 \qquad A_y + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad +4 + (17)(2.5) - (9)(10) + 3 + 10 B_y = 0$

$4 + 42.5 - 90 + 3 + 10 B_y = 0$

$10 B_y = 40.5 \qquad \therefore B_y = \dfrac{40.5}{10} = 4.05\ kN$

$A_y = -B_y = -4.05 kN$


2.35.-
3.2 KN-m
8.6 KN-m
6.3 KN-m
A
B
7.4m
2.6m
a) ΣFx=0
ΣFy=0
5.5 KN-m
ΣMA = +3.2 +8.6 − 6.3 = 5.5 KN-m
b) ΣFx=0
ΣFy=0
5.5 KN-m
ΣMB=0 +3.2 + 8.6 − 6.3 = 5.5 KN-m
c) ΣFx=0 Ax=0
ΣFy=0 Ay + By = 0
0.55 KN
0.55 KN
ΣMA = +3.2 + 8.6 − 6.3 + 10 By = 0
5.5 + 10 By = 0 ∴ By = −5.5/10 = −0.55 KN
Ay = −By = −(−0.55) = +0.55 KN
2.36.-
9N-m
9N
15N
2N
4N-m
5N
7N-m
3m
2m
a) ΣFx = 5
4N
37N-m
5N
ΣFy = −9 + 15 − 2 = +4N
ΣMA=0 +9 − 7 + (15)(3) − (2)(5) − 4 = 9 − 7 + 45 − 10 = 37 N-m
b) ΣFx=0
4N
5N
13N-m
ΣFy = −9 + 15 − 2 = +4N
ΣMB=0 −4 − 15(2) − 7 + (9)(5) + 9 = −4 − 30 − 7 + 45 + 9 = 13N-m

2.36.– continuación

c) $\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + 5 = 0 \quad A_x = 5\text{ N}$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 9 + 15 - 2 + B_y = 0 \quad A_y + 4 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +9 - 7 + (15)(3) - (2)(5) - 4 + 5B_y = 0$

$9 - 7 + 14 - 10 - 4 + 5B_y = 0$

$2 + 5B_y = 0 \qquad B_y = -\frac{2}{5} = -0.40\text{ N}$

$A_y = -4 - B_y = -4 - (-0.40) = 3.6\text{ N}$

$A_x = 5\text{ N}$, $-0.40\text{ N} = B_y$, $A_y = 3.6\text{ N}$

2.37.– 3 kN, A, 3 kN, B, 16 kN-m, 2 kN, 6 m

a) $\Sigma F_x = 3\text{ kN}$

$\Sigma F_y = +2 - 3 = -1\text{ kN}$

$\Sigma M_A = 0 \quad -(3)(6) + 16 = -18 + 16 = -2\text{ kN-m}$

(−1 kN, 3 kN, A, 2 kN-m, B)

b) $\Sigma F_x = 3\text{ kN}$

$\Sigma F_y = +2 - 3 = -1\text{ kN}$

$\Sigma M_B = -(2)(6) + 16 = -12 + 16 = 4\text{ kN-m}$

(A, 1 kN, B, 3 kN, 4 kN-m)

c) $\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + 3 = 0 \quad A_x = 3\text{ kN}$

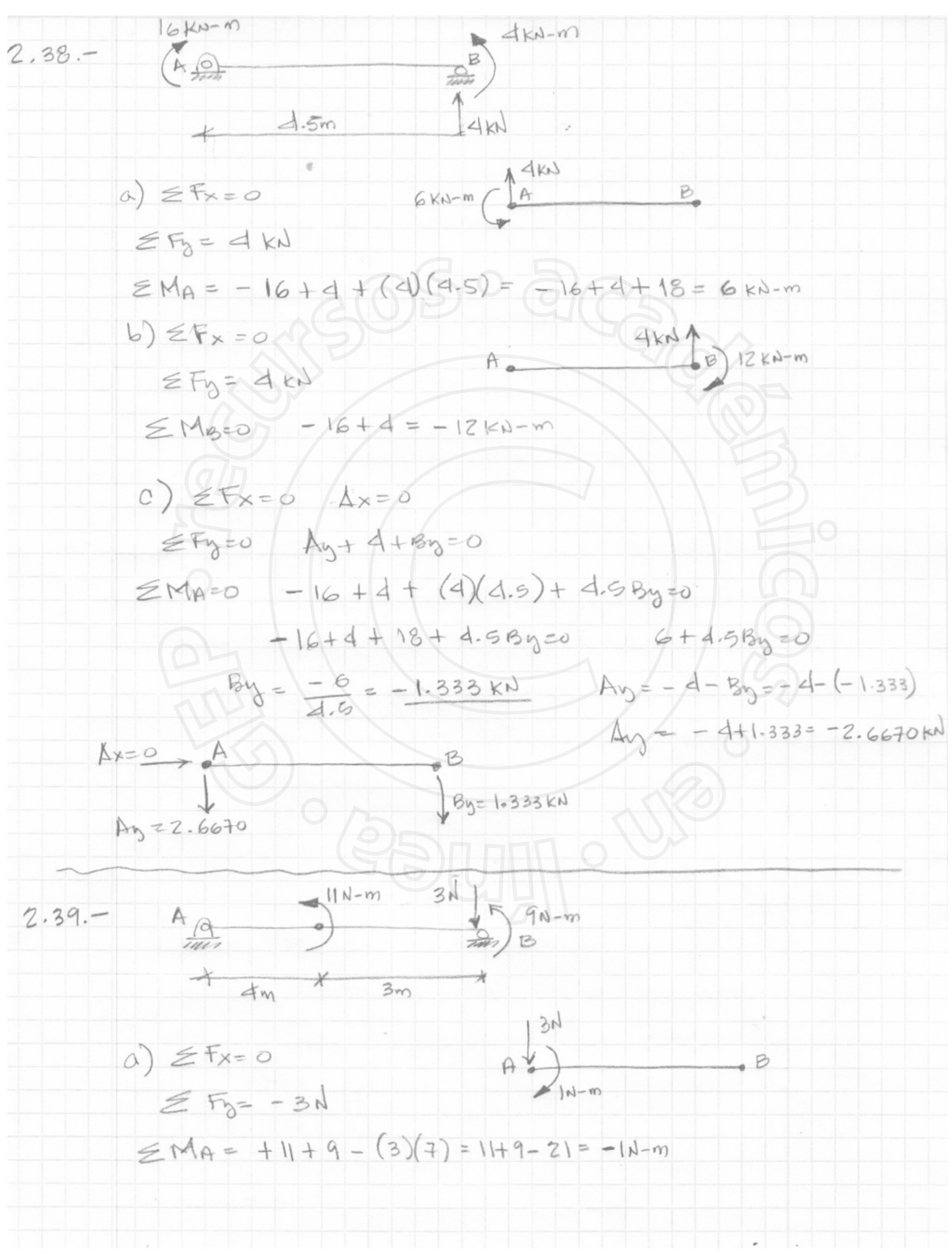
$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + 2 - 3 + B_y = 0 \quad A_y - 1 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -(3)(6) + 16 + 6B_y = 0 \quad -18 + 16 + 6B_y = 0$

$-2 + 6B_y = 0 \quad \therefore B_y = \frac{+2}{6} = +0.333\text{ kN}$

$A_y = +1 - (+0.333) = 0.667\text{ kN}$

(A, B, $A_x = 3$, $A_y = 0.667\text{ kN}$, $B_y = 0.333\text{ kN}$)



2.38.–

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 4\ kN$

$\Sigma M_A = -16 + 4 + (4)(4.5) = -16 + 4 + 18 = 6\ kN\text{-}m$

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 4\ kN$

$\Sigma M_B = 0 \quad -16 + 4 = -12\ kN\text{-}m$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y + 4 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -16 + 4 + (4)(4.5) + 4.5 B_y = 0$

$-16 + 4 + 18 + 4.5 B_y = 0 \qquad 6 + 4.5 B_y = 0$

$B_y = \frac{-6}{4.5} = -1.333\ kN \qquad A_y = -4 - B_y = -4 - (-1.333)$

$A_y = -4 + 1.333 = -2.6670\ kN$

2.39.–

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -3\ N$

$\Sigma M_A = +11 + 9 - (3)(7) = 11 + 9 - 21 = -1\ N\text{-}m$



2.39.- continuación

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -3N$

$\Sigma M_B = 0 \quad +11+9 = +20\,N\text{-}m$

(Diagrama: 3N, A, B, 20N-m)

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 3 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +11+9-(3)(7)+7B_y = 0$

$11+9-21+7B_y = 0$

$-1+7B_y = 0 \quad \therefore \quad B_y = 1/7 = \underline{0.1429\,N}$

$A_y = 3 - B_y = 3 - 0.1429 = \underline{2.8571\,N}$

(Diagrama: $A_x = 0$, $A_y = 2.8571N$, $B_y = 0.1429$)

2.40.-

(Diagrama: A, 10N, 10N-m, 5N, B, 15N-m, 5m, 5m)

a) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -10 - 5 = -15N$

$\Sigma M_A = 0 \quad -10-(10)(5)-(5)(10)+15 = -10-50-50+15 = -95\,N\text{-}m$

(Diagrama: 15N, A, B, 95N-m)

b) $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = -10-5 = -15N$

$\Sigma M_B = +(10)(5)-10+15 = 50-10+15 = +55\,N\text{-}m$

(Diagrama: A, B, 15N, 55N-m)

c) $\Sigma F_x = 0 \quad +A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 10 - 5 + B_y = 0 \quad A_y - 15 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad -10-(10)(5)-(5)(10)+15+10B_y = 0$

$-10-50-50+15+10B_y = 0$

$-95+10B_y = 0$

$B_y = \frac{95}{10} = \underline{9.5\,N}$

$A_y = 15 - B_y = 15 - 9.5 = \underline{5.5\,N}$

(Diagrama: $A_x = 0$, $A_y = 5.5N$, $B_y = 9.5N$)

2.41.–

A, 42 lb, 36 lb, 58 lb, 24 lb, B
5 ft, 3 ft, 2 ft

a) $\Sigma F_x = -24\ lb$

24 lb, 64 lb, 502 lb-ft, A, B

$\Sigma F_y = -42 + 36 - 58 = -64\ lb$

$\Sigma M_A = -(42)(5) + (36)(8) - (58)(10) = -210 + 288 - 580$

$M_A = -502\ lb\text{-}ft$

b) $\Sigma F_x = -24\ lb$

A, 138 lb-ft, 64 lb, B, 24 lb

$\Sigma F_y = -42 + 36 - 58 = -6d\ lb$

$\Sigma M_B = +(42)(5) - (36)(2) = 210 - 72 = 138\ lb\text{-}ft$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x - 24 = 0 \quad A_x = 24$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 42 + 36 - 58 + B_y = 0 \quad A_y - 64 + B_y = 0$

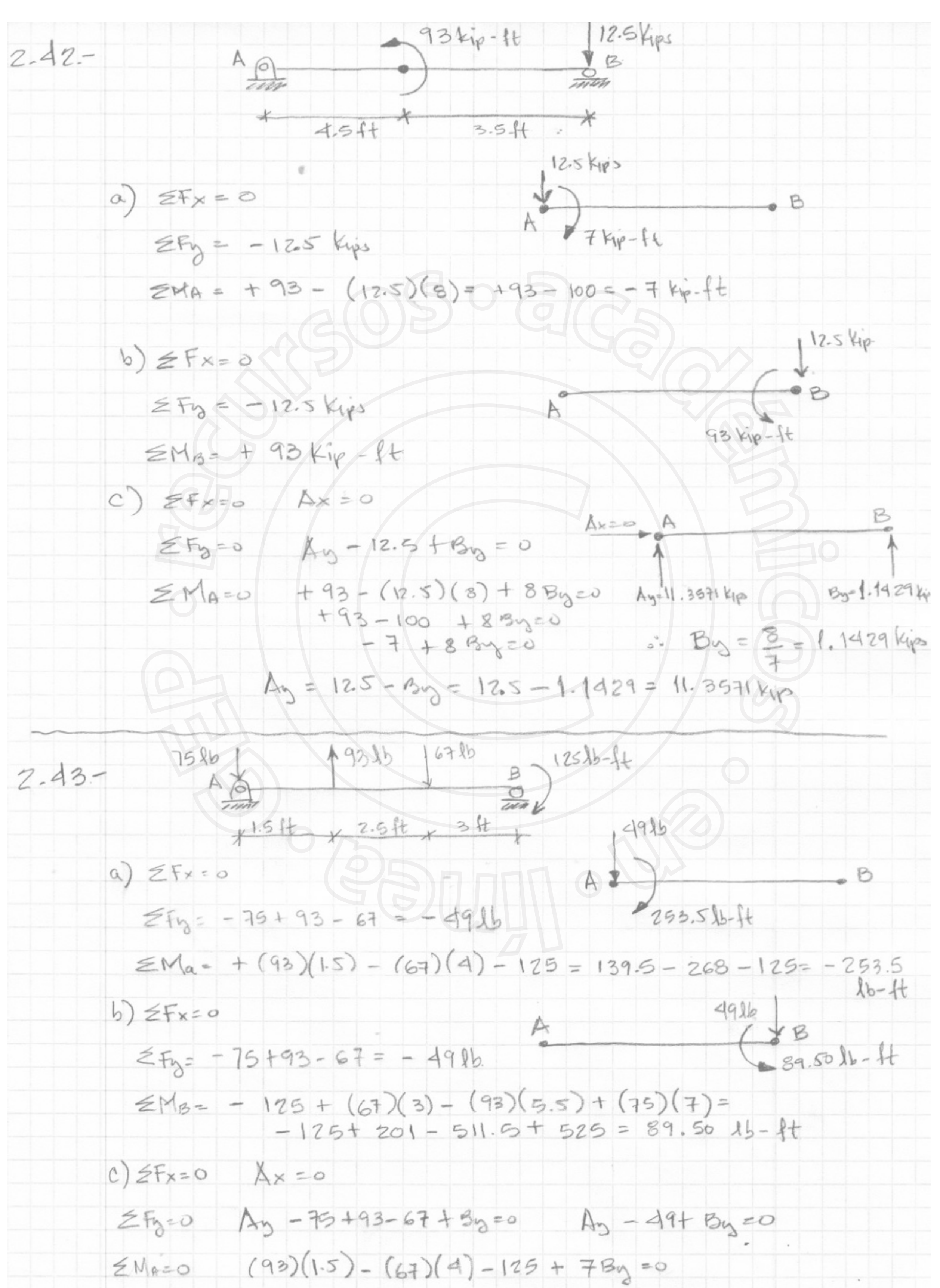
$\Sigma M_A = 0 \quad -(42)(5) + (36)(8) - (58)(10) + 10 B_y = 0$

$-210 + 288 - 580 + 10 B_y = 0$

$B_y = \frac{502}{10} = 50.2\ lb$

$\therefore A_y = 64 - B_y = 64 - 50.2 = 13.8\ lb$

$A_x = 24\ lb$, A, $A_y = 13.8\ lb$, $B_y = 50.2\ lb$


2-42.-
93 kip-ft
12.5 kips
A
B
4.5 ft
3.5 ft
a) ΣFx = 0
ΣFy = −12.5 kips
ΣMA = +93 − (12.5)(8) = +93 − 100 = −7 kip-ft
12.5 kips
7 kip-ft
b) ΣFx = 0
ΣFy = −12.5 kips
ΣMB = +93 kip-ft
12.5 kip
93 kip-ft
c) ΣFx = 0   Ax = 0
ΣFy = 0   Ay − 12.5 + By = 0
ΣMA = 0   +93 − (12.5)(8) + 8 By = 0
+93 − 100 + 8 By = 0
−7 + 8 By = 0
∴ By = 8/7 = 1.1429 kips
Ay = 12.5 − By = 12.5 − 1.1429 = 11.3571 kip
Ax = 0
Ay = 11.3571 kip
By = 1.1429 kip
2-43-
75 lb
93 lb
67 lb
125 lb-ft
1.5 ft
2.5 ft
3 ft
a) ΣFx = 0
ΣFy = −75 + 93 − 67 = −49 lb
ΣMa = +(93)(1.5) − (67)(4) − 125 = 139.5 − 268 − 125 = −253.5 lb-ft
49 lb
253.5 lb-ft
b) ΣFx = 0
ΣFy = −75 + 93 − 67 = −49 lb
ΣMB = −125 + (67)(3) − (93)(5.5) + (75)(7) =
−125 + 201 − 511.5 + 525 = 89.50 lb-ft
49 lb
89.50 lb-ft
c) ΣFx = 0   Ax = 0
ΣFy = 0   Ay − 75 + 93 − 67 + By = 0   Ay − 49 + By = 0
ΣMA = 0   (93)(1.5) − (67)(4) − 125 + 7 By = 0

2.43 continuación

$139.5 - 280 - 125 + 7B_y = 0$

$-265.5 + 7B_y = 0 \quad \therefore \quad B_y = \frac{265.5}{7} = 37.9286 \text{ lb}$

$A_y = 49 - B_y = 49 - 37.9286$

$A_y = 11.0714 \text{ lb}$

$A_x = 0$, B, $A_y = 11.0714 \text{ lb}$, $B_y = 37.9286 \text{ lb}$

2.44.–

6.5 kip, 5 kip-ft, 3.5 kip, 2 kip-ft, A, B, 7 ft, 6 ft

a) $\Sigma F_x = 0$

10 kips, -42.5 kip-ft, A, B

$\Sigma F_y = -6.5 - 3.5 = -10 \text{ Kips}$

$\Sigma M_A = 0 \quad +5 - (3.5)(13) - 2 = +5 - 45.5 - 2 = -42.5 \text{ kip-ft}$

b) $\Sigma F_x = 0$

A, 87.5 kip-ft, 10 kips, B

$\Sigma F_y = -6.5 - 3.5 = -10 \text{ Kips}$

$\Sigma M_B = 0 \quad +(6.5)(13) + 5 - 2 = 84.5 + 5 - 2 = 87.5 \text{ kip-ft}$

c) $\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 6.5 - 3.5 + B_y = 0 \quad A_y - 10 + B_y = 0$

$\Sigma M_A = 0 \quad +5 - (3.5)(13) - 2 + 13B_y = 0$

$+5 - 45.5 - 2 + 13B_y = 0 \quad B = \frac{42.5}{13} = 3.2692$

$A_y = 10 - B_y = 10 - 3.2692 = 6.7308 \text{ kips}$

$A_x = 0$, A, B, $A_y = 6.7308 \text{ kips}$, $B_y = 3.2692 \text{ Kips}$

2.45.-

	Fuerza (N) $\hat{k}$	$d_x\,\hat{i}$ (m)	$d_y\,\hat{j}$ (m)	$M_x = F\,d_y$ (N-m)	$M_y = F\,d_x$ (N-m)
	−7.5	0	0	0	0
	+ 5.5	8	0	0	+ 44
	− 6.0	8	1.5	−9.0	− 48
	+ 3.5	0	4.0	+14.0	0
	− 8.0	4.5	4.0	− 32.0	− 36
	+ 9.0	8	4.0	+ 36	72
Σ	− 3.5	—	—	9.0 $\hat{i}$	32 $\hat{j}$

a) $\vec{F} = -3.5\,\text{N}\,\hat{k}$ $\quad\quad \vec{M}_O = 9.0\,\text{N-m}\,\hat{i} + 32\,\text{N-m}\,\hat{j}$

b) $9\hat{i} + 32\hat{j} = (x\hat{i} + y\hat{j}) \times (-3.5\hat{k})$

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ x & y & 0 \\ 0 & 0 & -3.5 \end{vmatrix} = [-3.5y - (0)(0)]\hat{i} - [-3.5x - (0)(0)]\hat{j} + [0x - 0y]\hat{k}$$

$$\vec{M}_O = -3.5y\,\hat{i} + 3.5x\,\hat{j}$$

$$+9\hat{i} + 32\hat{j} = -3.5y\,\hat{i} + 3.5x\,\hat{j}$$

$$9 = -3.5y \qquad y = -\frac{9}{3.5} = -2.5714$$

$$32 = +3.5x$$

$$x = \frac{32}{3.5} = 9.1429$$

$$\vec{R} = -3.5\text{N}\,\hat{k} \qquad (x, y) = (9.1429, -2.5714)\ \text{mts}$$

2.46.-	Fuerza (lb) $\hat{j}$	dx $\hat{i}$ (ft)	dz $\hat{k}$ (ft)	$M_x = F dz$ (lb-ft)	$M_z = F dx$ (lb-ft)
	− 92.	0	0	0	0
	− 80	0	27	− 2, 160.	0
	+ 94	5	27	+ 2, 538.	+ 470
	− 24	13	0	− 0	− 312
	+ 48	13	15	+ 720	+ 624
	− 36	13	27	− 972	− 468
$\Sigma =$	− 90	—	—	+126.	+ 314.

a) $\vec{F} = -90 \text{ lb } \hat{j}$ $\quad \vec{M}_o = 126 \text{ lb-ft } \hat{i} + 314 \text{ lb-ft } \hat{k}$

b) $126\hat{i} + 314\hat{k} = (x\hat{i} + z\hat{k}) \times (-90\hat{j})$

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ x & 0 & z \\ 0 & -90 & 0 \end{vmatrix} = [(0)(0) - (-90)(z)]\hat{i} - [(x)(0) - (0)(z)]\hat{j} + [(x)(-90) - (0)(0)]\hat{k}$$

$$\vec{M}_o = +90z\hat{i} - 90x\hat{k}$$

$$126\hat{i} + 314\hat{k} = 90z\hat{i} - 90x\hat{k}$$

$126 = 90z \qquad z = \frac{126}{90} = 1.40 \text{ ft}$

$314 = -90x \qquad x = \frac{314}{-90} = -3.4889 \text{ ft}$

$\vec{R} = -90 \text{ lb } \hat{j} \qquad (x, z) = (-3.4889, 1.40) \text{ ft}$



17.-

5 kN, 3 kN, 7 kN, 2 kN

Ax, Ay, Bx, By, B

1.5 m, 2 m, 1.5 m, 2 m

$\theta = tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.1301°$

$B_y = B\cos\theta$

$B_x = B\,sen\,\theta$

$\Sigma F_x = 0 \qquad A_x - B\,sen\,\theta = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 5 - 3 - 7 - 2 + B\cos\theta = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad -(3)(1.5) - (7)(3.5) - (2)(5) + 7\,B\cos\theta = 0$

$-4.5 - 24.5 - 10 + 7\,B\cos\theta$

$B = \dfrac{39}{7\cos\theta} = \dfrac{39}{7\cos 53.1301°}$

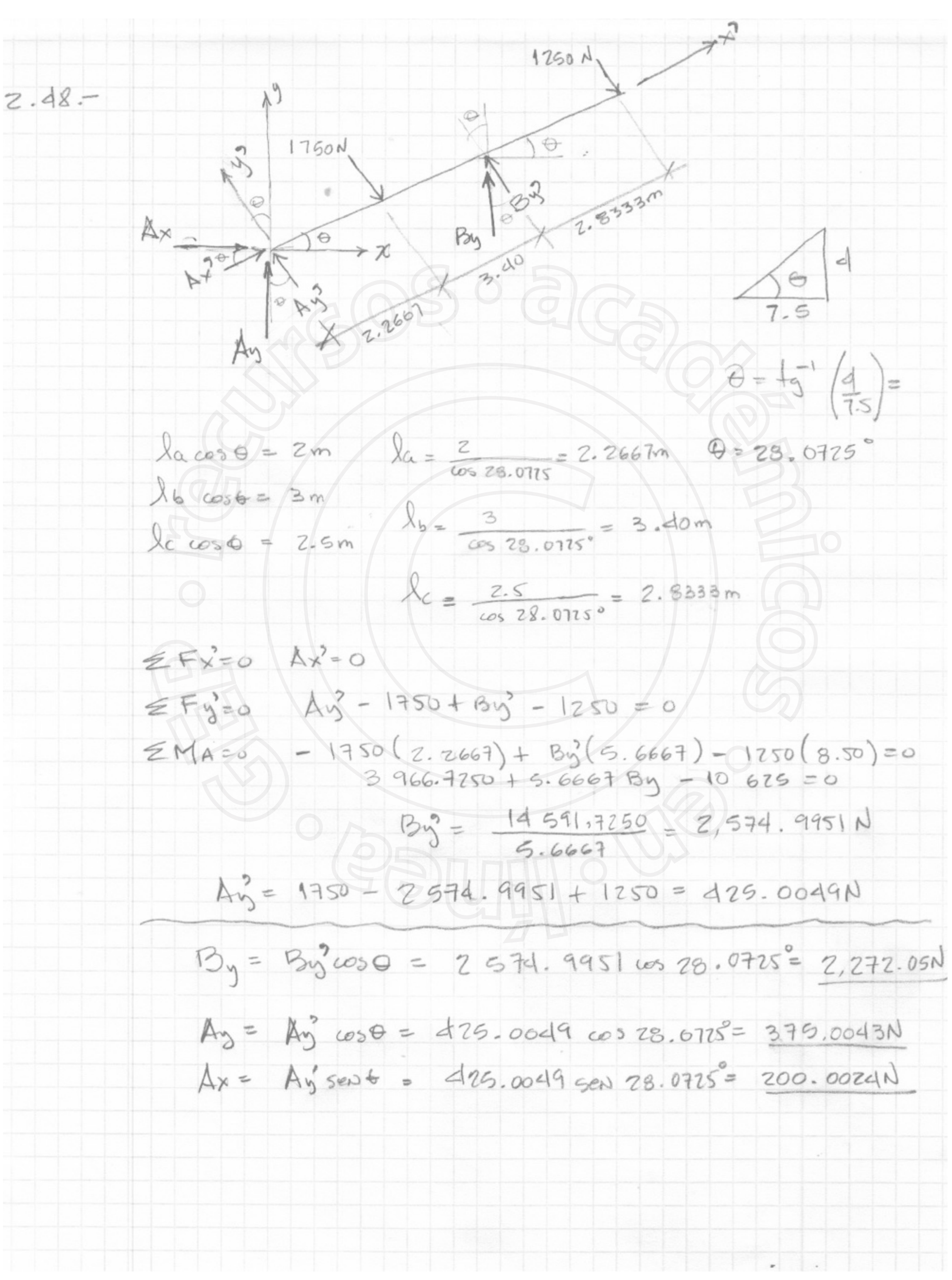
$B = 9.2857$ kN

$B_y = 9.2857\cos 53.1301° = 5.5714$ kN

$B_x = 9.2857\,sen\,53.1301° = 7.4286$ kN

$A_y = 17 - 9.2857\cos 53.1301° = 11.4286$ kN

$A_x = 9.2857\,sen\,53.1301° = 7.4286$ kN



$\theta = tg^{-1}\left(\frac{d}{7.5}\right) =$

$l_a \cos\theta = 2\,m \qquad l_a = \frac{2}{\cos 28.0725} = 2.2667\,m \qquad \theta = 28.0725°$

$l_b \cos\theta = 3\,m \qquad l_b = \frac{3}{\cos 28.0725°} = 3.40\,m$

$l_c \cos\theta = 2.5\,m \qquad l_c = \frac{2.5}{\cos 28.0725°} = 2.8333\,m$

$\Sigma F_{x'} = 0 \qquad A_{x'} = 0$

$\Sigma F_{y'} = 0 \qquad A_{y'} - 1750 + B_{y'} - 1250 = 0$

$\Sigma M_A = 0 \qquad -1750(2.2667) + B_{y'}(5.6667) - 1250(8.50) = 0$

$3\,966.7250 + 5.6667\,B_y - 10\,625 = 0$

$B_{y'} = \frac{14\,591.7250}{5.6667} = 2{,}574.9951\,N$

$A_{y'} = 1750 - 2\,574.9951 + 1250 = 425.0049\,N$

$B_y = B_{y'} \cos\theta = 2\,574.9951 \cos 28.0725° = \underline{2{,}272.05\,N}$

$A_y = A_{y'} \cos\theta = 425.0049 \cos 28.0725° = \underline{375.0043\,N}$

$A_x = A_{y'} \operatorname{sen}\theta = 425.0049 \operatorname{sen} 28.0725° = \underline{200.0024\,N}$



2.49.–

$F_1 = 1354\text{ N} \qquad F_1 \operatorname{sen} 40° = 1354 \operatorname{sen} 40° = 870.3344\text{ N }\hat{k}$

$F_1 \cos 40° = 1354 \cos 40° = 1037.2442\text{ N}$

$(F_1 \cos 40°) \cos 50° = 1037.2442 \cos 50° = 666.7277\text{ N }\hat{j}$

$(F_1 \cos 40°) \operatorname{sen} 50° = 1037.2442 \operatorname{sen} 50° = -794.5752\text{ N }\hat{i}$

$F_2 = 793\text{ N} \qquad F_2 \operatorname{sen} 35° = 793 \operatorname{sen} 35° = 454.8461\text{ N }\hat{k}$

$F_2 \cos 35° = 649.5876\text{ N}$

$(F_2 \cos 35) \cos 60° = 649.5876 \cos 60° = -324.7938\text{ N }\hat{j}$

$(F_2 \cos 35°) \operatorname{sen} 60° = 649.5876 \operatorname{sen} 60° = -562.5594\text{ N }\hat{i}$

$\overline{\rho_{O-F_1}} = 6(\operatorname{sen} 30° \hat{k} + \cos 70° \hat{j} - \operatorname{sen} 70° \hat{i})$

$3\hat{k} + 2.0521\hat{j} - 5.6382\hat{i}$

$\overline{\rho_{O-F_2}} = 3(\operatorname{sen} 30° \hat{k} + \cos 70° \hat{j} - \operatorname{sen} 70° \hat{i})$

$1.50\hat{k} + 1.0261\hat{j} - 2.8191\hat{i}$

$M_O = \rho \times F$

$M_{O_1} = \rho_{O-F_1} \times \vec{F_1}$

$$M_{O_1} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ -5.6382 & 2.0521 & 3 \\ -794.5752 & 666.7277 & 870.3344 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +[(2.0521)(870.3344) - (666.7277)(3)]\hat{i} \\ -[(-5.6382)(870.3344) - (-794.5752)(3)]\hat{j} \\ +[(-5.6382)(666.7277) - (-794.5752)(2.0521)]\hat{k} \end{matrix}$$

a) $M_{O_1} = -214.1699\,\hat{i} + 2{,}523.3938\,\hat{j} - 2128.5964\,\hat{k}$

$M_{O_2} = \overline{\rho_{O-F_2}} \times \vec{F_2}$

$$M_{O_2} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ -2.8191 & 1.0261 & 1.50 \\ -562.5594 & -324.7938 & 454.8461 \end{vmatrix} = \begin{matrix} +[(1.0261)(454.8461) - (-324.7938)(1.50)]\hat{i} \\ -[(-2.8191)(454.8461) - (-562.5594)(1.50)]\hat{j} \\ +[(-2.8191)(-324.7938) - (-562.5594)(1.0261)]\hat{k} \end{matrix}$$

b) $M_{O_2} = 953.9083\,\hat{i} + 438.4175\,\hat{j} + 1{,}492.8684\,\hat{k}$

c) $M_O = 739.7384\,\hat{i} + 2{,}961.8113\,\hat{j} - 635.7280\,\hat{k}$



2.50.- $L = 30\,ft \qquad L/4 = 30/4 = 7.5\,ft \qquad 3L/4 = 3/4(30) = 22.5\,ft$

$F_1 = 675\,lb$

$F_2 = 3971\,lb$

$$\vec{F}_1 = 675\,lb\left(\text{sen}\,45^\circ\,\hat{k} + \cos 45^\circ \cos 55^\circ\,\hat{j} - \cos 45^\circ\,\text{sen}\,55^\circ\,\hat{i}\right)$$

$$\vec{F}_1 = 477.2971\,\hat{k} + 273.7664\,\hat{j} - 390.9789\,\hat{i} \quad (lb)$$

$$\vec{F}_2 = 3971\,lb\left(\text{sen}\,30^\circ\,\hat{k} - \cos 30^\circ \cos 50^\circ\,\hat{j} - \cos 30^\circ\,\text{sen}\,50^\circ\,\hat{i}\right)$$

$$\vec{F}_2 = 1985.5\,\hat{k} - 2,210.5382\,\hat{j} - 2,634.4168\,\hat{i} \quad (lb)$$

$$\vec{\rho}_{o-1} = 22.5\,ft\left(\text{sen}\,25^\circ\,\hat{k} + \cos 25^\circ \cos 60^\circ\,\hat{j} - \cos 25^\circ\,\text{sen}\,60^\circ\,\hat{i}\right)$$

$$\vec{\rho}_{o-1} = 9.5089\,\hat{k} + 10.1960\,\hat{j} - 17.6599\,\hat{i}$$

$$\vec{\rho}_{o-2} = 7.5\,ft\left(\text{sen}\,25^\circ\,\hat{k} + \cos 25^\circ \cos 60^\circ\,\hat{j} - \cos 25^\circ\,\text{sen}\,60^\circ\,\hat{i}\right)$$

$$\vec{\rho}_{o-2} = 3.1696\,\hat{k} + 3.3987\,\hat{j} - 5.8866\,\hat{i}$$

$$\vec{M}_{o-1} = \vec{\rho}_{o-1} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ -17.6599 & +10.1960 & +9.5089 \\ -390.9789 & 273.7664 & 477.2971 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_{o-1} = [(10.1960)(477.2971) - (273.7664)(9.5089)]\,\hat{i}$$
$$- [(-17.6599)(477.2971) - (-390.9789)(9.5089)]\,\hat{j}$$
$$+ [(-17.6599)(273.7664) - (-390.9789)(+10.1960)]\,\hat{k}$$

a) $\vec{M}_{o-1} = 2\,263.3039\,\hat{i} + 4,711.2398\,\hat{j} - 848.2664\,\hat{k}\ (lb\text{-}ft)$

$$\vec{M}_{o-2} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\hat{i}} & \overset{-}{\hat{j}} & \overset{+}{\hat{k}} \\ -5.8866 & 3.3987 & 3.1696 \\ -2634.4168 & -2210.5382 & 1985.5 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{M}_{o-2} = [(3.3987)(1985.5) - (-2210.5382)(3.1696)]\,\hat{i}$$
$$- [(-5.8866)(1985.5) - (-2634.4168)(3.1696)]\,\hat{j}$$
$$+ [(-5.8866)(-2210.5382) - (-2634.4168)(3.3987)]\,\hat{k}$$



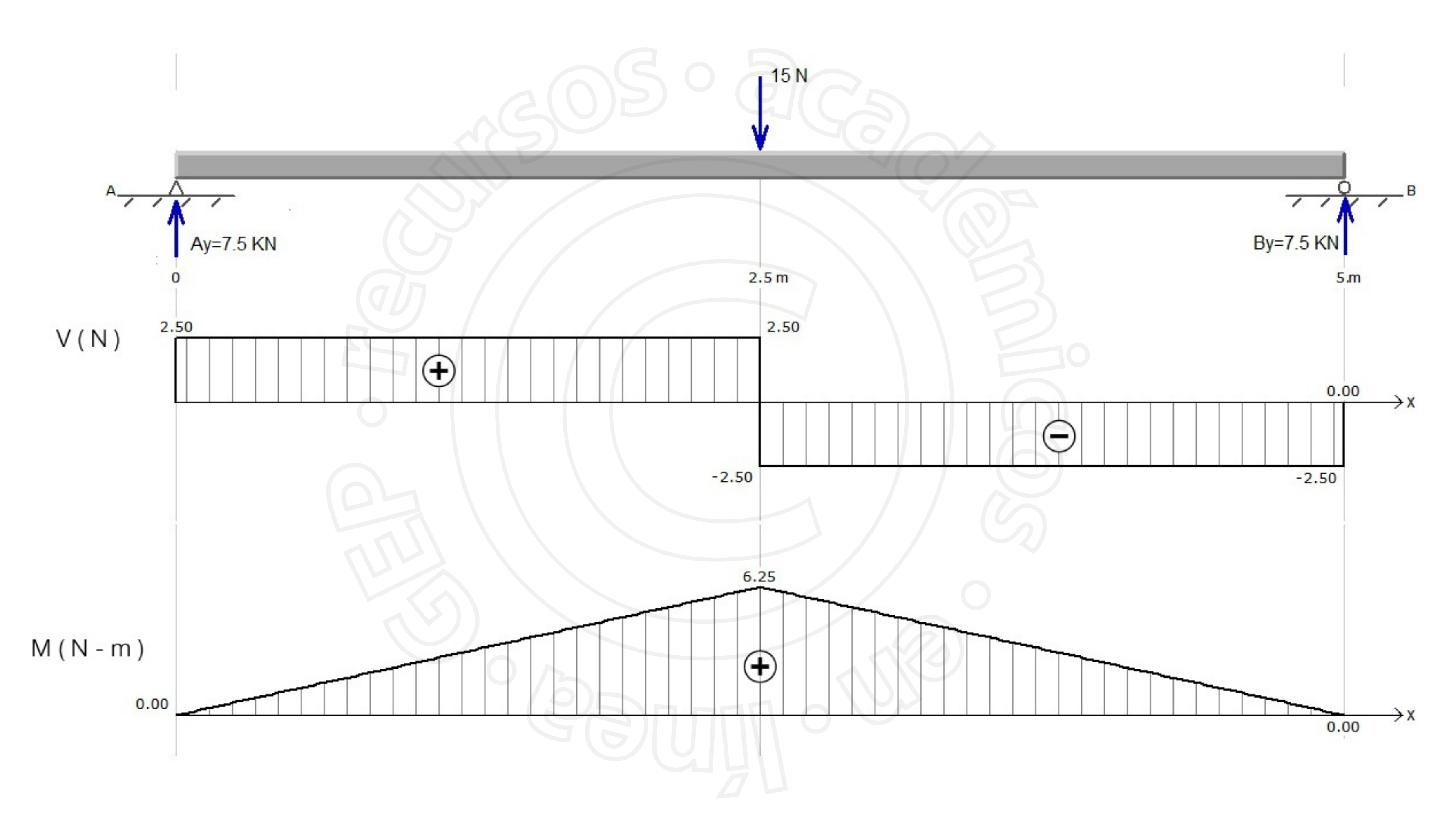
2.50 continuación

b) $\vec{M}_{O-z} = 13,754.6407\,\hat{i} + 3,337.7968\,\hat{j} + 21,966.1465\,\hat{k}$ (lb-ft)

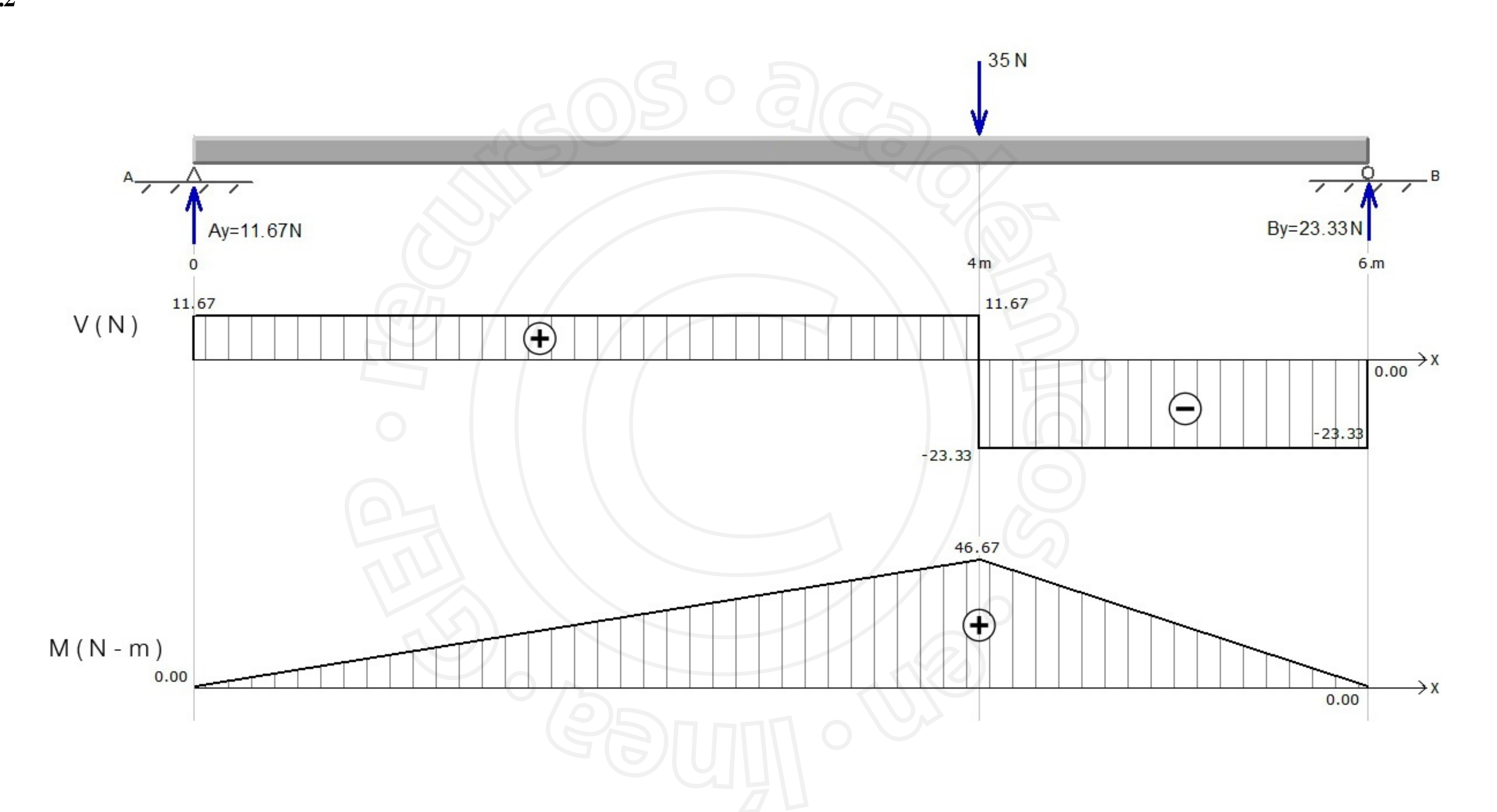
c) $\vec{M}_O = 16,017.9446\,\hat{i} + 8,049.0366\,\hat{j} + 21,117.8801\,\hat{k}$ (lb-ft)

A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

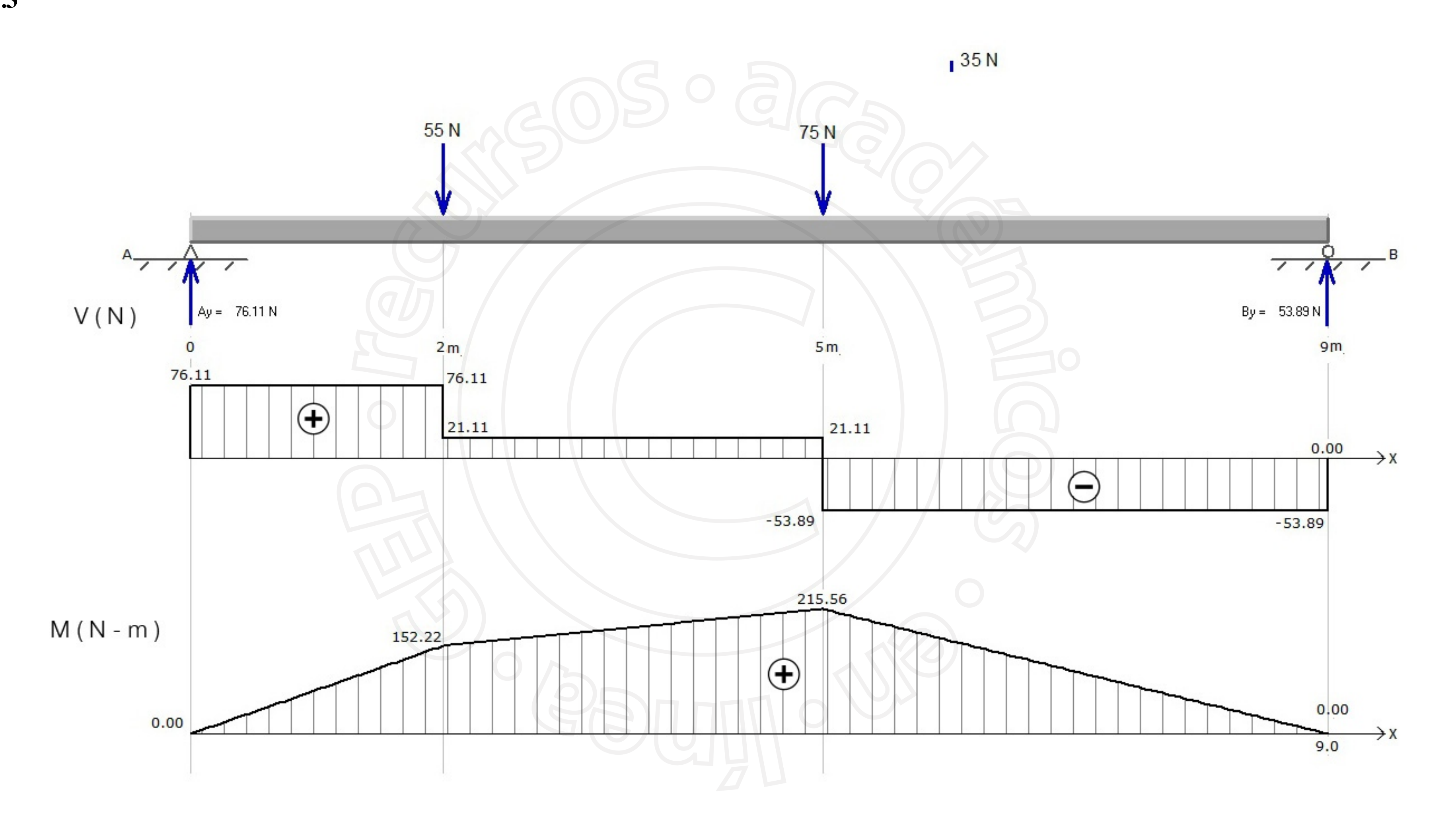
3.1



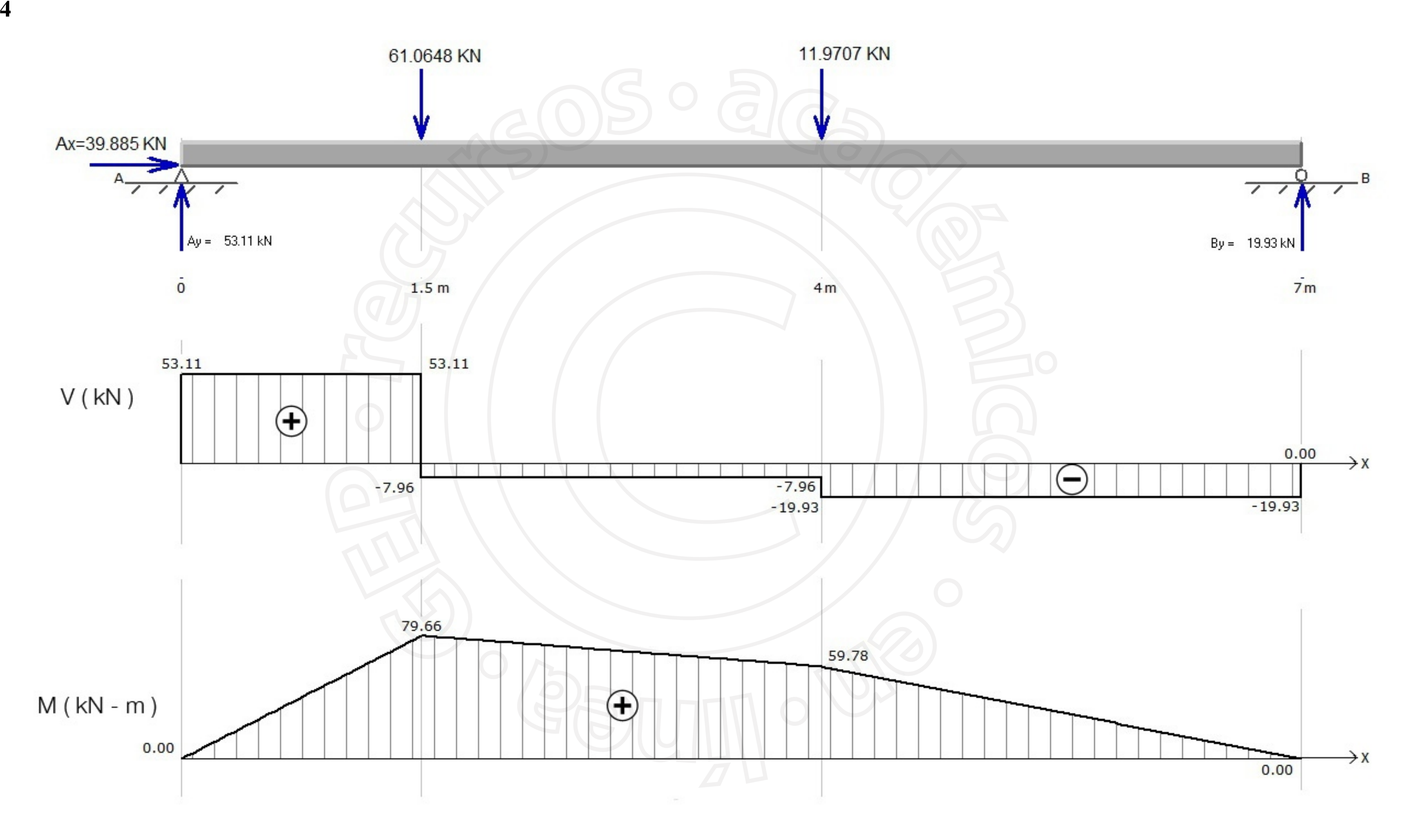
3.2


35 N
A
B
Ay=11.67N
By=23.33N
0
4m
6.m
V(N)
11.67
11.67
0.00
-23.33
-23.33
X
46.67
M(N-m)
0.00
0.00
X

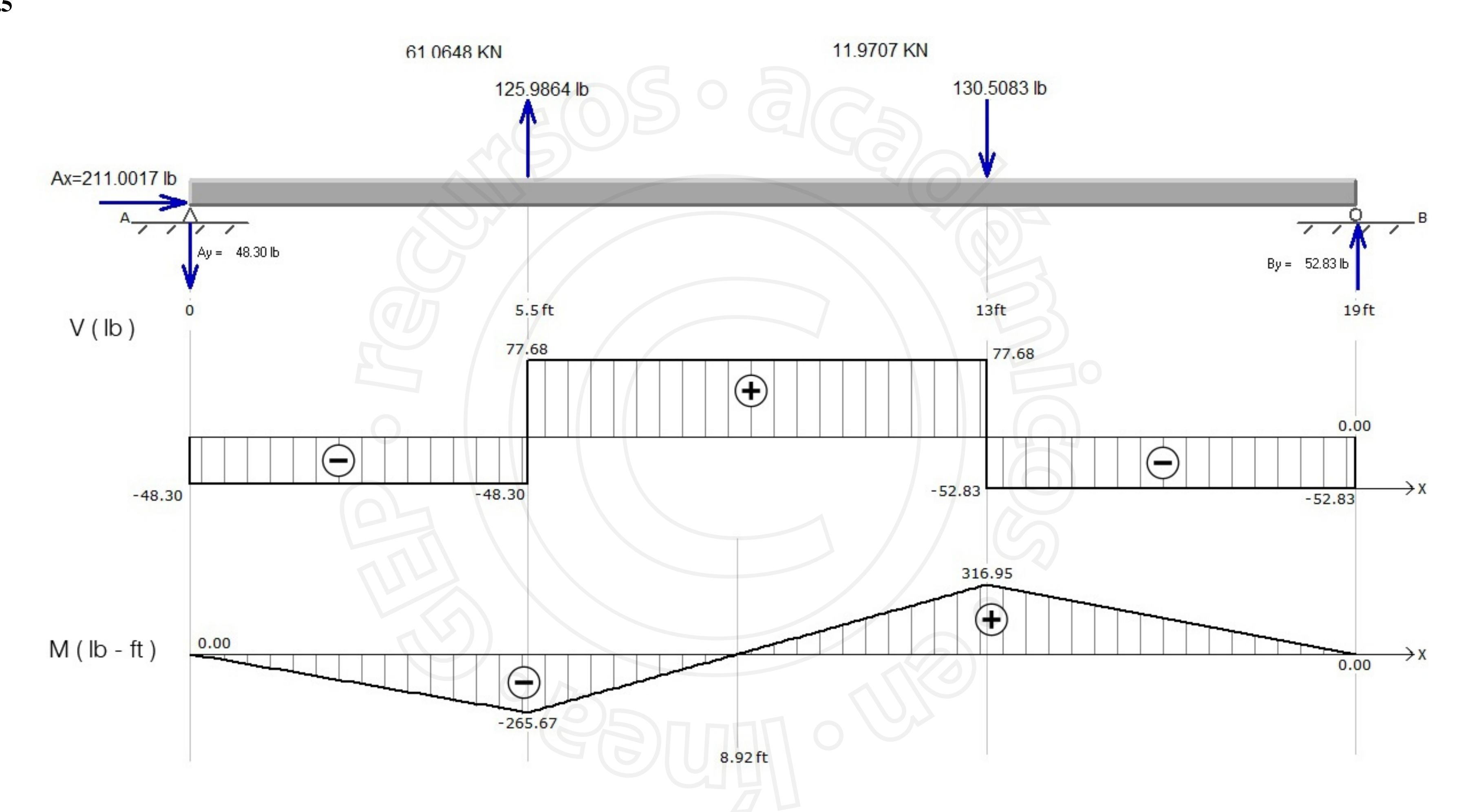
3.3


35 N
55 N
75 N
A
B
Ay = 76.11 N
By = 53.89 N
V (N)
0
2 m
5 m
9 m
76.11
76.11
21.11
21.11
0.00
X
-53.89
-53.89
M (N - m)
152.22
215.56
0.00
0.00
9.0
X

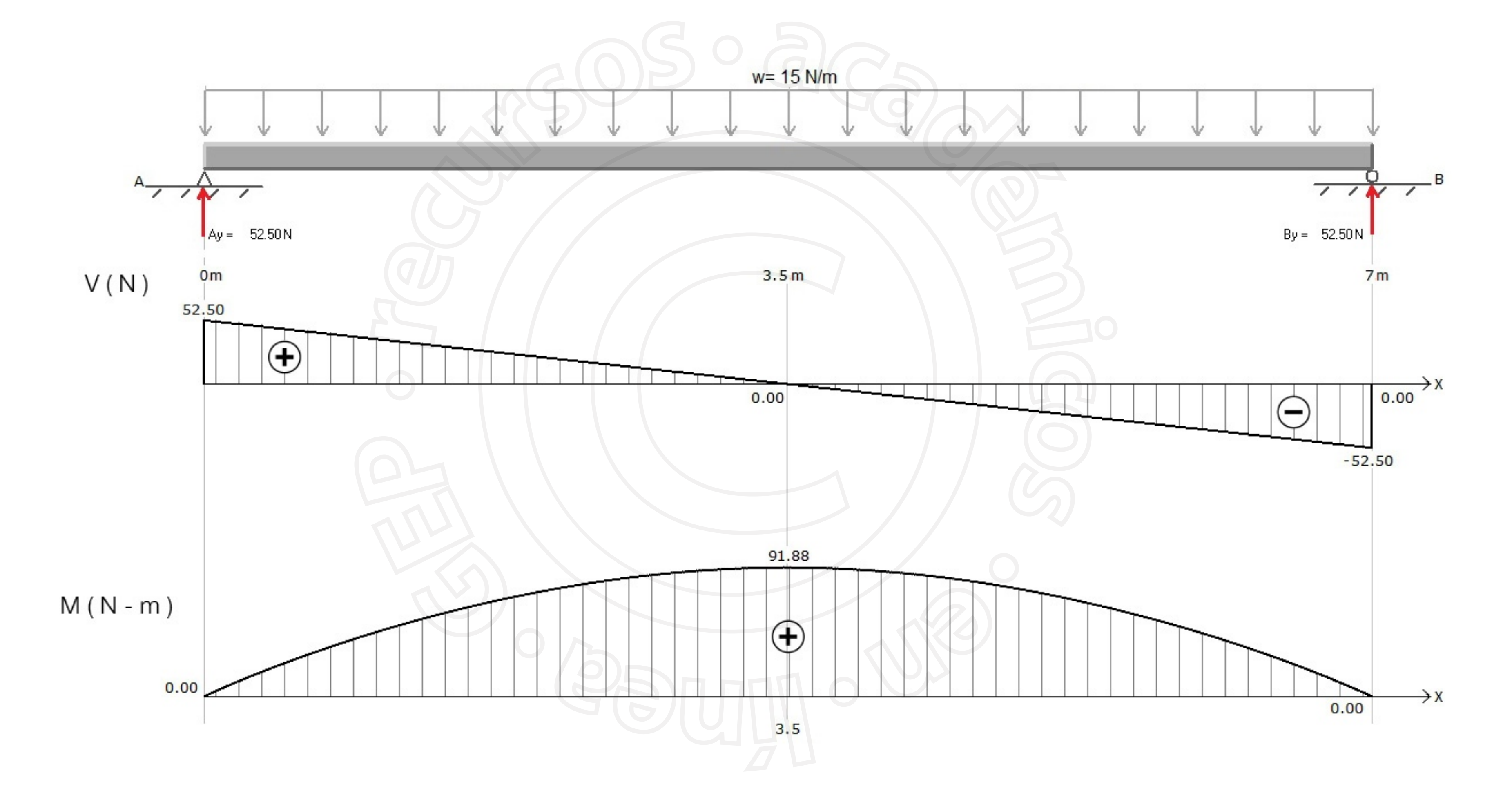
3.4


61.0648 KN
11.9707 KN
Ax=39.885 KN
A
B
Ay = 53.11 kN
By = 19.93 kN
0
1.5 m
4 m
7 m
V (kN)
53.11
53.11
-7.96
-7.96
-19.93
-19.93
0.00
X
M (kN - m)
79.66
59.78
0.00
0.00
X

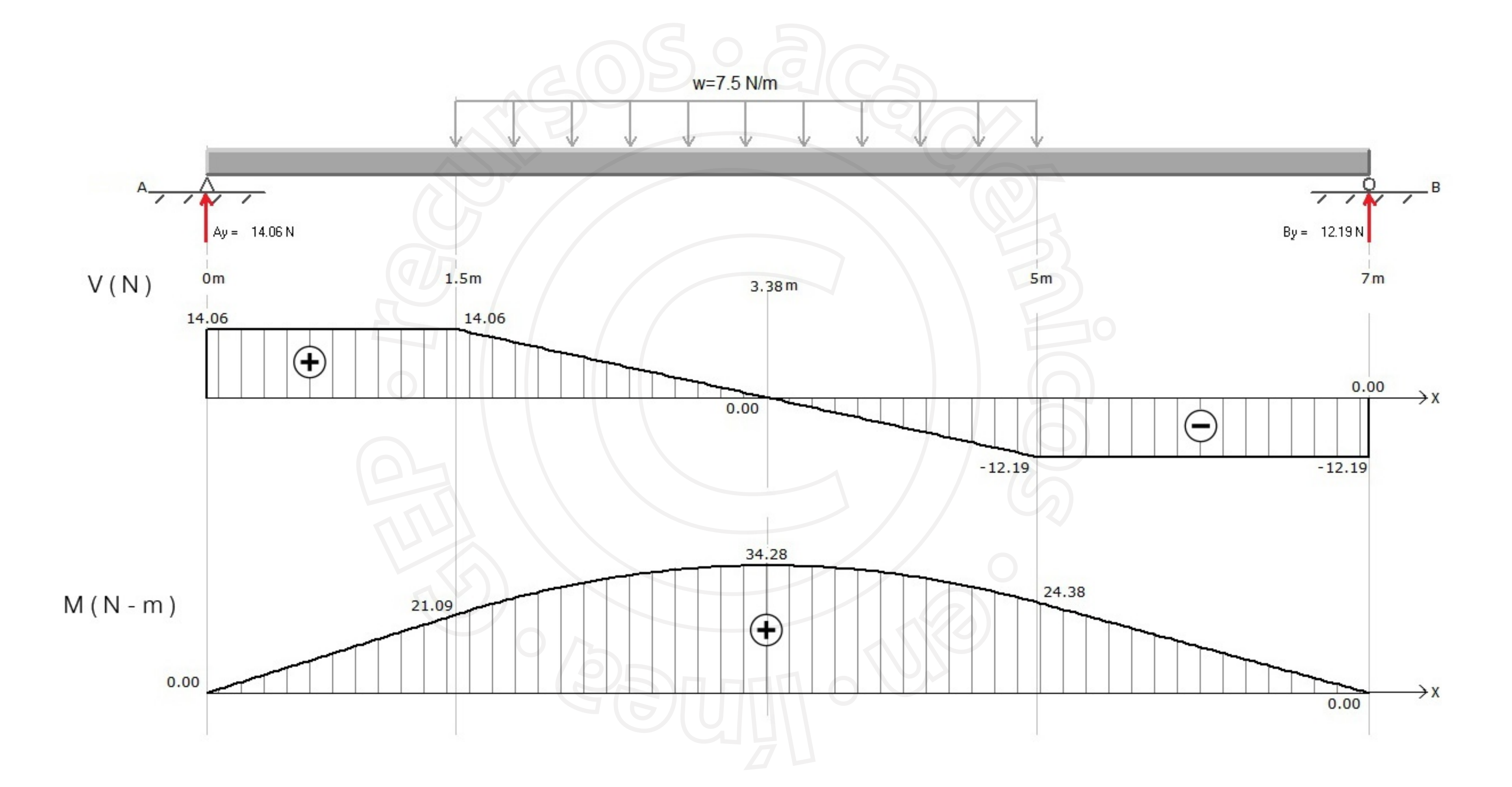
3.5


61.0648 KN
11.9707 KN
125.9864 lb
130.5083 lb
Ax=211.0017 lb
A
B
Ay = 48.30 lb
By = 52.83 lb
0
5.5 ft
13ft
19 ft
V (lb)
77.68
77.68
0.00
-48.30
-48.30
-52.83
-52.83
X
316.95
M (lb - ft)
0.00
0.00
-265.67
8.92 ft
X

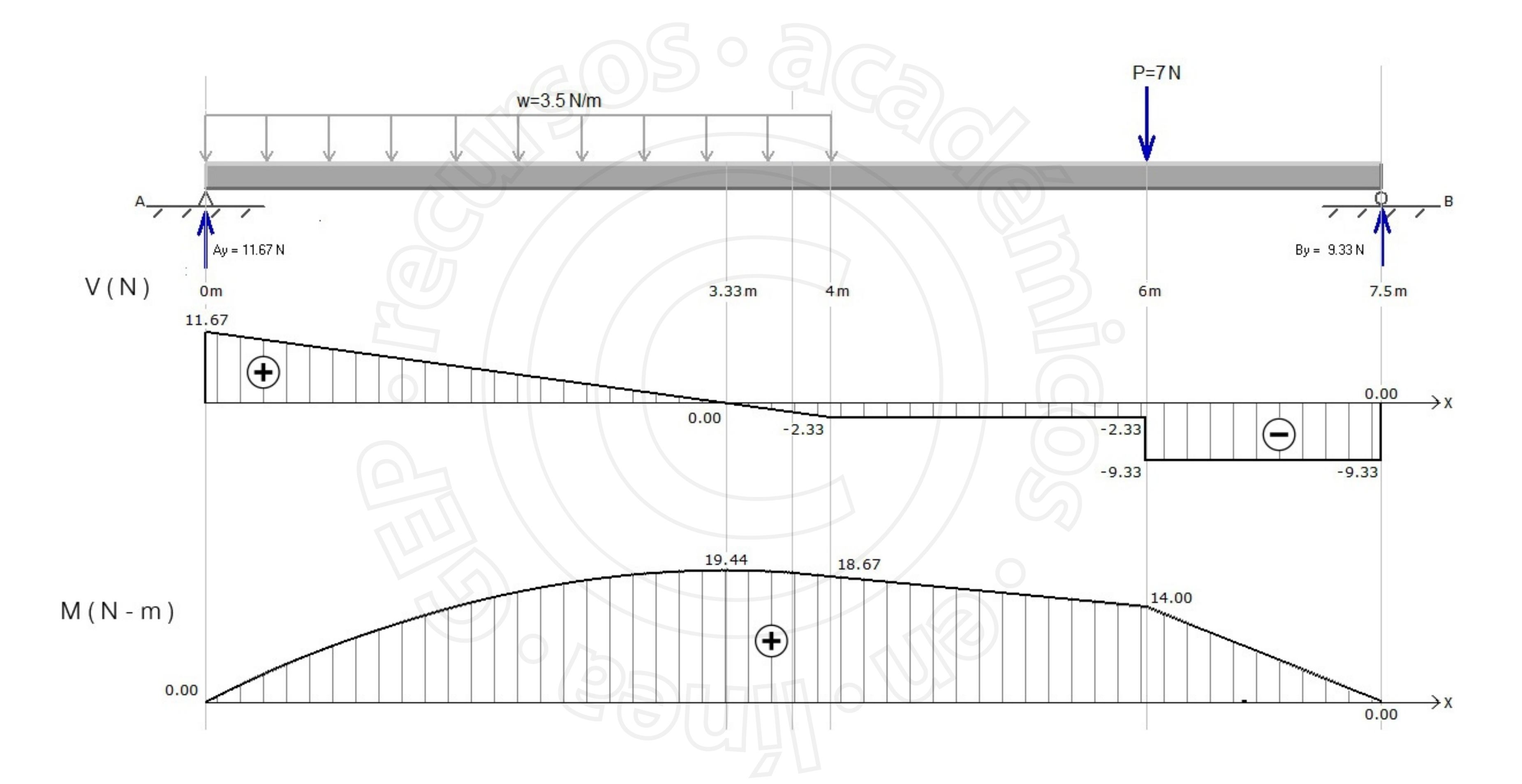
3.6


w= 15 N/m
A
B
Ay = 52.50 N
By = 52.50 N
V (N)
0 m
3.5 m
7 m
52.50
0.00
0.00
-52.50
x
M (N - m)
91.88
0.00
0.00
3.5
x

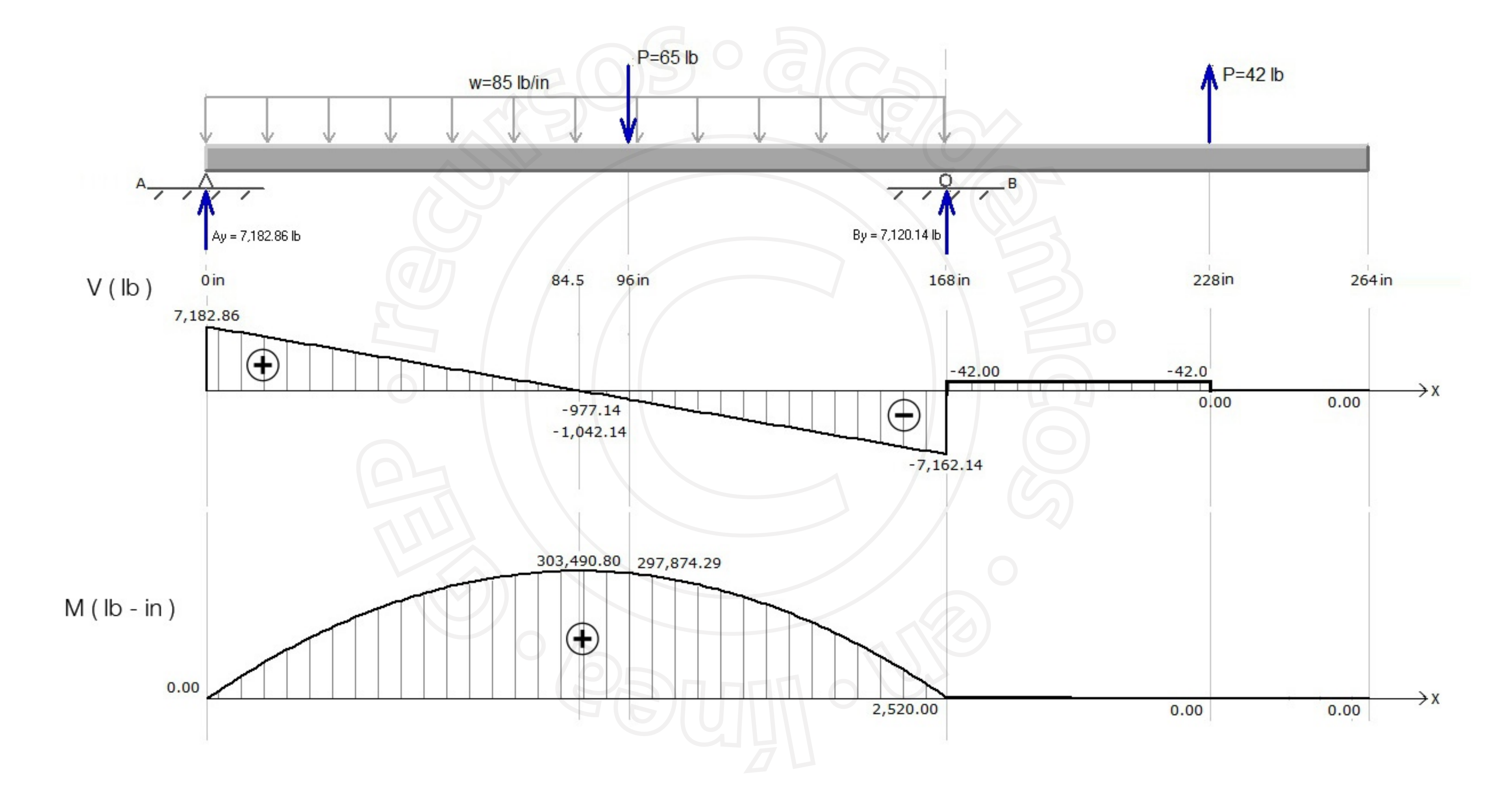
3.7


w=7.5 N/m
A
B
Ay = 14.06 N
By = 12.19 N
V (N)
0m
1.5m
3.38m
5m
7m
14.06
14.06
0.00
0.00
-12.19
-12.19
X
M (N - m)
34.28
21.09
24.38
0.00
0.00
X

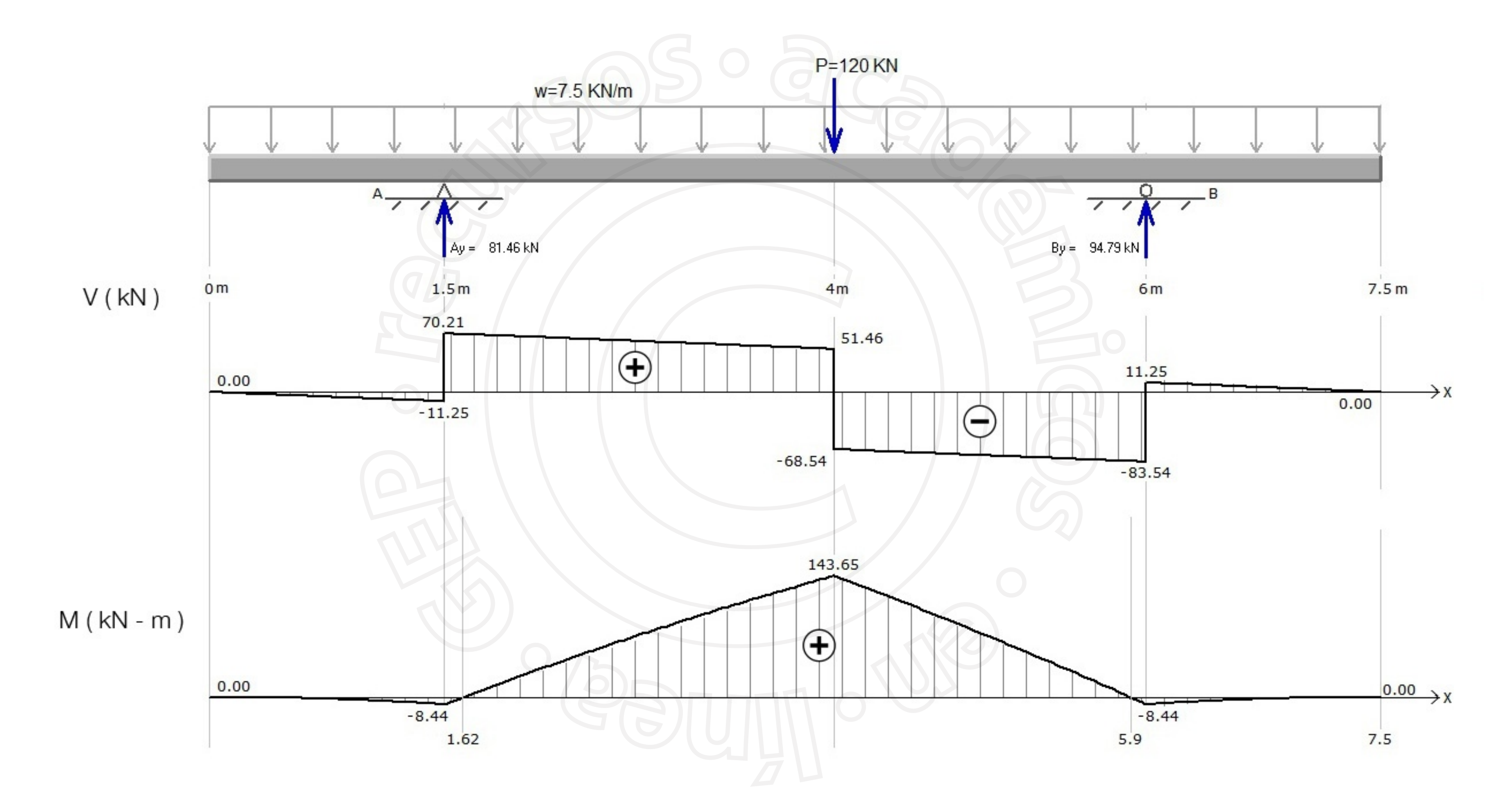
3.8


P=7 N
w=3.5 N/m
A
B
Ay = 11.67 N
By = 9.33 N
V (N)
0m
3.33 m
4 m
6m
7.5 m
11.67
0.00
-2.33
-2.33
-9.33
-9.33
0.00
X
M (N - m)
19.44
18.67
14.00
0.00
0.00
X

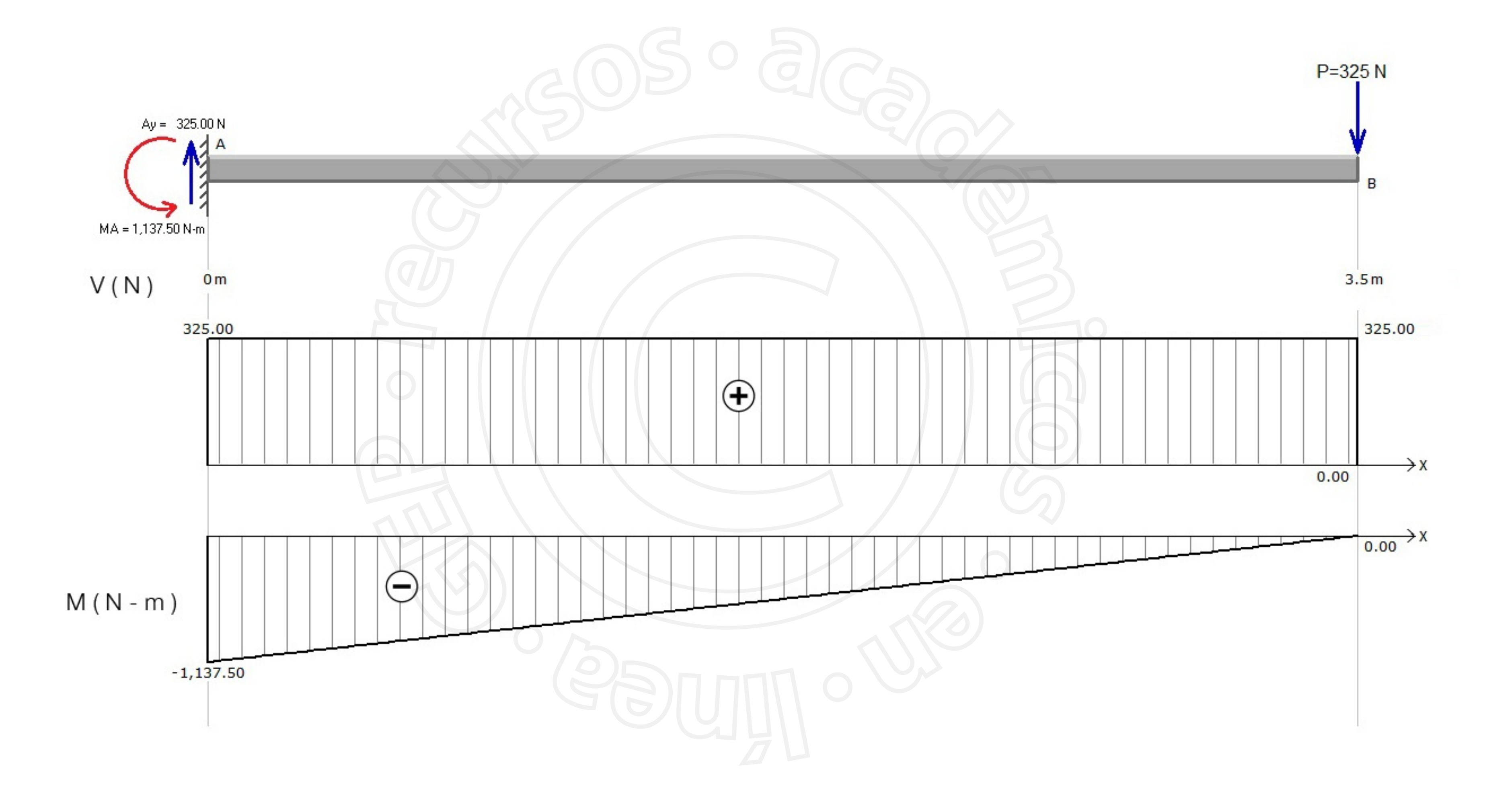
3.9


P=65 lb
w=85 lb/in
P=42 lb
A
B
Ay = 7,182.86 lb
By = 7,120.14 lb
V (lb)
0 in
84.5
96 in
168 in
228 in
264 in
7,182.86
-42.00
-42.0
-977.14
-1,042.14
0.00
0.00
-7,162.14
X
303,490.80
297,874.29
M (lb - in)
0.00
2,520.00
0.00
0.00
X

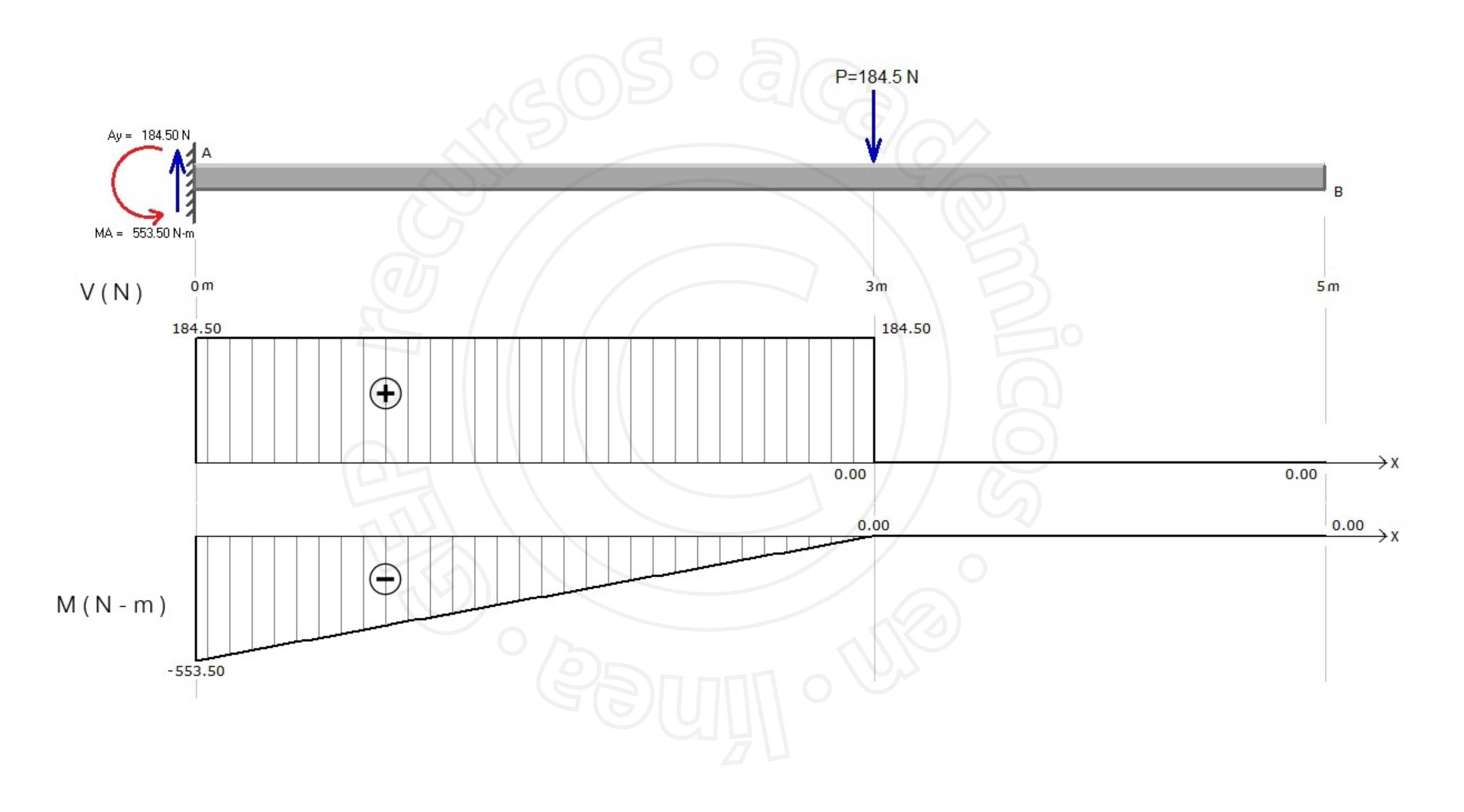
3.10


P=120 KN
w=7.5 KN/m
A
B
Ay = 81.46 kN
By = 94.79 kN
V (kN)
0 m
1.5 m
4 m
6 m
7.5 m
70.21
51.46
0.00
11.25
-11.25
0.00
-68.54
-83.54
X
M (kN - m)
143.65
0.00
-8.44
0.00
-8.44
1.62
5.9
7.5
X

3.11


P=325 N
Ay = 325.00 N
A
B
MA = 1,137.50 N-m
V (N)
0 m
3.5 m
325.00
325.00
0.00
X
M (N - m)
0.00
X
-1,137.50

3.12


P=184.5 N
Ay = 184.50 N
A
B
MA = 553.50 N-m
V (N)
0 m
3 m
5 m
184.50
184.50
0.00
0.00
X
0.00
0.00
X
M (N - m)
-553.50



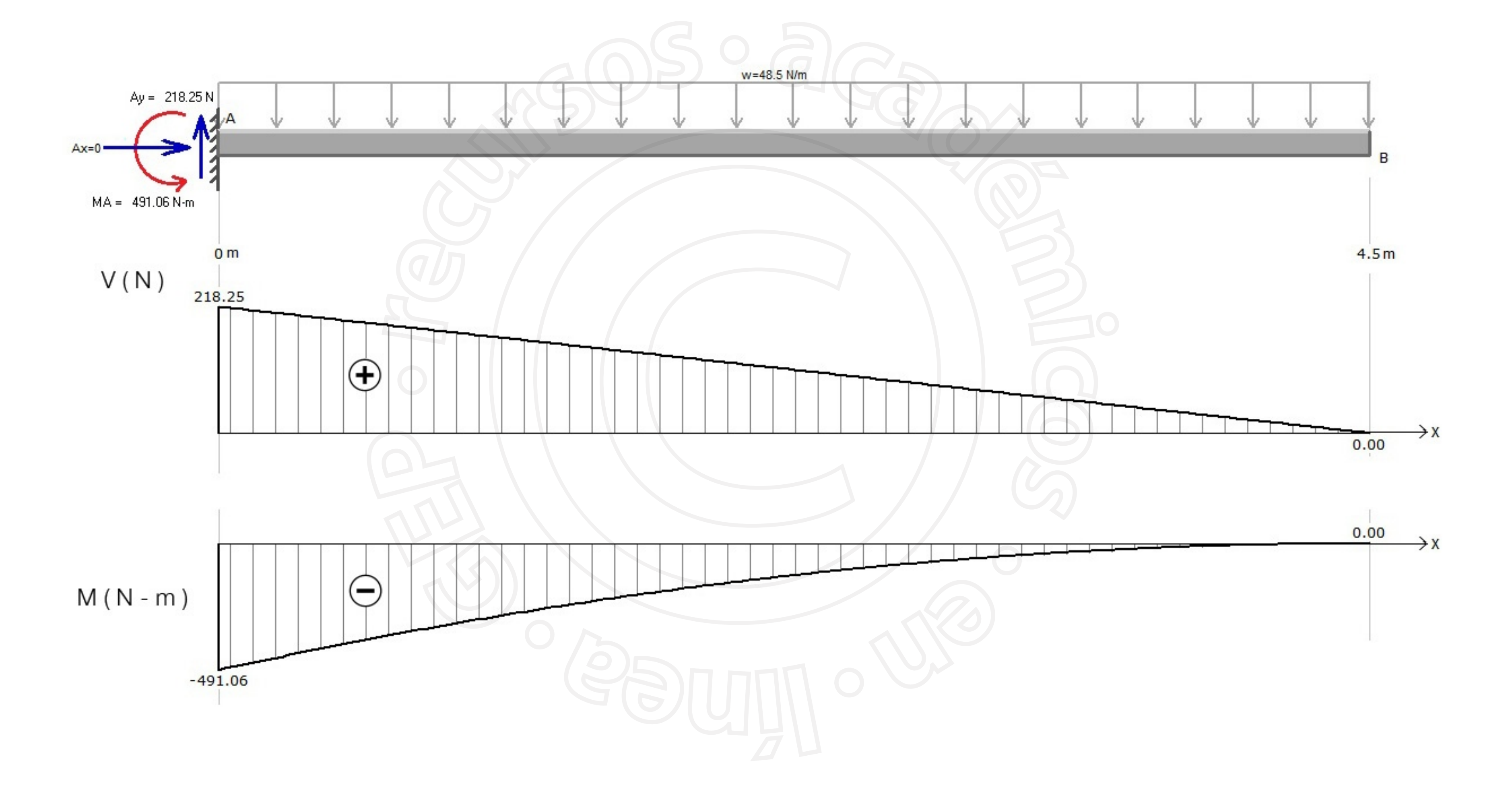
3.13

Ay = 3.93 kN
Ax=51.325 KN
A
A
MA = 80.33 kN-m
43.0668 KN
51.325 KN
47 KN
B

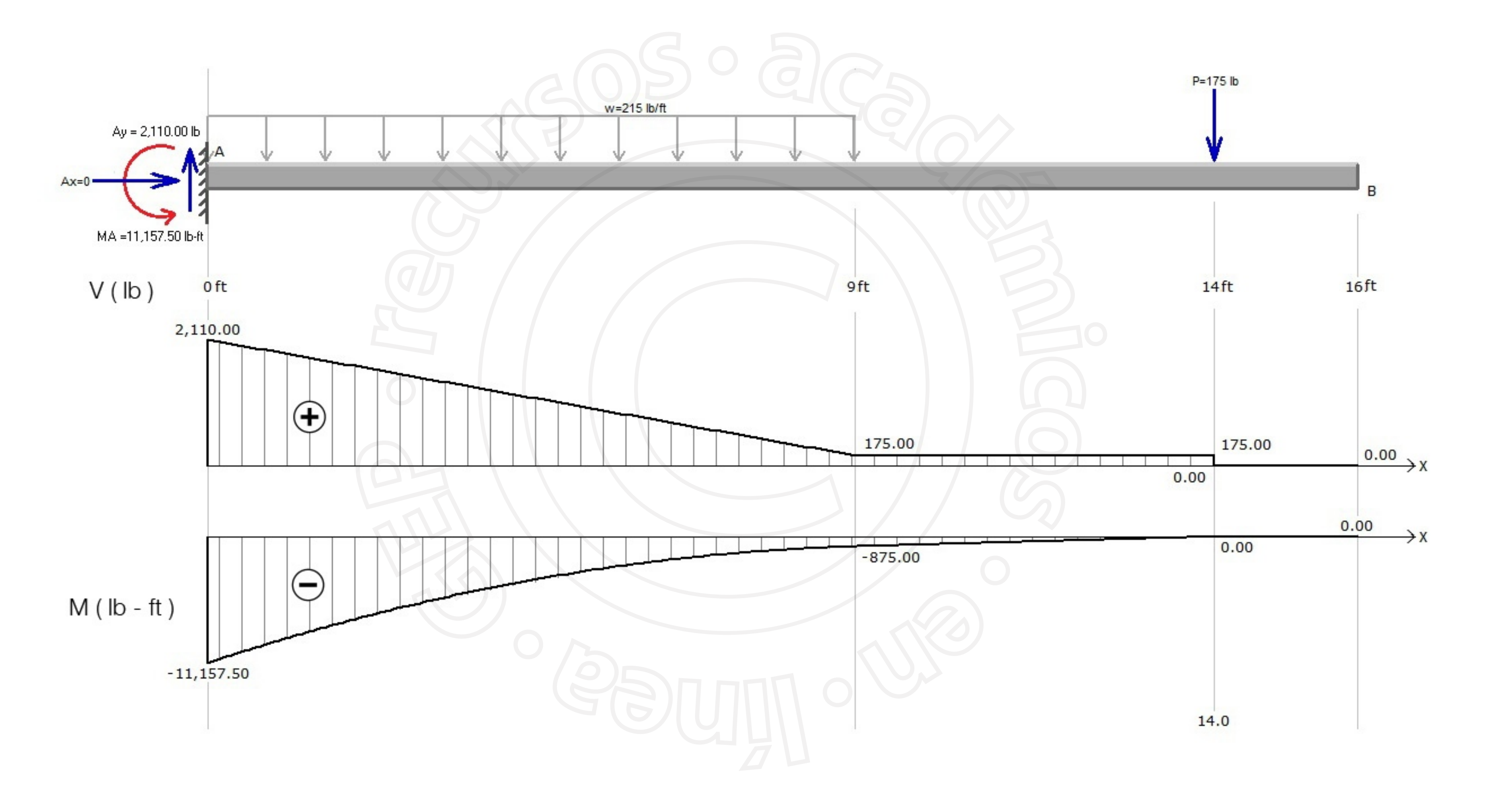
V (kN)
0 m
2.5 m
4 m
47.00
47.00
3.93
3.93
0.00
x

M (kN - m)
0.00
x
-70.50
-80.33

3.14

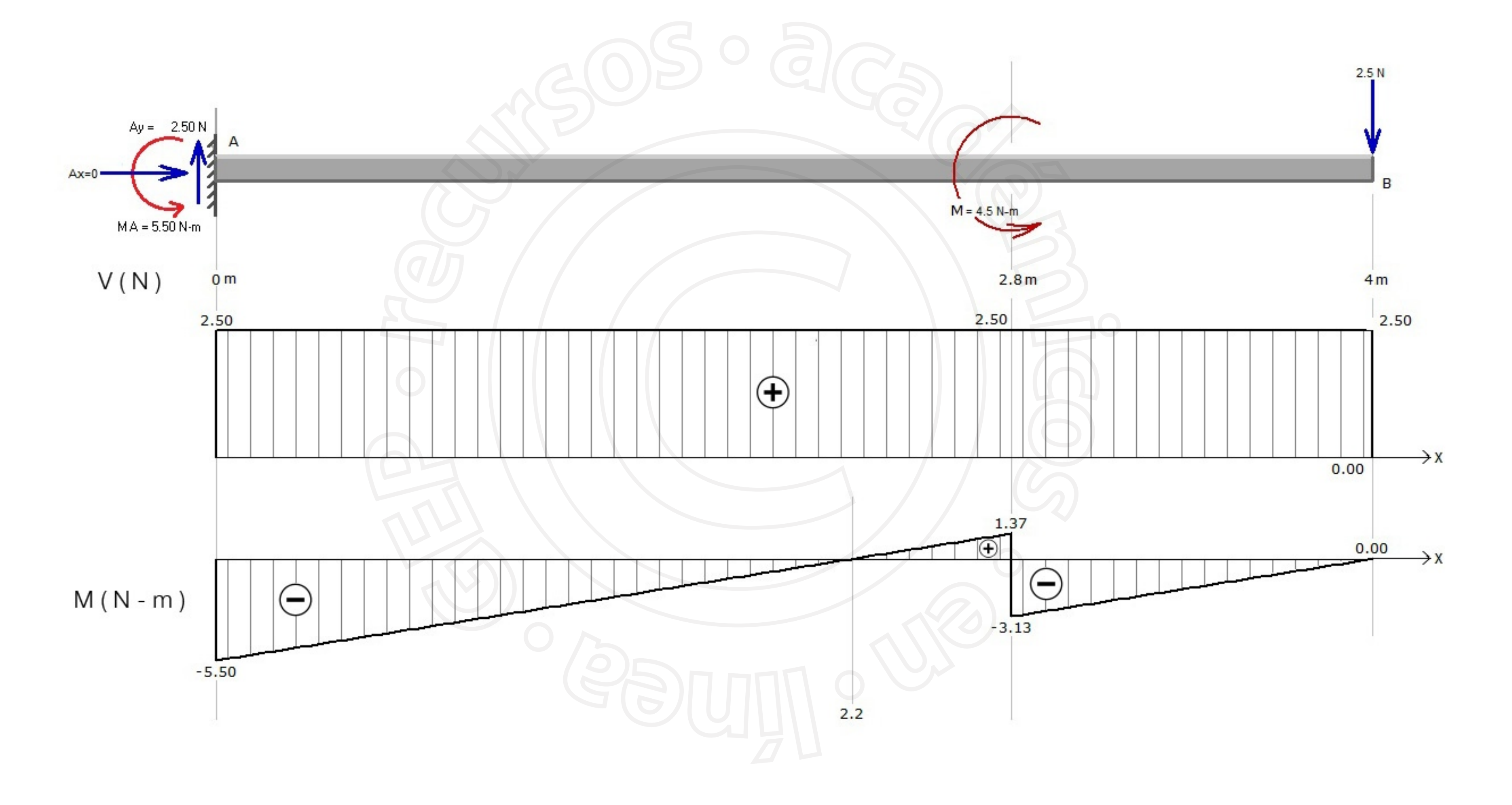

w=48.5 N/m
Ay = 218.25 N
A
Ax=0
MA = 491.06 N-m
B
0 m
4.5 m
V (N)
218.25
0.00
X
M (N - m)
0.00
-491.06

3.15

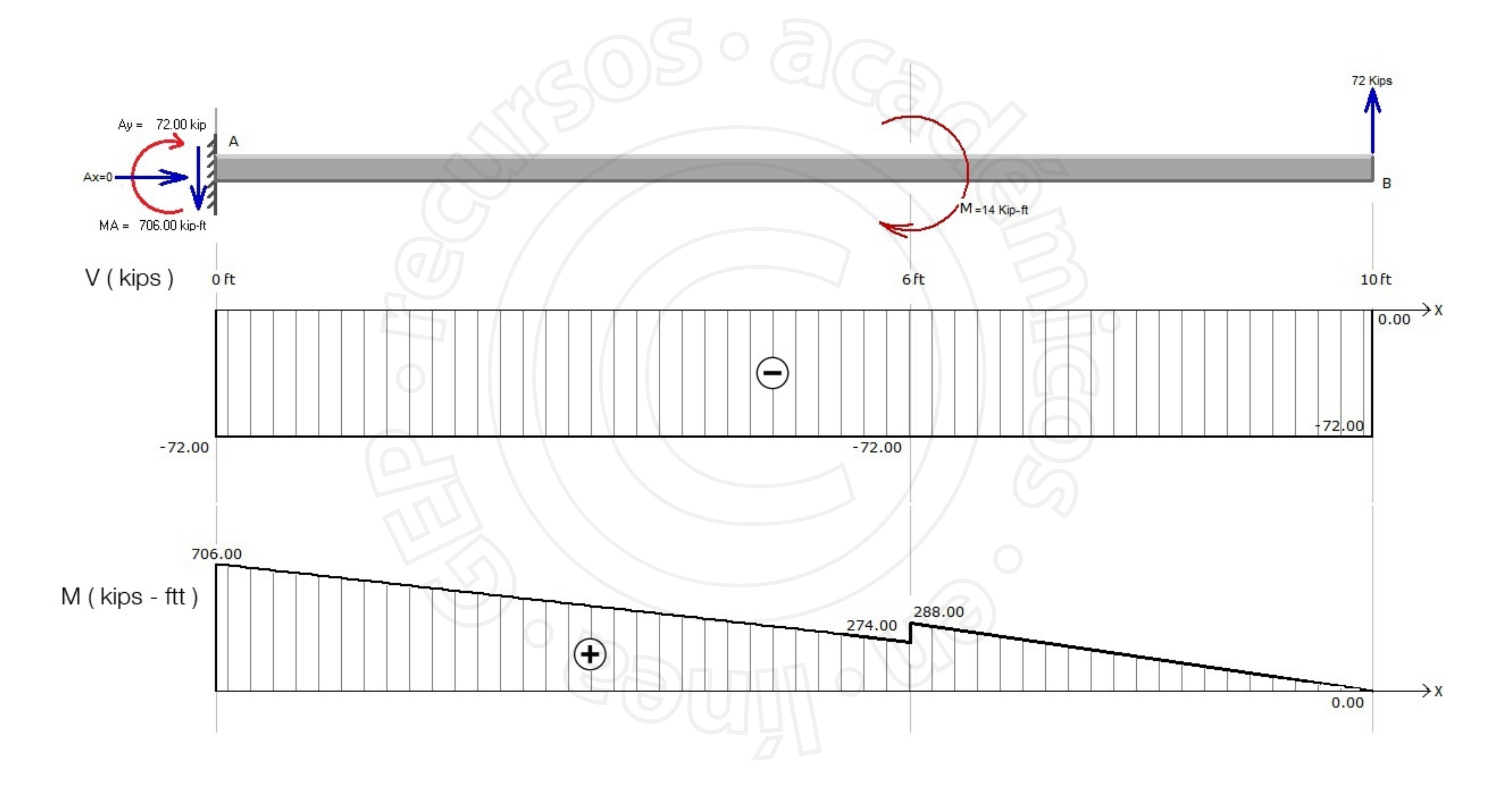

P=175 lb
w=215 lb/ft
Ay = 2,110.00 lb
A
Ax=0
B
MA =11,157.50 lb-ft
V (lb)
0 ft
9 ft
14 ft
16 ft
2,110.00
175.00
175.00
0.00
0.00
X
0.00
X
0.00
-875.00
M (lb - ft)
-11,157.50
14.0

GRUPO EDITORIAL PATRIA

3.16



3.17


72 Kips
Ay = 72.00 kip
A
Ax=0
MA = 706.00 kip-ft
M =14 Kip-ft
B
V (kips)
0 ft
6 ft
10 ft
0.00
X
-72.00
-72.00
-72.00
706.00
M (kips - ftt)
274.00
288.00
0.00
X

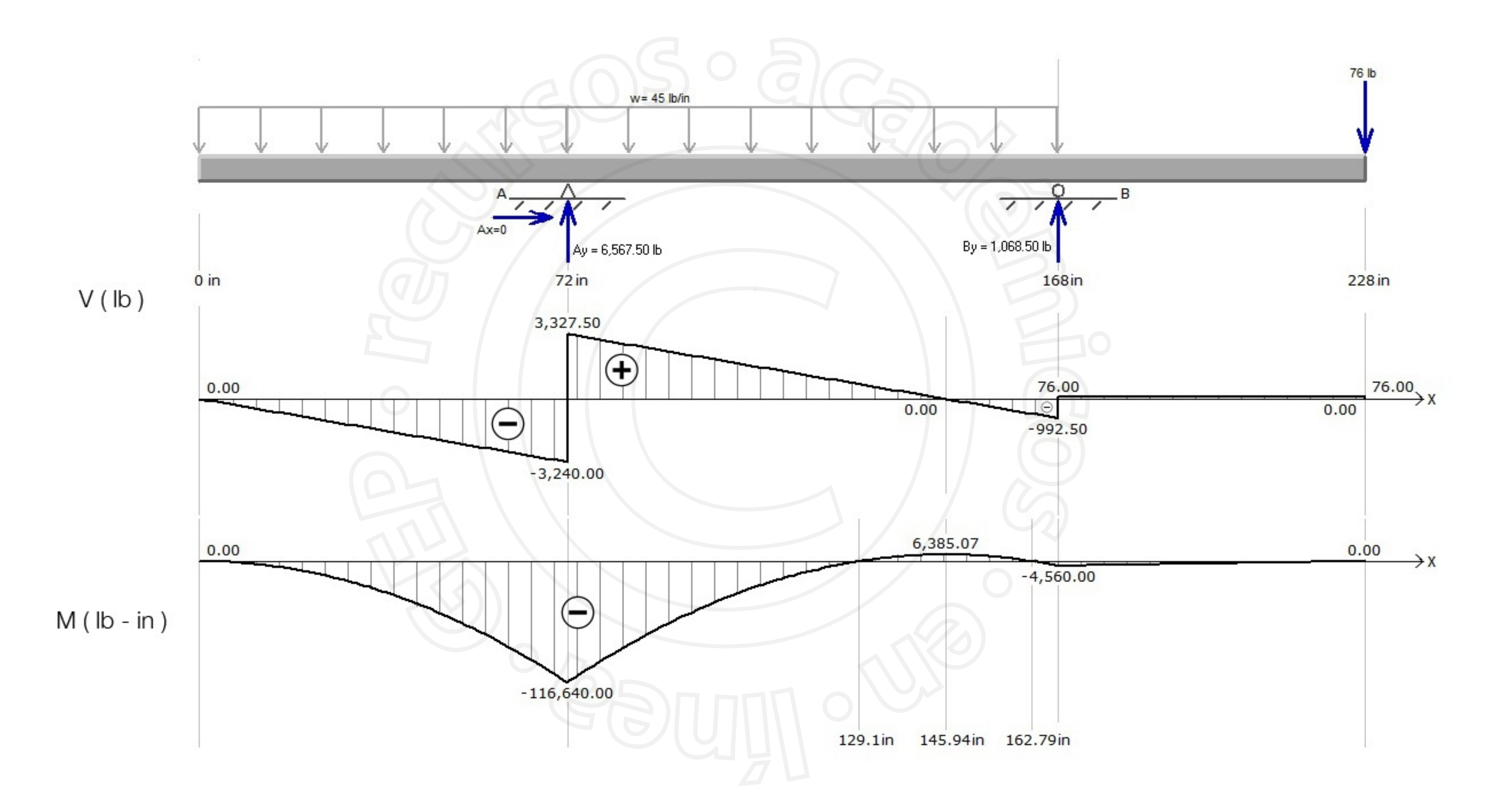
3.18

46 Kips
w = 24 Kips/FT
M = 46 Kips-ft
A
Ax=0
Ay = 112.65 kip
B
By = 103.34 kip
0 ft
1.5 ft
3.5 ft
8.19 ft
12.5 ft

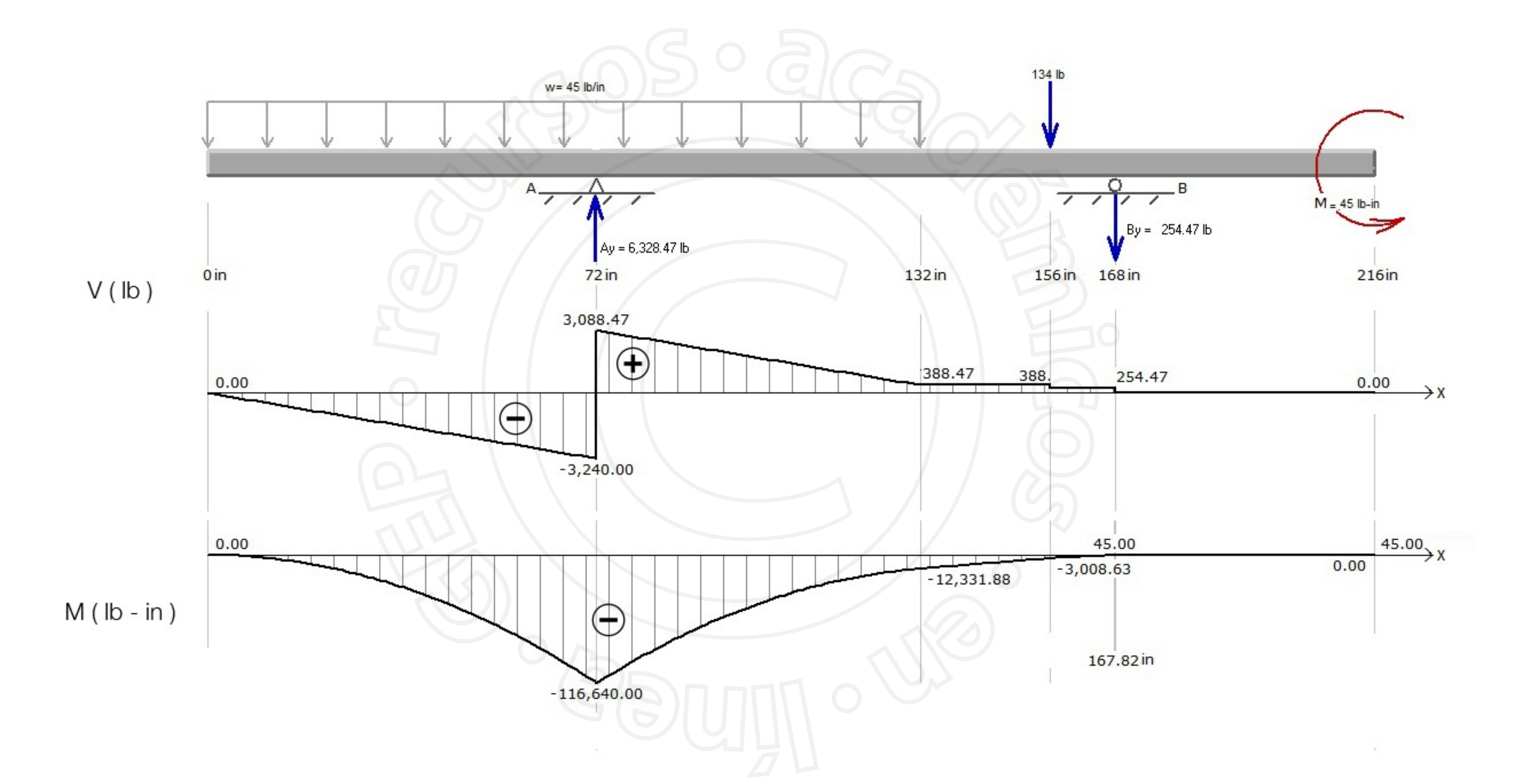
V (kips)
112.66
00.01034
0.01034
0.00
0.00
0.00
-103.34

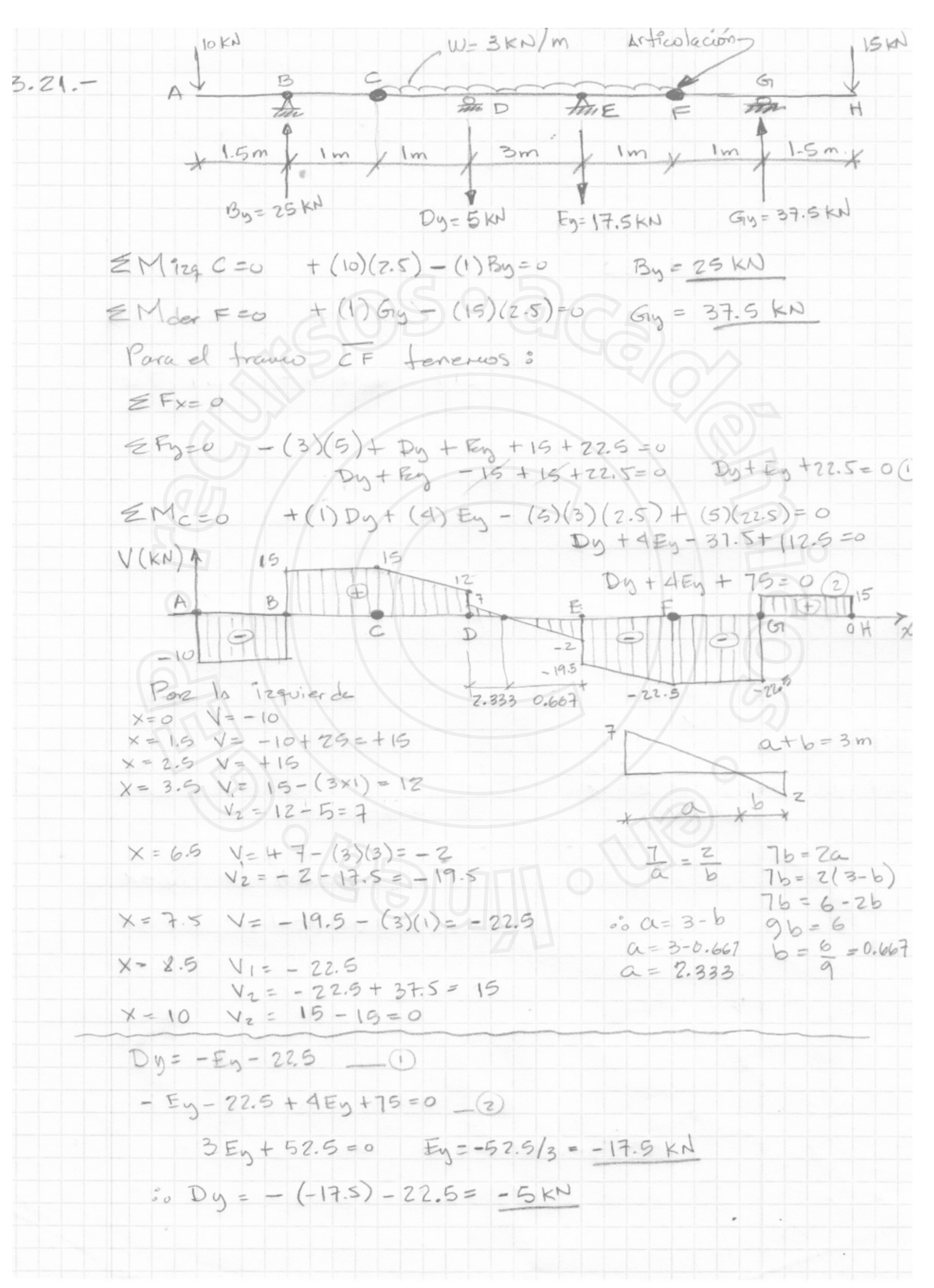
M (kips - ft)
222.46
0.00
-42.00
-42.00
-41.98
0.00
3.89 ft
8.19

3.19


w= 45 lb/in
76 lb
A
Ax=0
Ay = 6,567.50 lb
B
By = 1,068.50 lb
0 in
72 in
168 in
228 in
V (lb)
3,327.50
0.00
76.00
76.00
0.00
-992.50
0.00
-3,240.00
0.00
6,385.07
0.00
-4,560.00
M (lb - in)
-116,640.00
129.1in
145.94in
162.79in
X
X

3.20


w= 45 lb/in
134 lb
A
B
Ay = 6,328.47 lb
By = 254.47 lb
M = 45 lb-in
0 in
72 in
132 in
156 in
168 in
216 in
V (lb)
3,088.47
0.00
388.47
388.
254.47
0.00
-3,240.00
X
M (lb - in)
0.00
45.00
45.00
-3,008.63
0.00
-12,331.88
167.82 in
-116,640.00
X



$\Sigma M_{izq\,C} = 0 \quad +(10)(2.5) - (1)B_y = 0 \qquad B_y = 25\ kN$

$\Sigma M_{der\,F} = 0 \quad +(1)G_y - (15)(2.5) = 0 \qquad G_y = 37.5\ kN$

Para el tramo $\overline{CF}$ tenemos:

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad -(3)(5) + D_y + E_y + 15 + 22.5 = 0$

$D_y + E_y - 15 + 15 + 22.5 = 0 \qquad D_y + E_y + 22.5 = 0 \ (1)$

$\Sigma M_c = 0 \quad +(1)D_y + (4)E_y - (5)(3)(2.5) + (5)(22.5) = 0$

$D_y + 4E_y - 37.5 + 112.5 = 0$

$D_y + 4E_y + 75 = 0 \ (2)$

Por la izquierda

$x = 0 \quad V = -10$

$x = 1.5 \quad V = -10 + 25 = +15$

$x = 2.5 \quad V = +15$

$x = 3.5 \quad V_1 = 15 - (3\times1) = 12$

$V_2 = 12 - 5 = 7$

$x = 6.5 \quad V_1 = +7 - (3)(3) = -2$

$V_2 = -2 - 17.5 = -19.5$

$x = 7.5 \quad V = -19.5 - (3)(1) = -22.5$

$x = 8.5 \quad V_1 = -22.5$

$V_2 = -22.5 + 37.5 = 15$

$x = 10 \quad V_2 = 15 - 15 = 0$

$a + b = 3\ m$

$\frac{7}{a} = \frac{2}{b} \qquad 7b = 2a$

$7b = 2(3-b)$

$7b = 6 - 2b$

$\therefore a = 3 - b \qquad 9b = 6$

$a = 3 - 0.667 \qquad b = \frac{6}{9} = 0.667$

$a = 2.333$

$D_y = -E_y - 22.5 \ __ (1)$

$-E_y - 22.5 + 4E_y + 75 = 0 \ __ (2)$

$3E_y + 52.5 = 0 \qquad E_y = -52.5/3 = -17.5\ kN$

$\therefore D_y = -(-17.5) - 22.5 = -5\ kN$



3.21.– continuación

$A_1 = -(10)(1.5) = -15$

$A_2 = (15)(1) = 15$

$A_3 = \left(\frac{15+12}{2}\right)(1) = 13.5$

$A_4 = \frac{(2.333)(7)}{2} = 8.1655$

$A_5 = \frac{(0.667)(-2)}{2} = -0.6670$

$A_6 = -\left(\frac{19.5+22.5}{2}\right)(1) = -21$

$A_7 = -(22.5)(1) = -22.5$

$A_8 = +(15)(1.5) = +22.5$

$x = 0 \quad M = 0$

$x = 1.5 \quad M = -15$

$x = 2.5 \quad M = -15 + 15 = 0$

$x = 3.5 \quad M = 0 + 13.5 = 13.5$

$x = 5.833 \quad M = 13.5 + 8.1655 = 21.6655$

$x = 6.5 \quad M = 21.6655 - 0.6670 = 20.9985$

$x = 7.5 \quad M = 20.9985 - 21 = 0$

$x = 8.5 \quad M = -22.5$

$x = 10 \quad M = -22.5 + 22.5 = 0$

M(kN-m)
21.6655
13.5
21
0 A
B
C
D
E
F
G
H
x
-15
-22.5

Nota: como puede observarse, en los puntos donde se tiene articulación "C" y "F" el momento vale cero.



3.22.—

$w = 2\ \text{kN/m}$ 15 kN $w = 2\ \text{kN/m}$

A, B, C, D, E, F, G, H

1 m, 1 m, 1.5 m, 1 m, 1 m, 1.5 m, 2 m, 2 m

$B_y = 4\ \text{kN}$ $D_y = 7.5\ \text{kN}$ $E_y = 7.5\ \text{kN}$ $G_y = 8\ \text{kN}$

$\sum M_{izq\ C} = 0 \qquad -(1)B_y + (2)(2)(1) = 0 \qquad B_y = 4\ \text{kN}$

$\sum M_{der\ F} = 0 \qquad +2G_y - (2)(4)(2) = 0 \qquad G_y = \frac{16}{2} = 8\ \text{kN}$

Para el tramo C – F tenemos:

$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0 \qquad D_y - 15 + E_y = 0$ —— (1)

$\sum M_C = 0 \qquad +1.5D_y - (15)(2.5) + 3.5E_y = 0$

$1.5D_y - 37.5 + 3.5E_y = 0$ —— (2)

$D_y = 15 - E_y \qquad 1.5[15 - E_y] - 37.5 + 3.5E_y = 0$

$22.5 - 1.5E_y - 37.5 + 3.5E_y = 0$

$-15 + 2E_y = 0$

$\therefore \quad E_y = 15/2 = 7.5\ \text{kN}$

$D_y = 15 - 7.5 = 7.5\ \text{kN}$

V (kN): 0, −2, 2, 0, +7.5, −7.5, 0, −4, 4, 0 — puntos A, B, C, D, E, F, G, H

M (kN-m): 0, −1, 0, 0, 7.5, 0, 0, −4, 0 — puntos A, B, C, D, E, F, G, H



3.22.- continuación

$x = 0 \quad V = 0 \quad M = 0$

$x = 1m \quad V = -2kN \quad M = -1\ kN\text{-}m$

$V = -2 + 4 = 2kN$

$x = 2m \quad V = 2 - 2 = 0 \quad M = -1 + 1 = 0$

$x = 3.5m \quad V = D_y = 7.5kN \quad M = 0$

$x = 4.5m \quad V = 7.5 \quad M = (7.5)(1) = 7.5\ kN\text{-}m$

$V = 7.5 - 15 = -7.5$

$x = 5.5m \quad V = -7.5 \quad M = (7.5)(2) - (15)(1) = 0\ kN\text{-}m$

$V = -7.5 + 7.5 = 0$

$x = 7.0m \quad V = 0 \quad M = 0$

$x = 9.0m \quad V = (-2)(2) = -4\ kN\text{-}m \quad M = (-2)(2)(1) = -4\ kN\text{-}m$

$V = -4 + 8 = 4\ kN\text{-}m$

$x = 11.0m \quad V = 4 - (2)(2) = 0 \quad M = 0$

$$A_1 = \frac{(1)(-2)}{2} = -1$$

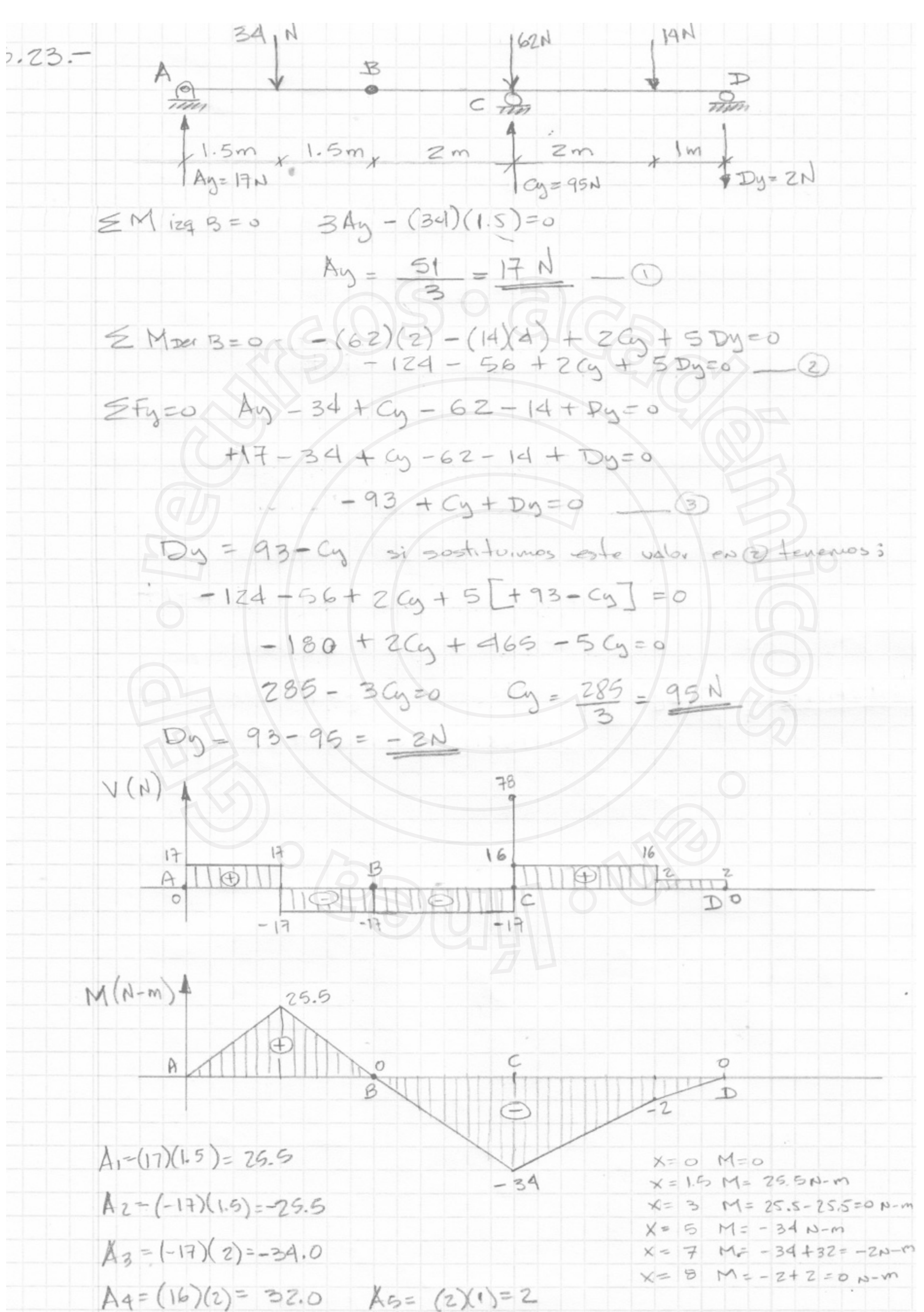
$$A_2 = \frac{(2)(1)}{2} = 1$$

$$A_3 = (7.5)(1) = 7.5$$

$$A_4 = (-7.5)(1) = -7.5$$

$$A_5 = \frac{(2)(-4)}{2} = -4$$

$$A_6 = \frac{(2)(4)}{2} = 4$$



2.23.–

$$\sum M_{izq\,B} = 0 \qquad 3A_y - (34)(1.5) = 0$$

$$A_y = \frac{51}{3} = 17\ \text{N} \quad \text{—— (1)}$$

$$\sum M_{Der\,B} = 0 \qquad -(62)(2) - (14)(4) + 2C_y + 5D_y = 0$$

$$-124 - 56 + 2C_y + 5D_y = 0 \quad \text{—— (2)}$$

$$\sum F_y = 0 \qquad A_y - 34 + C_y - 62 - 14 + D_y = 0$$

$$+17 - 34 + C_y - 62 - 14 + D_y = 0$$

$$-93 + C_y + D_y = 0 \quad \text{—— (3)}$$

$D_y = 93 - C_y$ si sustituimos este valor en (2) tenemos:

$$-124 - 56 + 2C_y + 5[+93 - C_y] = 0$$

$$-180 + 2C_y + 465 - 5C_y = 0$$

$$285 - 3C_y = 0 \qquad C_y = \frac{285}{3} = 95\ \text{N}$$

$$D_y = 93 - 95 = -2\ \text{N}$$

V (N)

M (N-m)

$A_1 = (17)(1.5) = 25.5$

$A_2 = (-17)(1.5) = -25.5$

$A_3 = (-17)(2) = -34.0$

$A_4 = (16)(2) = 32.0$ $\quad A_5 = (2)(1) = 2$

$x = 0 \quad M = 0$

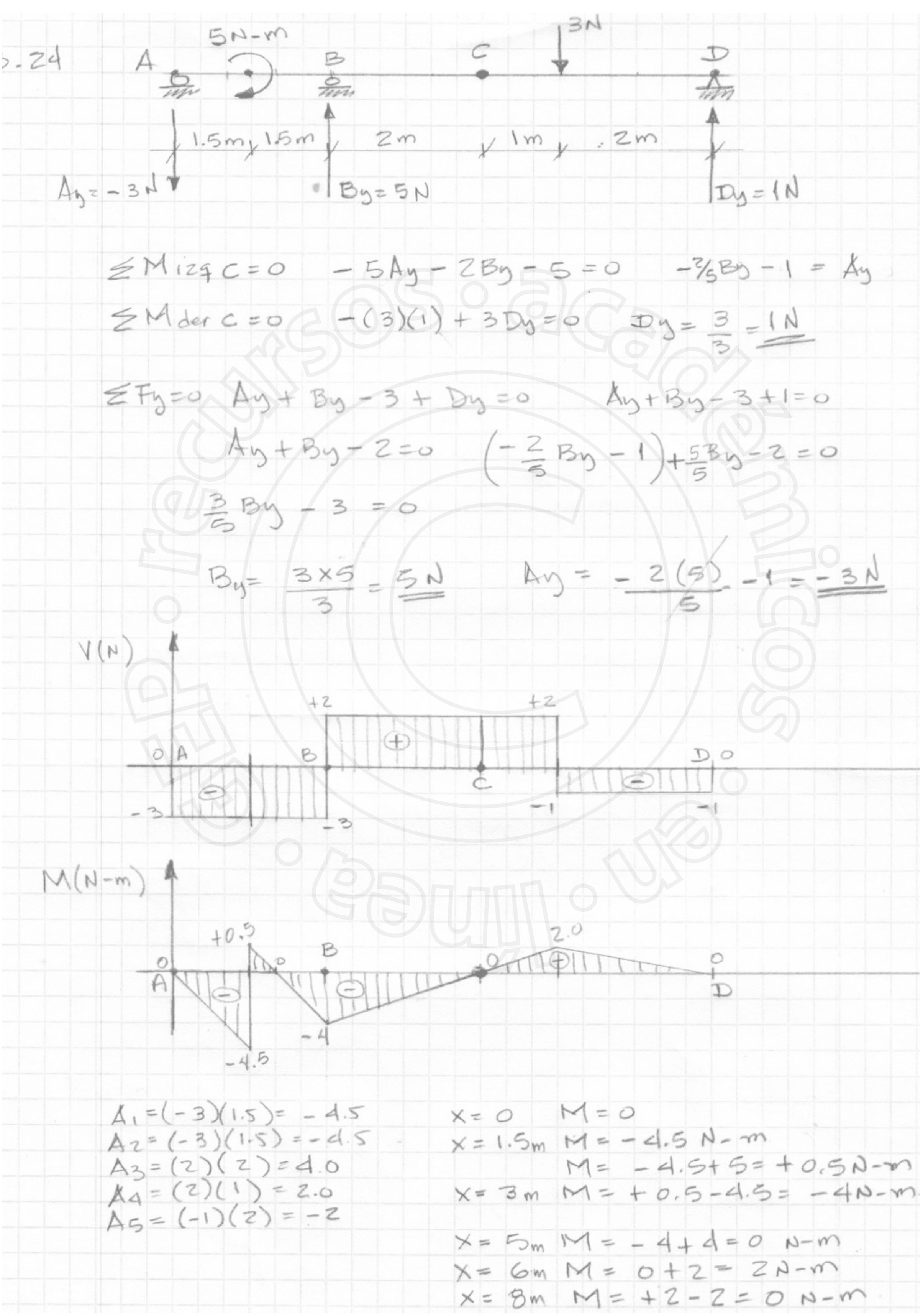
$x = 1.5 \quad M = 25.5$ N-m

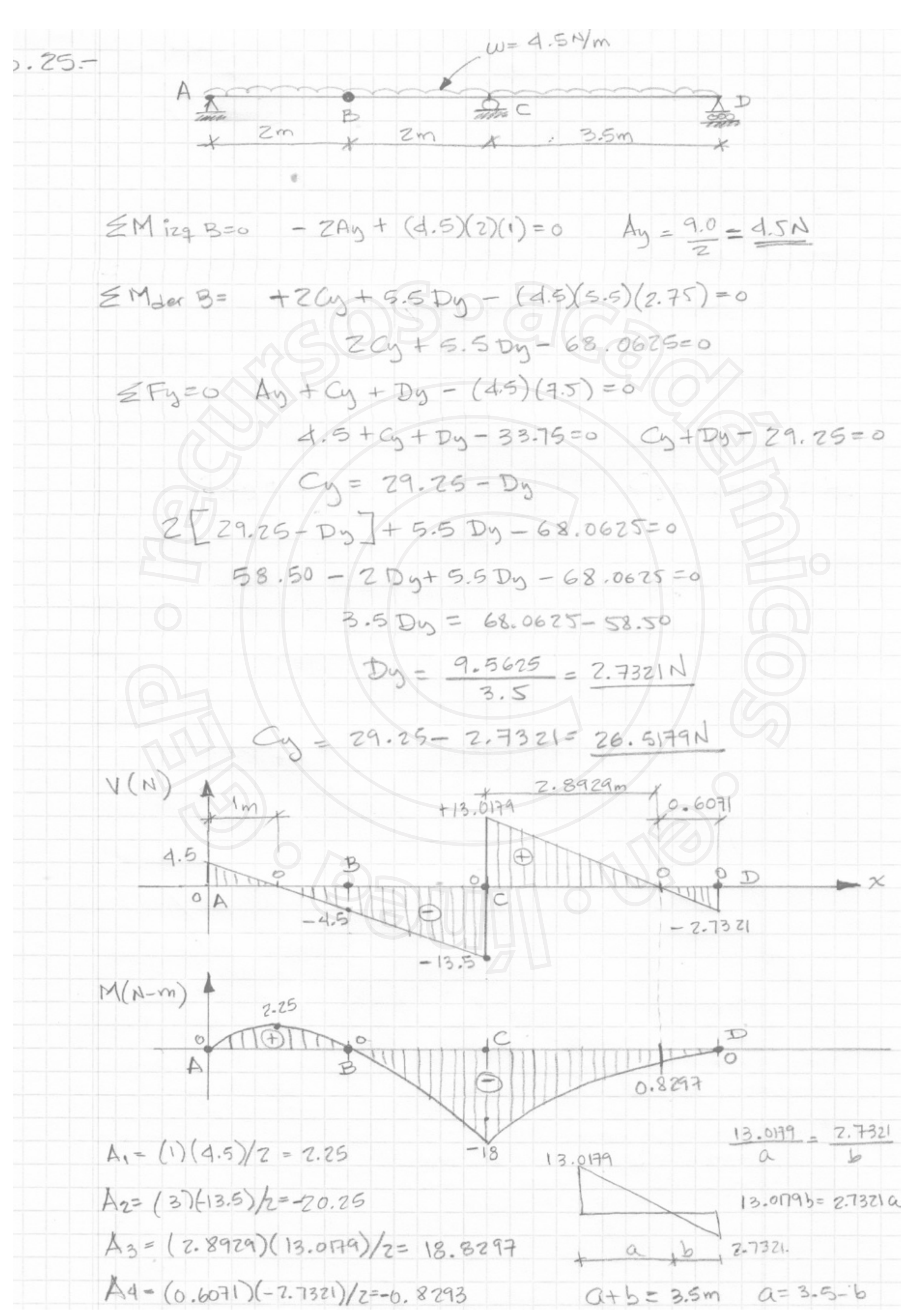
$x = 3 \quad M = 25.5 - 25.5 = 0$ N-m

$x = 5 \quad M = -34$ N-m

$x = 7 \quad M = -34 + 32 = -2$ N-m

$x = 8 \quad M = -2 + 2 = 0$ N-m


5N-m
3N
A
B
C
D
1.5m
1.5m
2m
1m
2m
Ay = -3N
By = 5N
Dy = 1N
ΣM izq C = 0   -5Ay - 2By - 5 = 0   -2/5 By - 1 = Ay
ΣM der C = 0   -(3)(1) + 3Dy = 0   Dy = 3/3 = 1N
ΣFy = 0   Ay + By - 3 + Dy = 0   Ay + By - 3 + 1 = 0
Ay + By - 2 = 0   (-2/5 By - 1) + 5/5 By - 2 = 0
3/5 By - 3 = 0
By = 3×5/3 = 5N   Ay = -2(5)/5 - 1 = -3N
V(N)
+2
+2
0
-3
-3
-1
-1
M(N-m)
+0.5
-4.5
-4
2.0
A1 = (-3)(1.5) = -4.5
A2 = (-3)(1.5) = -4.5
A3 = (2)(2) = 4.0
A4 = (2)(1) = 2.0
A5 = (-1)(2) = -2
x = 0   M = 0
x = 1.5m   M = -4.5 N-m
M = -4.5 + 5 = +0.5 N-m
x = 3m   M = +0.5 - 4.5 = -4 N-m
x = 5m   M = -4 + 4 = 0 N-m
x = 6m   M = 0 + 2 = 2 N-m
x = 8m   M = +2 - 2 = 0 N-m


.25.-
w= 4.5 N/m
A
B
C
D
2m
2m
3.5m
ΣM izq B=0 − 2Ay + (4.5)(2)(1) = 0 Ay = 9.0/2 = 4.5N
ΣM der B= +2Cy + 5.5 Dy − (4.5)(5.5)(2.75) = 0
2Cy + 5.5 Dy − 68.0625 = 0
ΣFy=0 Ay + Cy + Dy − (4.5)(7.5) = 0
4.5 + Cy + Dy − 33.75 = 0 Cy + Dy − 29.25 = 0
Cy = 29.25 − Dy
2[29.25 − Dy] + 5.5 Dy − 68.0625 = 0
58.50 − 2Dy + 5.5 Dy − 68.0625 = 0
3.5 Dy = 68.0625 − 58.50
Dy = 9.5625/3.5 = 2.7321 N
Cy = 29.25 − 2.7321 = 26.5179N
V(N)
1m
2.8929m
+13.0179
0.6071
4.5
0
A
B
−4.5
−13.5
C
D
x
−2.7321
M(N-m)
2.25
0
A
B
C
D
0
0.8297
−18
A1 = (1)(4.5)/2 = 2.25
A2 = (3)(−13.5)/2 = −20.25
A3 = (2.8929)(13.0179)/2 = 18.8297
A4 = (0.6071)(−2.7321)/2 = −0.8293
13.0179
2.7321
a
b
a+b = 3.5m
13.0179/a = 2.7321/b
13.0179b = 2.7321a
a = 3.5 − b

3.25 continuación

$13.0179\, b = 2.7321\,(3.5 - b)$

$13.0179\, b = 9.5624 - 2.7321\, b$

$13.0179\, b + 2.7321\, b = 9.5624$

$15.75\, b = 9.5624$

$b = \dfrac{9.5624}{15.75} = 0.6071\ m \qquad a = 3.5 - 0.6071 = 2.8929\ m$

$x = 0\ m \qquad M = 0$

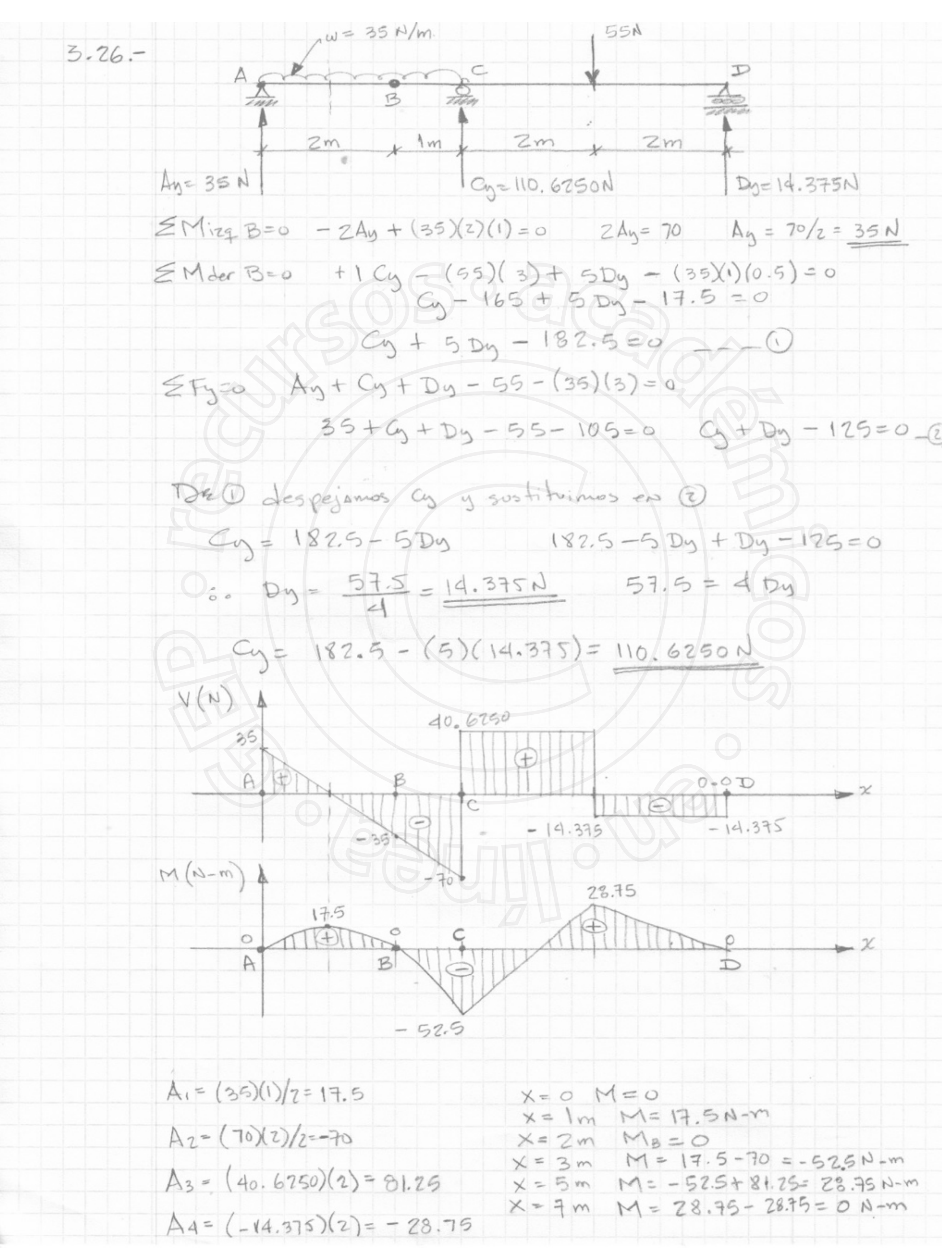
$x = 1\ m \qquad M = 2.25\ N\text{-}m$

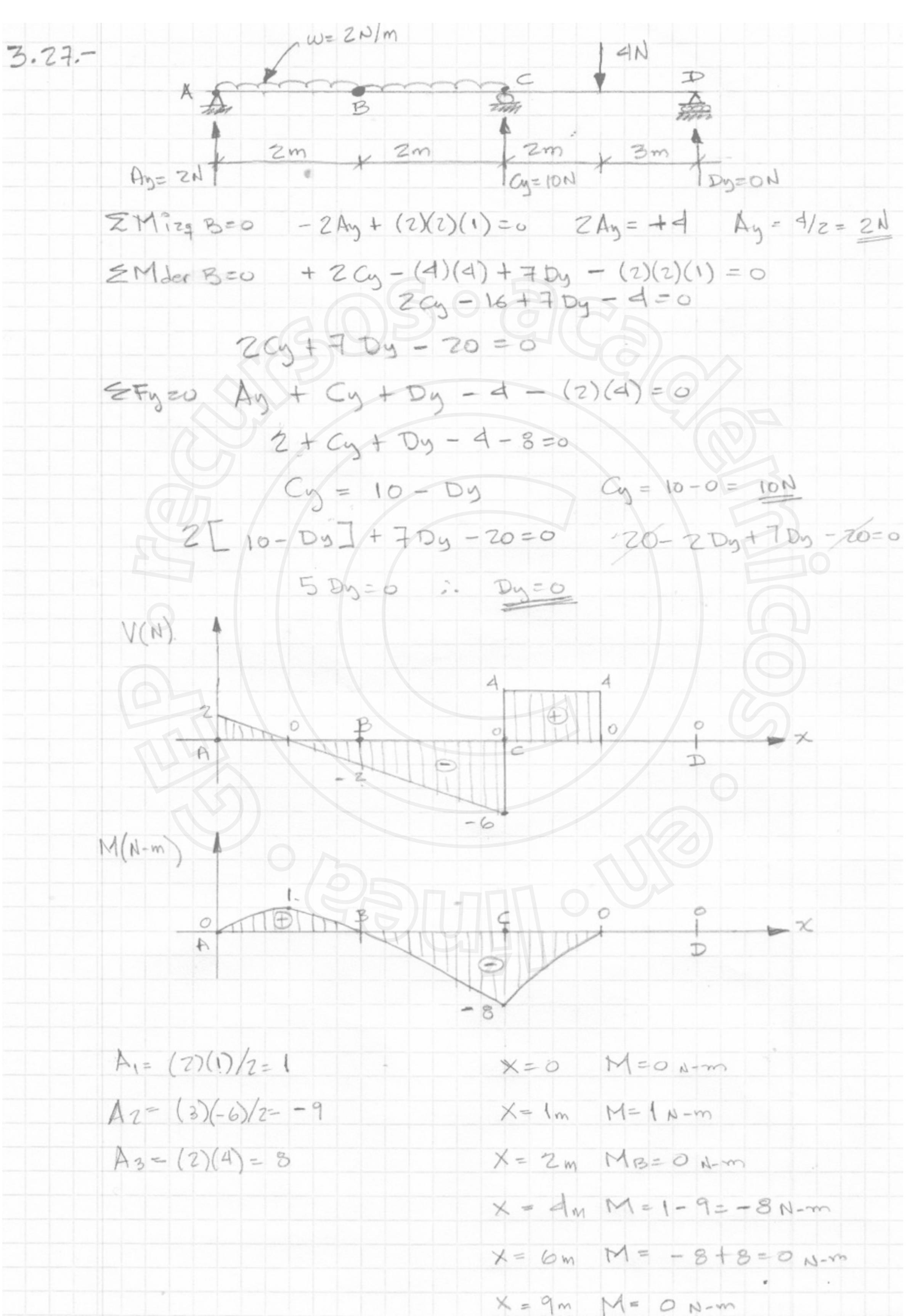
$x = 2\ m \qquad M_B = 0$

$x = 4\ m \qquad M = 2.25 - 20.25 = -18\ N\text{-}m$

$x = 6.8929\ m \qquad M = -18 + 18.8297 = 0.8297\ N\text{-}m$

$x = 7.5\ m \qquad M = 0.8297 - 0.8293 = 0\ N\text{-}m$


3.26.-
w = 35 N/m
55N
A
B
C
D
2m
1m
2m
2m
Ay= 35 N
Cy= 110.6250N
Dy= 14.375N
ΣMizq B=0   −2Ay + (35)(2)(1) = 0   2Ay = 70   Ay = 70/2 = 35 N
ΣMder B=0   +1 Cy − (55)(3) + 5Dy − (35)(1)(0.5) = 0
Cy − 165 + 5Dy − 17.5 = 0
Cy + 5Dy − 182.5 = 0 —— ①
ΣFy=0   Ay + Cy + Dy − 55 − (35)(3) = 0
35 + Cy + Dy − 55 − 105 = 0   Cy + Dy − 125 = 0 —②
De ① despejamos Cy y sustituimos en ②
Cy = 182.5 − 5Dy   182.5 − 5Dy + Dy − 125 = 0
∴ Dy = 57.5/4 = 14.375N   57.5 = 4Dy
Cy = 182.5 − (5)(14.375) = 110.6250 N
V(N)
35
40.6250
0.0
−35
−70
−14.375
−14.375
M(N-m)
17.5
28.75
0
−52.5
A1 = (35)(1)/2 = 17.5
A2 = (70)(2)/2 = −70
A3 = (40.6250)(2) = 81.25
A4 = (−14.375)(2) = −28.75
x = 0   M = 0
x = 1m   M = 17.5 N-m
x = 2m   MB = 0
x = 3m   M = 17.5 − 70 = −52.5 N-m
x = 5m   M = −52.5 + 81.25 = 28.75 N-m
x = 7m   M = 28.75 − 28.75 = 0 N-m



$\Sigma M_{izq\,B}=0 \quad -2A_y+(2)(2)(1)=0 \quad 2A_y=+4 \quad A_y=4/2=2N$

$\Sigma M_{der\,B}=0 \quad +2C_y-(4)(4)+7D_y-(2)(2)(1)=0$

$2C_y-16+7D_y-4=0$

$2C_y+7D_y-20=0$

$\Sigma F_y=0 \quad A_y+C_y+D_y-4-(2)(4)=0$

$2+C_y+D_y-4-8=0$

$C_y=10-D_y \qquad C_y=10-0=10N$

$2[10-D_y]+7D_y-20=0 \qquad 20-2D_y+7D_y-20=0$

$5D_y=0 \quad \therefore \quad D_y=0$

$A_1=(2)(1)/2=1$

$A_2=(3)(-6)/2=-9$

$A_3=(2)(4)=8$

$x=0 \quad M=0\ N\text{-}m$

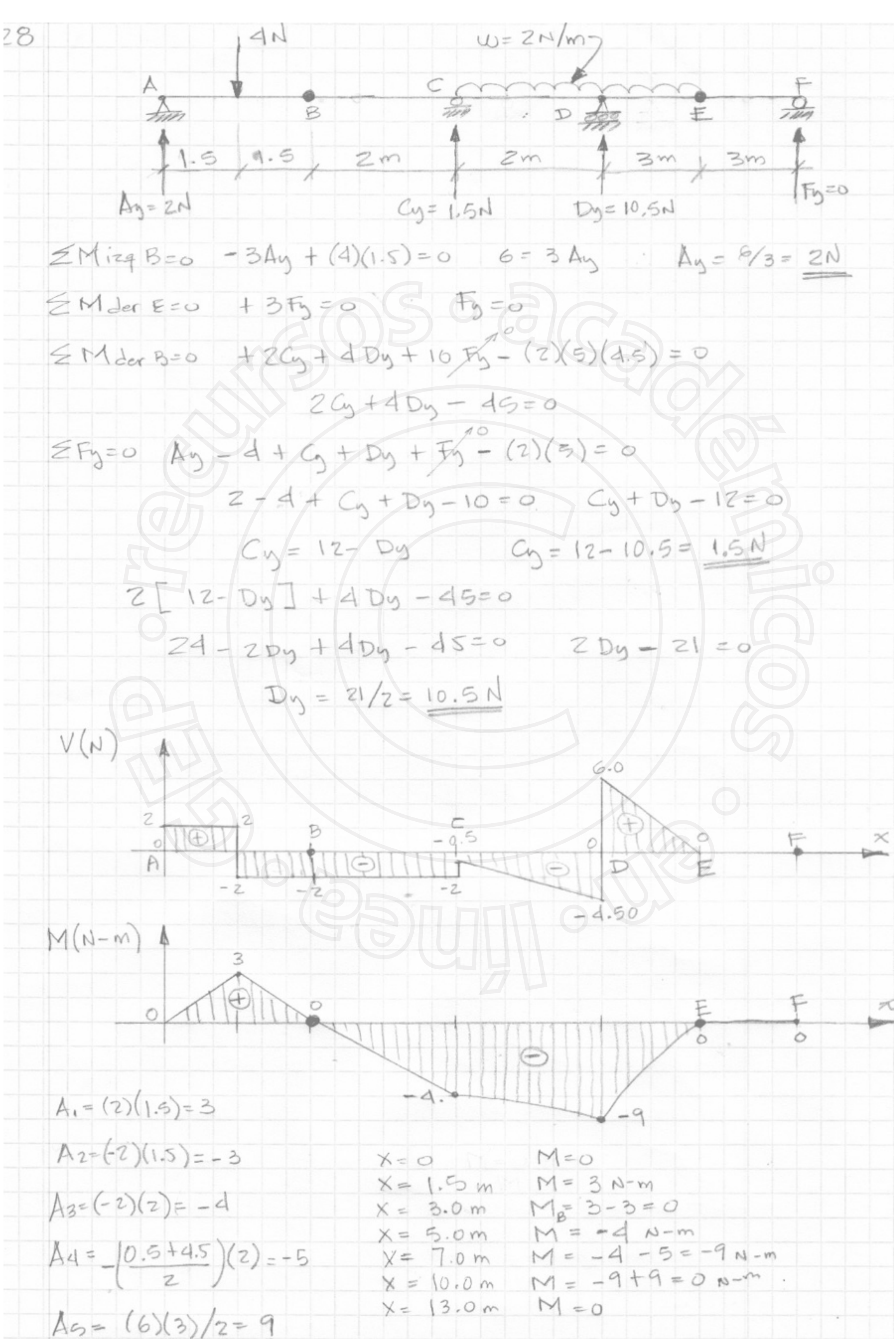
$x=1m \quad M=1\ N\text{-}m$

$x=2m \quad M_B=0\ N\text{-}m$

$x=4m \quad M=1-9=-8\ N\text{-}m$

$x=6m \quad M=-8+8=0\ N\text{-}m$

$x=9m \quad M=0\ N\text{-}m$


28
4N
w = 2N/m
A
B
C
D
E
F
1.5
1.5
2m
2m
3m
3m
Ay = 2N
Cy = 1.5N
Dy = 10.5N
Fy = 0
ΣM izq B = 0   −3Ay + (4)(1.5) = 0   6 = 3 Ay   Ay = 6/3 = 2N
ΣM der E = 0   + 3Fy = 0   Fy = 0
ΣM der B = 0   + 2Cy + 4 Dy + 10 Fy − (2)(5)(4.5) = 0
2Cy + 4Dy − 45 = 0
ΣFy = 0   Ay − 4 + Cy + Dy + Fy − (2)(5) = 0
2 − 4 + Cy + Dy − 10 = 0   Cy + Dy − 12 = 0
Cy = 12 − Dy   Cy = 12 − 10.5 = 1.5 N
2[12 − Dy] + 4 Dy − 45 = 0
24 − 2Dy + 4Dy − 45 = 0   2 Dy − 21 = 0
Dy = 21/2 = 10.5 N
V(N)
6.0
2
2
0
−2
−2
−2
−0.5
−4.50
x
M(N−m)
3
0
0
−4.
−9
E
F
0
0
x
A1 = (2)(1.5) = 3
A2 = (−2)(1.5) = −3
A3 = (−2)(2) = −4
A4 = −((0.5+4.5)/2)(2) = −5
A5 = (6)(3)/2 = 9
X = 0   M = 0
X = 1.5 m   M = 3 N−m
X = 3.0 m   MB = 3 − 3 = 0
X = 5.0 m   M = −4 N−m
X = 7.0 m   M = −4 − 5 = −9 N−m
X = 10.0 m   M = −9 + 9 = 0 N−m
X = 13.0 m   M = 0



3.29.—

1 KN; w = 2 KN/m; A, B, C; Ax; MA; 4 m; 2 m; Ay = 11 KN; Cy = 2 KN

$\Sigma M_{der}\ B = 0 \quad 2C_y - (2)(2)(1) = 0 \quad 2C_y = 4 \quad C_y = 4/2 = \underline{2\ KN}$

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 1 + C_y - (2)(6) = 0 \quad A_y = +1 - 2 + 12 = \underline{11\ KN}$

$\Sigma F_x = 0 \quad A_x = 0$

$\Sigma M_{izq}\ B = 0 \quad +M_a - (11)(4) + (2)(4)(2) = 0$

$M_a - 44 + 16 = 0 \quad M_a = 44 - 16 = \underline{28\ KN\text{-}m}$

V(KN): 11, 3, 2, 0, −2; A, B, C; x; (+)

M(KN-m): 0, −28, 1; A, B, C; x; (−)

$A_1 = \left(\frac{11+3}{2}\right)(4) = 28$

$A_2 = \frac{(1)(2)}{2} = 1$

$A_3 = \frac{(-2)(1)}{2} = -1$

$x = 0 \quad M = M_A = -28\ KN\text{-}m$

$x = 4m \quad M = -28 + 28 = 0$

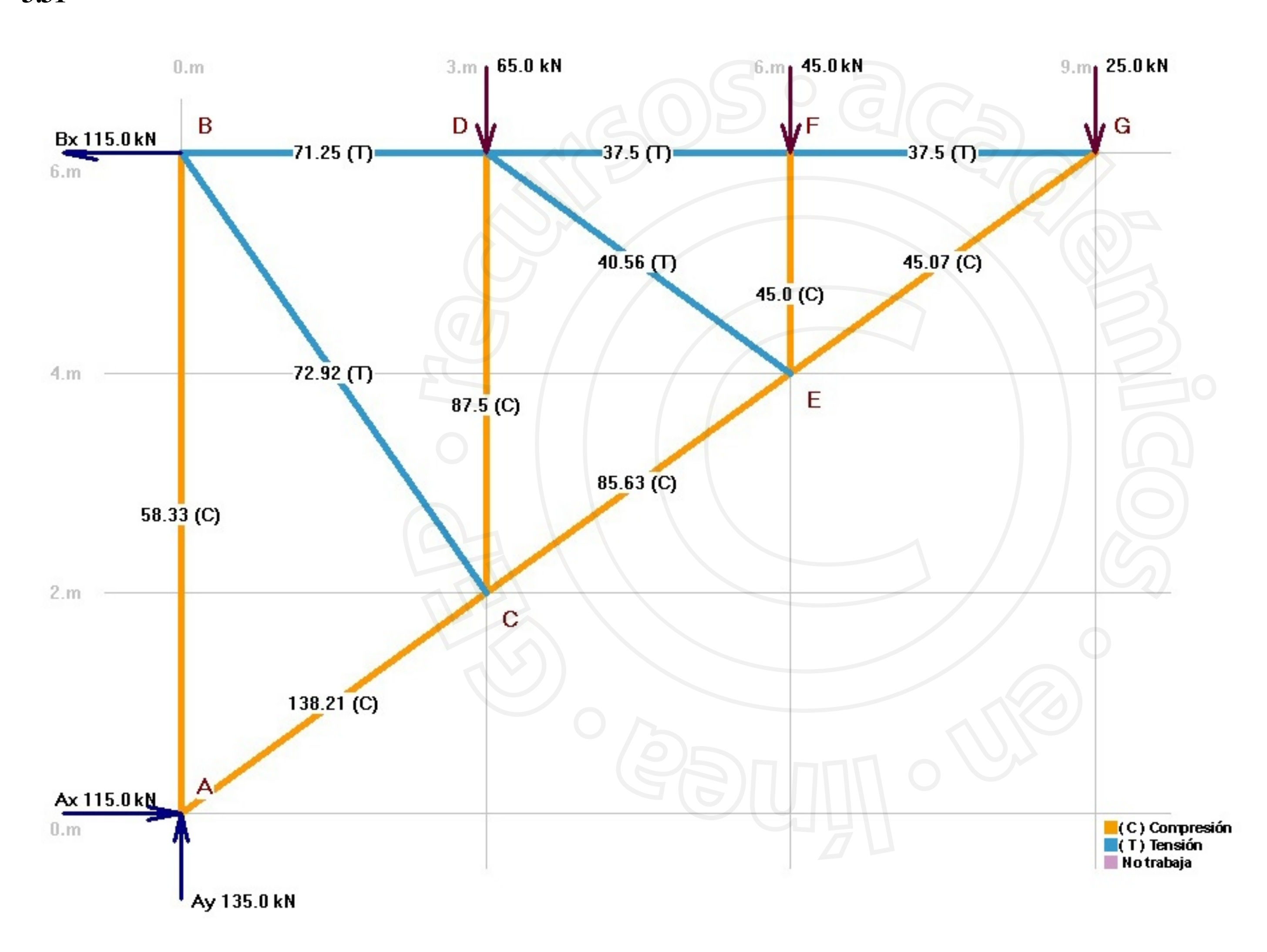
$x = 5m \quad M = 1\ KN\text{-}m$

$x = 6m \quad M = 1 - 1 = 0$

3.30

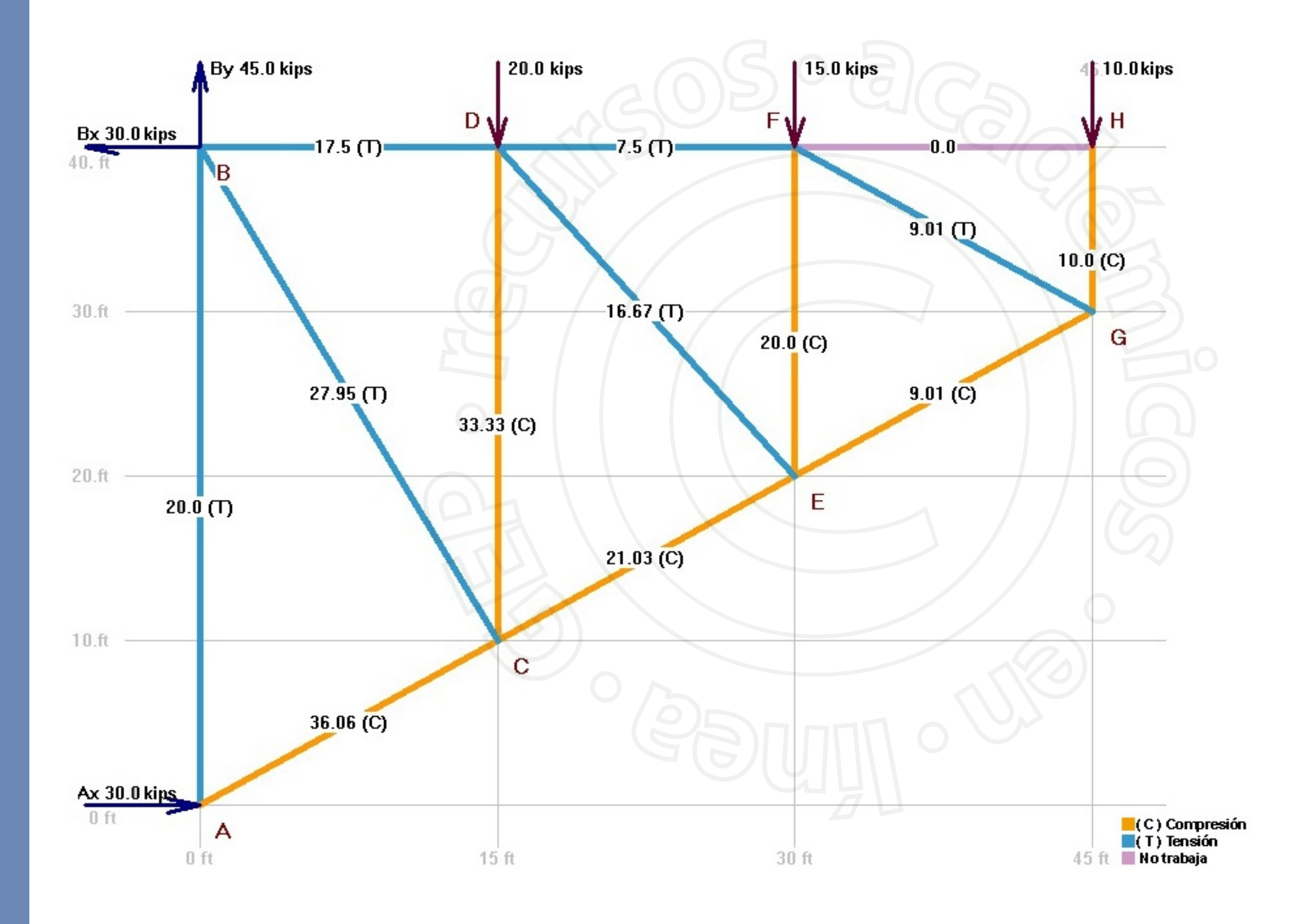
0.m
By 275.0 N
4.m
150.0 N
8.m
125.0 N
D
E
Bx 354.17N
6.m
166.67 (T)
166.67 (T)
B
234.37 (T)
150.0 (C)
208.33 (C)
175.0 N
3.m
C
134.37 (T)
223.96 (C)
Ax 179.17N
0.m
A
(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja

3.31

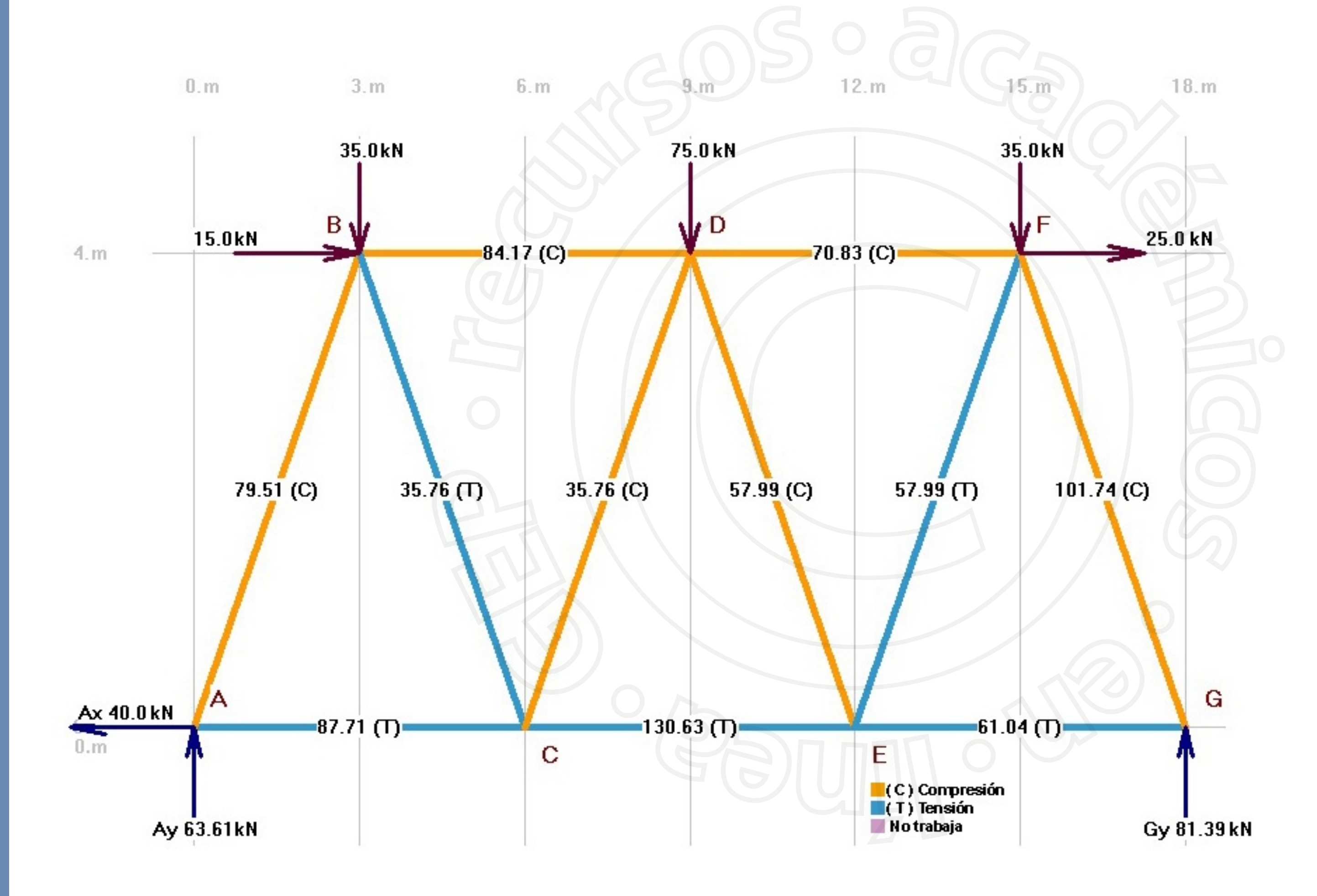

0.m
3.m
65.0 kN
6.m
45.0 kN
9.m
25.0 kN
Bx 115.0 kN
B
D
F
G
71.25 (T)
37.5 (T)
37.5 (T)
40.56 (T)
45.07 (C)
45.0 (C)
72.92 (T)
87.5 (C)
E
85.63 (C)
58.33 (C)
C
138.21 (C)
A
Ax 115.0 kN
Ay 135.0 kN
6.m
4.m
2.m
0.m
(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja

GRUPO EDITORIAL PATRIA

3.32



3.33


0.m
3.m
6.m
9.m
12.m
15.m
18.m
4.m
0.m
35.0kN
75.0kN
35.0kN
15.0kN
25.0 kN
B
D
F
A
C
E
G
84.17 (C)
70.83 (C)
79.51 (C)
35.76 (T)
35.76 (C)
57.99 (C)
57.99 (T)
101.74 (C)
87.71 (T)
130.63 (T)
61.04 (T)
Ax 40.0 kN
Ay 63.61kN
Gy 81.39 kN
(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja

3.34

0.m 4.m 8.m 12.m 16.m
180.0N
E
125.0N 125.0N
314.39 (C) 314.39 (C)
C G
27.5 (C)
358.33 (C) 22.92 (T) 22.92 (T) 358.33 (C)
0.0 0.0
(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja
A H
Ax 0.0 N
286.67 (T) 286.67 (T) 286.67 (T) 286.67 (T)
B D F
Ay 215.0N Hy 215.0N

3.35

0.m 3.m 6.m 9.m 12.m 15.m

75.0 N 100.0 N 150.0 N 100.0 N 75.0 N Ky 200.0 N

50.0 N B D F H J Kx 50.0 N

50.0 (C) 185.0 (C) 260.0 (C) 245.0 (C) 170.0 (C)

K

262.39 (C) 145.77 (C) 29.15 (T) 145.77 (T) 233.24 (T)

75.0 (C) 125.0 (T) 25.0 (C) 125.0 (C) 200.0 (C)

A

0.m 135.0 (T) 210.0 (T) 195.0 (T) 120.0 (T)

C E G I

Ay 300.0 N

(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja



3.36

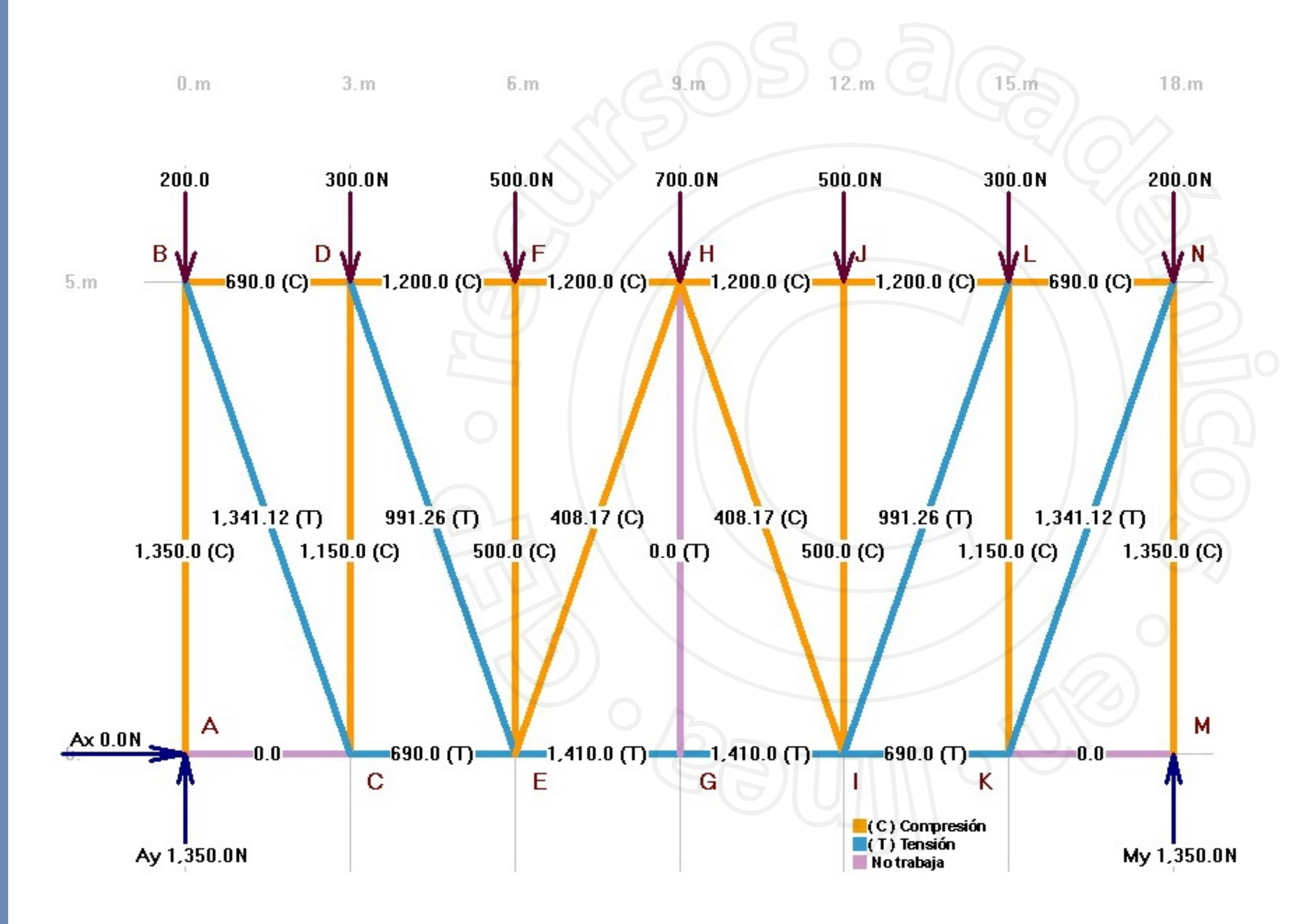
0.ft 10.ft 20.ft 30.ft 40.ft 50.ft 60.ft

30.ft 20.ft 10.ft

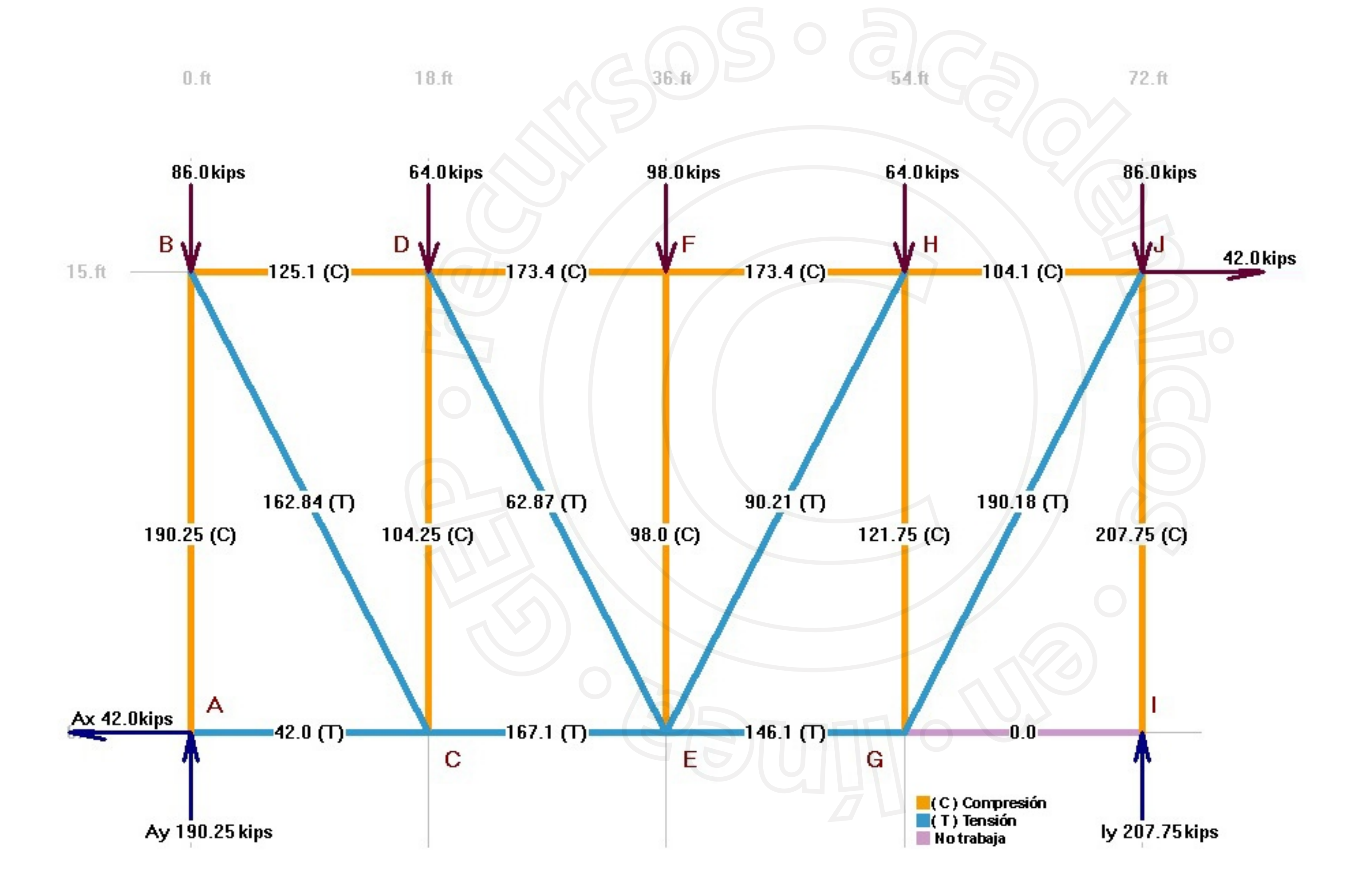
250.0 kips — G
125.0 kips — E; 341.77 (C)
341.77 (C); 125.0 kips — I
100.0 kips — C; 424.26 (C)
424.26 (C); 100.0 kips — K
233.33 (T)
130.44 (C) 130.44 (C)
50.0 (T) 50.0 (T)
494.97 (C) 0.0 70.71 (C) 70.71 (C) 0.0 494.97 (C)
Ax 0.0 kips — A; L
350.0 (T) 350.0 (T) 300.0 (T) 300.0 (T) 350.0 (T) 350.0 (T)
B D F H J
Ay 350.0 kips; Ly 350.0 kips

(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja

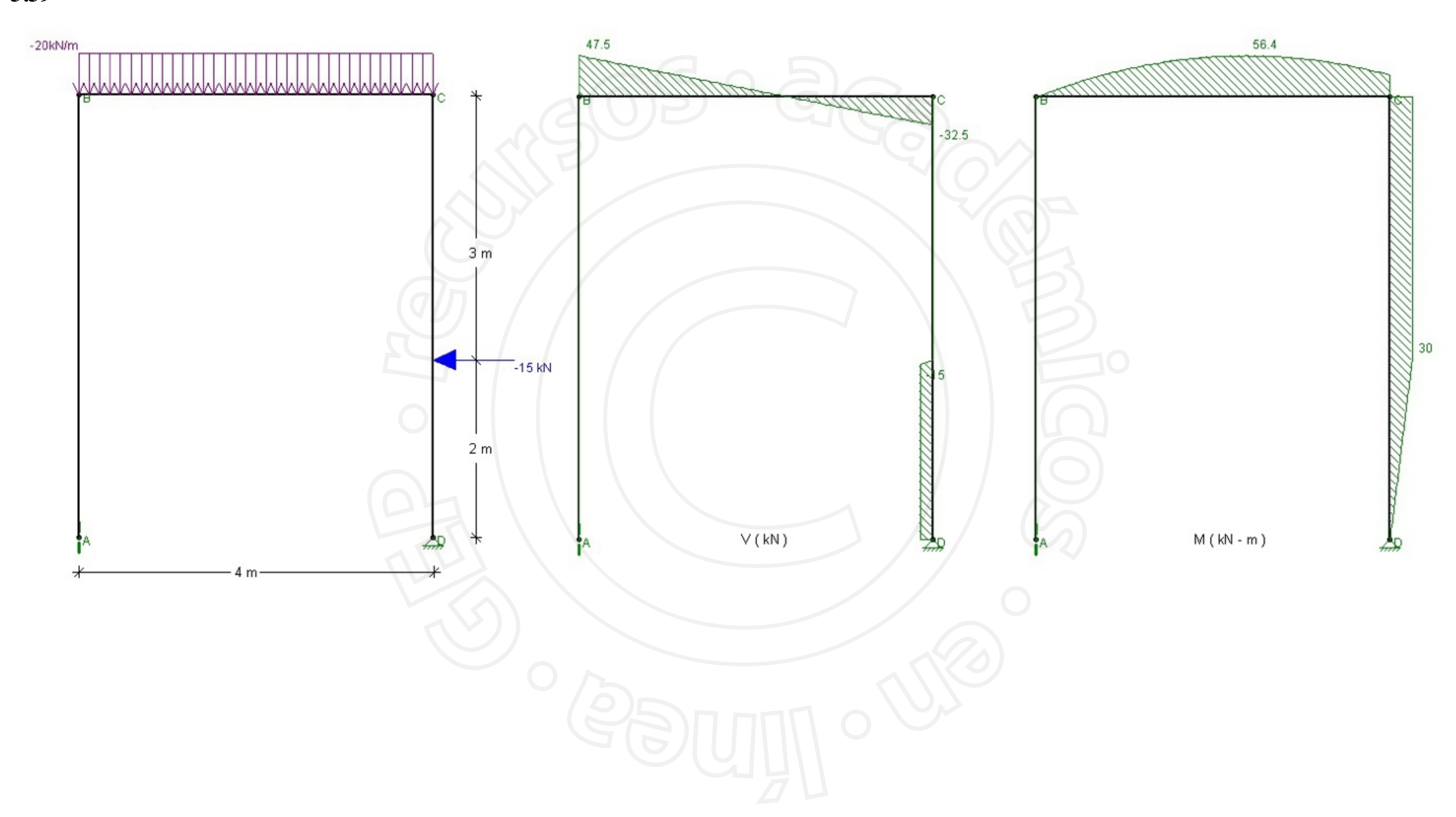
3.37


0.m
3.m
6.m
9.m
12.m
15.m
18.m
5.m
200.0
300.0N
500.0N
700.0N
500.0N
300.0N
200.0N
B
D
F
H
J
L
N
690.0 (C)
1,200.0 (C)
1,200.0 (C)
1,200.0 (C)
1,200.0 (C)
690.0 (C)
1,341.12 (T)
991.26 (T)
408.17 (C)
408.17 (C)
991.26 (T)
1,341.12 (T)
1,350.0 (C)
1,150.0 (C)
500.0 (C)
0.0 (T)
500.0 (C)
1,150.0 (C)
1,350.0 (C)
Ax 0.0N
A
M
0.0
690.0 (T)
1,410.0 (T)
1,410.0 (T)
690.0 (T)
0.0
C
E
G
I
K
Ay 1,350.0N
My 1,350.0N
(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja

3.38


0.ft
18.ft
36.ft
54.ft
72.ft
86.0kips
64.0kips
98.0kips
64.0kips
86.0kips
B
D
F
H
J
42.0kips
15.ft
125.1 (C)
173.4 (C)
173.4 (C)
104.1 (C)
162.84 (T)
62.87 (T)
90.21 (T)
190.18 (T)
190.25 (C)
104.25 (C)
98.0 (C)
121.75 (C)
207.75 (C)
Ax 42.0kips
A
42.0 (T)
167.1 (T)
146.1 (T)
0.0
I
C
E
G
(C) Compresión
(T) Tensión
No trabaja
Ay 190.25 kips
Iy 207.75kips

3.39





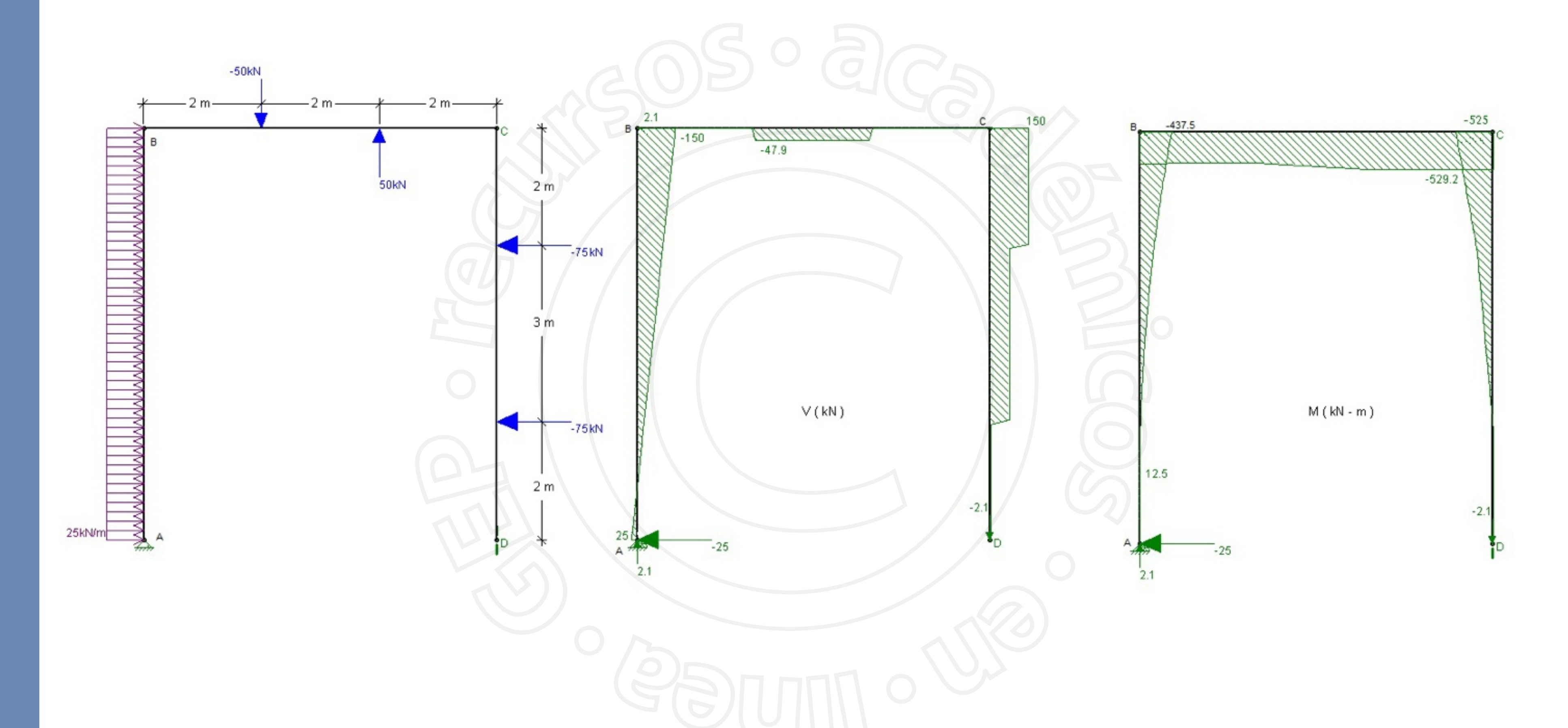
3.40

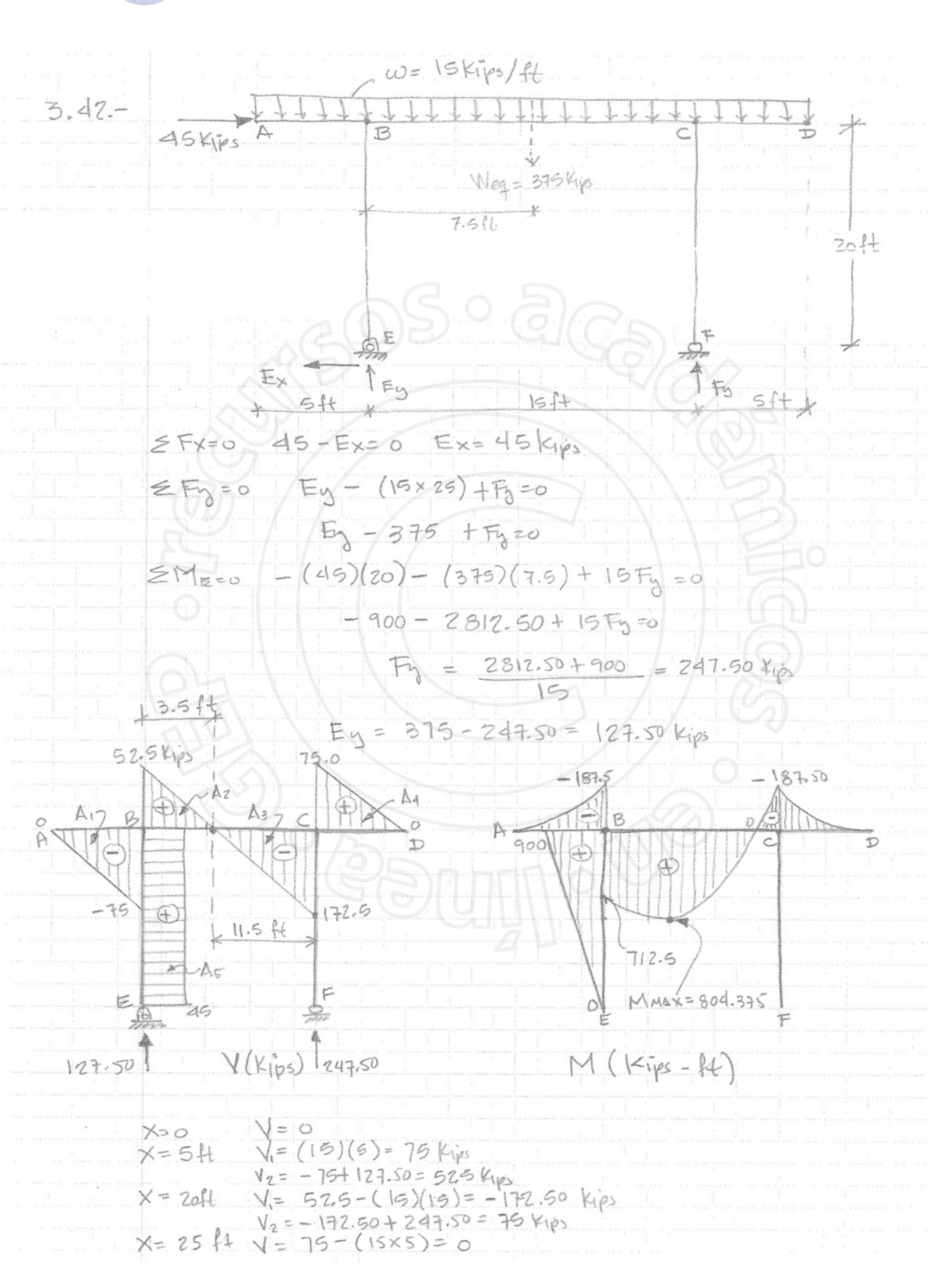
100kN
B
C
3 m
50kN
D
2 m
1250
A
-150 kN
4 m

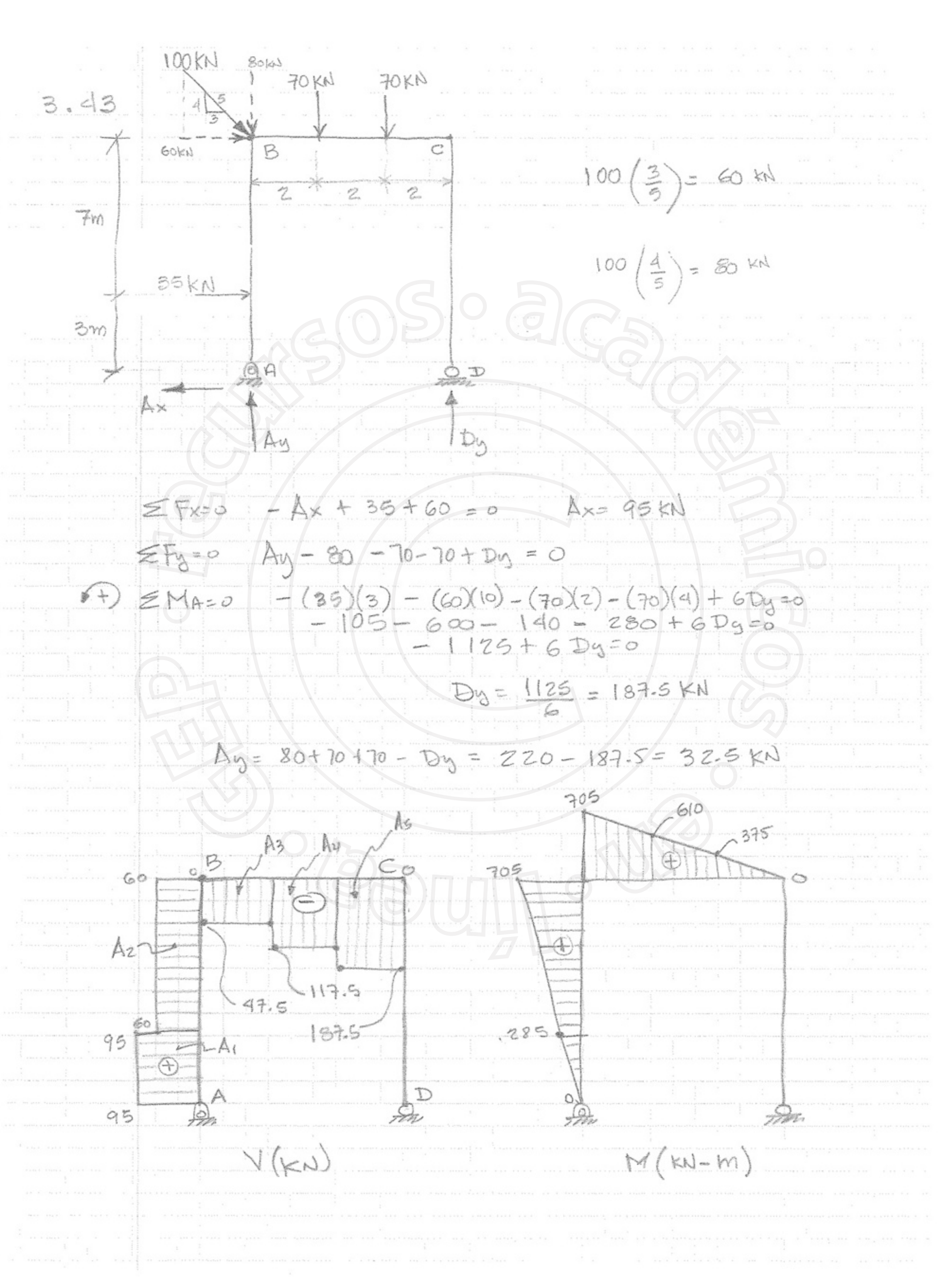
-50 kN
B
C
D
1250 kN - m
V (kN)
A
-150

250 kN - m
250
B
C
250 kN - m
D
M (kN - m)
-150 kN - m
A
-1250 kN - m

3.41

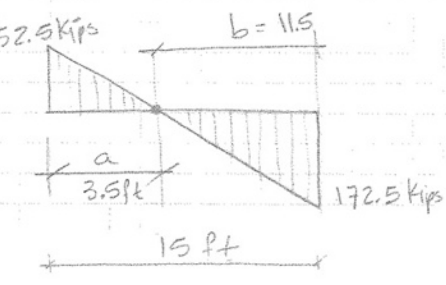

-50kN
2 m
2 m
2 m
B
C
50kN
2 m
-75kN
3 m
-75kN
2 m
25kN/m
A
D
2.1
-150
-47.9
150
V (kN)
-2.1
25
-25
2.1
-437.5
-525
-529.2
M (kN - m)
12.5
-2.1
-25
2.1


3.42.-
w= 15Kips/ft
45Kips
A
B
C
D
Weq = 375 Kips
7.5ft
20ft
E
F
Ex
Ey
Fy
5ft
15ft
5ft
ΣFx=0 45 - Ex = 0 Ex = 45 Kips
ΣFy=0 Ey - (15 x 25) + Fy = 0
Ey - 375 + Fy = 0
ΣME=0 - (45)(20) - (375)(7.5) + 15Fy = 0
- 900 - 2812.50 + 15Fy = 0
Fy = (2812.50 + 900) / 15 = 247.50 Kips
Ey = 375 - 247.50 = 127.50 Kips
3.5 ft
52.5 Kips
75.0
-75
172.5
11.5 ft
45
127.50
V (Kips)
247.50
-187.5
-187.50
900
712.5
MMAX = 804.375
M (Kips - ft)
X=0 V=0
X=5ft V1 = (15)(5) = 75 Kips
V2 = -75 + 127.50 = 52.5 Kips
X=20ft V1 = 52.5 - (15)(15) = -172.50 Kips
V2 = -172.50 + 247.50 = 75 Kips
X= 25 ft V = 75 - (15x5) = 0


3.43
100 KN
80 kN
70 KN
70 KN
60 kN
B
C
2
2
2
7m
35 KN
3m
A
D
Ax
Ay
Dy
100 (3/5) = 60 kN
100 (4/5) = 80 kN
ΣFx=0   −Ax + 35 + 60 = 0   Ax = 95 kN
ΣFy=0   Ay − 80 − 70 − 70 + Dy = 0
(+) ΣMA=0   −(35)(3) − (60)(10) − (70)(2) − (70)(4) + 6Dy = 0
−105 − 600 − 140 − 280 + 6Dy = 0
−1125 + 6Dy = 0
Dy = 1125/6 = 187.5 KN
Ay = 80 + 70 + 70 − Dy = 220 − 187.5 = 32.5 KN
A3
A4
A5
60
B
C
A2
47.5
117.5
187.5
95
A1
95
A
D
V (KN)
705
610
375
705
285
0
M (KN-m)



3.42 Continuación



$$\frac{52.5}{a} = \frac{172.5}{b}$$

$a + b = 15$
$a = 15 - b$

$52.5b = 172.5a$
$52.5b = 172.5(15 - b)$
$52.5b = 2587.5 - 172.5b$
$52.5b + 172.5b = 2587.5$
$225b = 2587.5$
$b = \frac{2587.5}{225}$

$\therefore b = 11.5$ ft
$a = 15 - 11.5 = 3.5$ ft

$A_1 = \frac{(5)(-75)}{2} = -187.5$ kip-ft

$A_2 = \frac{(52.5)(3.5)}{2} = 91.875$ kip-ft

$A_3 = \frac{(-172.5)(11.5)}{2} = -991.875$ kip-ft

$A_4 = \frac{(75)(5)}{2} = 187.5$ kip-ft

$A_5 = (45)(20) = 900$ kip-ft

$M_B = A_1 + A_5 = -187.5 + 900 = 712.5$ kip-ft
$M_{MAX} = M_B + A_2 = 712.5 + 91.875 = 804.375$ kip-ft
$M_C = M_{MAX} - A_3 = 804.375 - 991.875 = -187.50$
$M_D = M_C + A_4 = -187.50 + 187.50 = 0$



3-43 continuación

A-B $0 \leq x \leq 3\,m$ $V = 95\ kN$

$3 \leq x \leq 10\,m$ $V = 95 - 35 = 60\ kN$

$x = 10$ $V = 60 - 60 = 0$

B-C $x = 0\,m$ $V = 32.5 - 80 = -47.5\ kN$

$x = 2\,m$ $V = -47.5 - 70 = -117.5\ kN$

$x = 4\,m$ $V = -117.5 - 70 = -187.5\ kN$

$x = 6\,m$ $V = -187.5 + 187.5 = 0\ kN$

$A_1 = 95 \times 3 = 285\ kN\text{-}m$

$A_2 = 60 \times 7 = 420\ kN\text{-}m$

$A_3 = -47.5 \times 2 = -95\ kN\text{-}m.$

$A_4 = -117.5 \times 2 = -235\ kN\text{-}m$

$A_5 = -187.5 \times 2 = -375\ kN\text{-}m$

A-B $x = 0$ $M = 0$

$x = 3\,m$ $M = A_1 = 285\ kN\text{-}m$

$x = 10\,m$ $M = A_1 + A_2 = 285 + 420 = 705\ kN\text{-}m$

B-C $x = 0$ $M = 705\ kN\text{-}m$

$x = 2$ $M = 705 - 95 = 610\ kN\text{-}m$

$x = 4$ $M = 610 - 235 = 375\ kN\text{-}m$

$x = 6$ $M = 375 - 375 = 0$




3.44

$$\circlearrowleft+)\ \Sigma M_A=0 \quad -(750)(5)-(550)(10)+13D_y=0$$
$$-3750-5500+13D_y=0$$
$$-9250+13D_y=0$$
$$D_y=\frac{9250}{13}=711.5385\text{ N}$$

$$\Sigma M_C=0 \text{ (derecha)} \quad -3D_y+D_x 2=0$$
$$D_x=\frac{3D_y}{2}=\frac{3(711.5385)}{2}=1067.3077\text{ N}$$

$$\Sigma F_x=0 \quad -A_x+D_x=0 \quad \therefore \quad A_x=1067.3077\text{ N}$$

$$\Sigma F_y=0 \quad A_y-750-550+1067.3077=0$$
$$A_y=750+550-1067.3077$$
$$A_y=232.6923\text{ N}$$

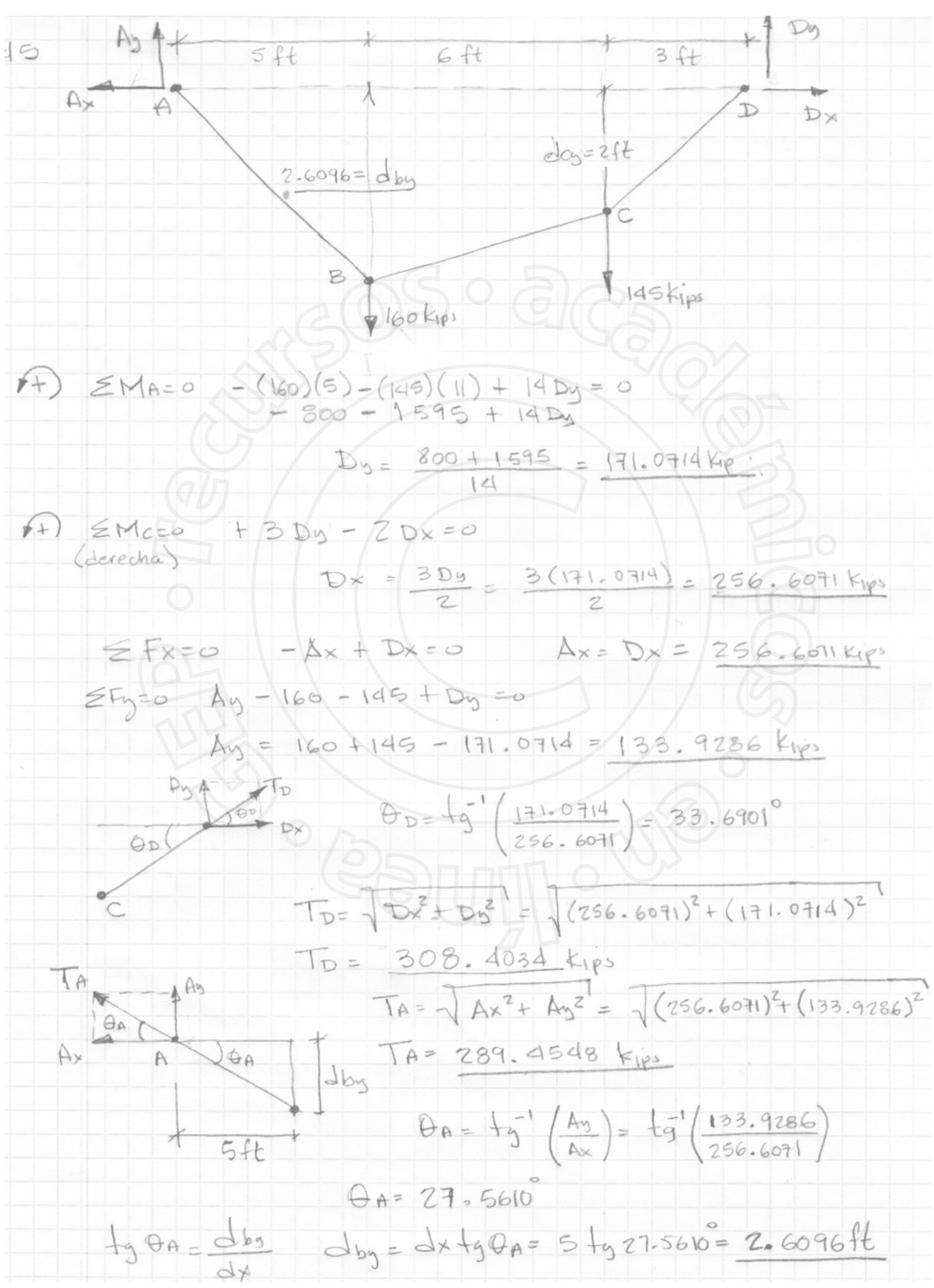
$$tg\theta_D=\frac{d_{cy}}{dx}$$
$$d_{cy}=dx\,tg\theta_D$$
$$d_{cy}=3\,tg\,33.6901^\circ=2\text{m}$$

$$T_D=\sqrt{D_x^2+D_y^2}=\sqrt{(1067.3077)^2+(711.5385)^2}$$
$$T_D=1,282.7442\text{ N}$$
$$\theta_D=tg^{-1}\left(\frac{711.5385}{1067.3077}\right)=33.6901^\circ$$

$$T_A=\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{(1067.3077)^2+(232.6923)^2}$$
$$T_A=1,092.3788\text{ N}$$

$$\theta_A=tg^{-1}\left(\frac{232.6923}{1067.3077}\right)=12.2991^\circ$$

$$tg\theta_A=\frac{d_{by}}{d_{bx}} \quad d_y=dx\,tg\theta_A=5\,tg\,12.2991^\circ=1.0901\text{m}$$



$(\curvearrowleft +)\ \Sigma M_A = 0 \quad -(160)(5) - (145)(11) + 14 D_y = 0$

$-800 - 1595 + 14 D_y$

$$D_y = \frac{800 + 1595}{14} = 171.0714 \text{ Kip}$$

$(\curvearrowleft +)\ \Sigma M_C = 0$ (derecha) $\quad +3 D_y - 2 D_x = 0$

$$D_x = \frac{3 D_y}{2} = \frac{3(171.0714)}{2} = 256.6071 \text{ kips}$$

$\Sigma F_x = 0 \quad -A_x + D_x = 0 \qquad A_x = D_x = 256.6071$ kips

$\Sigma F_y = 0 \quad A_y - 160 - 145 + D_y = 0$

$A_y = 160 + 145 - 171.0714 = 133.9286$ kips

$$\theta_D = tg^{-1}\left(\frac{171.0714}{256.6071}\right) = 33.6901^\circ$$

$$T_D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(256.6071)^2 + (171.0714)^2}$$

$T_D = 308.4034$ kips

$$T_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(256.6071)^2 + (133.9286)^2}$$

$T_A = 289.4548$ kips

$$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{133.9286}{256.6071}\right)$$

$\theta_A = 27.5610^\circ$

$$tg\,\theta_A = \frac{d_{by}}{d_x} \qquad d_{by} = d_x\, tg\,\theta_A = 5\, tg\, 27.5610^\circ = 2.6096 \text{ ft}$$



3.46

7 ft   7 ft   7 ft   7 ft

A   Ax   Ay

$d_{By} = 7.5120$ ft

$d_{Cy} = 11$ ft

$d_{Dy} = 10.741$ ft

7.5 ft

B   195 kips

C   235 kips

D   165 kips

E   Ex   Ey

$\circlearrowleft +) \quad \Sigma M_A = 0 \qquad -(195)(7) - (235)(14) - (165)(21) + 28E_y + 7.5E_x = 0$

$-1365 - 3290 - 3465 + 28E_y + 7.5E_x = 0$

$-8120 + 28E_y + 7.5E_x = 0$

$\circlearrowleft +) \quad \Sigma M_C = 0$ (derecha) $\qquad -(165)(7) + 14E_y - (11 - 7.5)E_x = 0$

$-1155 + 14E_y - 3.5E_x$

$$E_y = \frac{1155 + 3.5E_x}{14} = \frac{1155 + (3.5)(387.3333)}{14}$$

$$-8120 + 28\left(\frac{1155 + 3.5E_x}{14}\right) + 7.5E_x = 0 \qquad E_y = 179.3333$$

$-8120 + 2(1155 + 3.5E_x) + 7.5E_x = 0$

$-8120 + 2310 + 7.5E_x + 7.5E_x = 0$

$$15E_x = 8120 - 2310 \qquad E_x = \frac{5810}{15} = 387.3333$$

$\Sigma F_x = 0 \qquad -A_x + E_x = 0 \qquad A_x = E_x = 387.3333$ kips

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 195 - 235 - 165 + E_y = 0$

$A_y = 195 + 235 + 165 - 179.3333$

$A_y = 415.6667$ Kips

Ey   TE   θE   Ex   dDy   7 ft

$$T_E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(387.3333)^2 + (179.3333)^2}$$

$T_E = 426.8343$ Kips

$$\theta_E = tg^{-1}\left(\frac{179.3333}{387.3333}\right) = 24.8439^\circ$$

$d_{Dy} = 7\ tg\ 24.8439 = 3.2410 + 7.5 = 10.7410$ ft



3.46 continuación

$$T_A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$T_A = \sqrt{(387.3333)^2 + (415.6667)^2}$$

$$T_A = 568.1601 \text{ Kips}$$

$$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{415.6667}{387.3333}\right) = 47.0208°$$

$$d_{by} = 7 \, tg \, 47.0208° = 7.5120 \text{ ft}$$

(TA, Ay, Ax, θA, θA, dby, B, 7ft)

(A, 415.6667 kip, 387.3333 kip, B, 195 kip)

$$T_B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$T_B = \sqrt{(387.3333)^2 + (220.6667)^2}$$

$$T_B = 445.7812 \text{ Kips}$$

$$B_y = 415.6667 - 195 = 220.6667 \text{ Kips}$$

(B, 220.6667 kips, 387.3333 kips, C, 235 kips)

$$T_C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$$

$$T_C = \sqrt{(387.3333)^2 + (14.3333)^2}$$

$$T_C = 387.5984 \text{ kips}$$

$$C_y = 235 - 220.6667 = 14.3333$$

($E_y = 179.3333$, E, 14.3333, D, 165 kips)

$$T_D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$

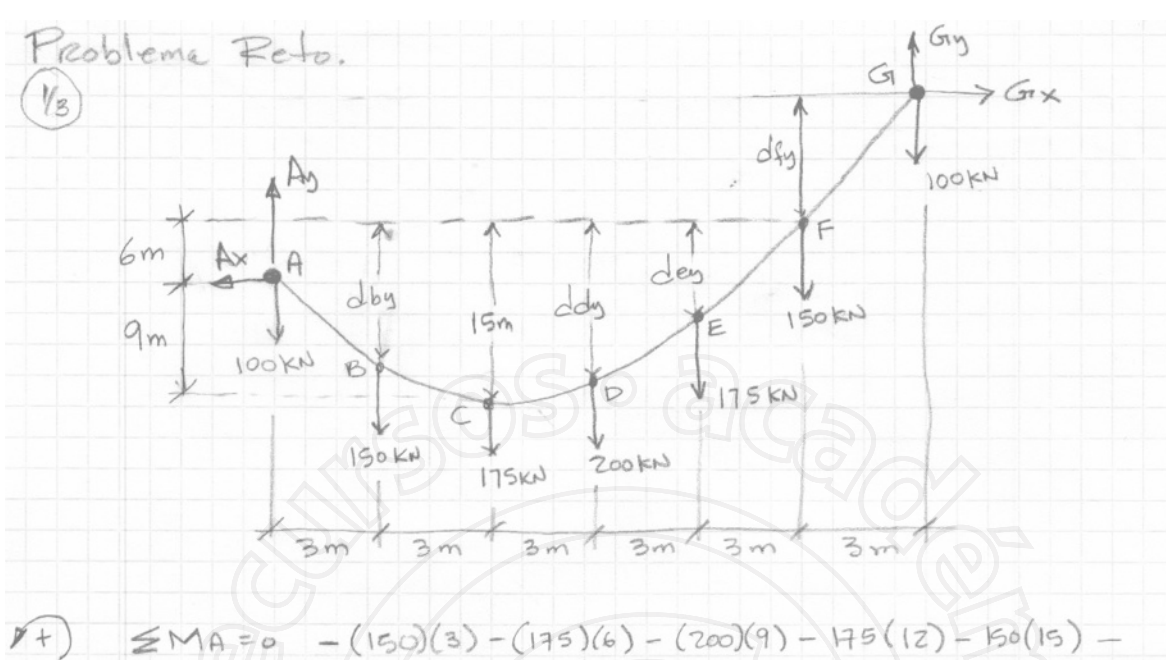
$$T_D = \sqrt{(387.3333)^2 + (14.3333)^2}$$

$$T_D = 387.5984 \text{ kips}$$

$$D_y = 179.3333 - 165 = 14.333 \text{ kips}$$

Problema Reto.

(1/3)



$\curvearrowright +)\ \Sigma M_A = 0 \quad -(150)(3) - (175)(6) - (200)(9) - 175(12) - 150(15) -$

$(100)(18) + 18\,G_y - G_x(d_{fy} + 6) = 0$

$\curvearrowright +)\ \Sigma M_C = 0 \quad +(100)(6) - 6A_y + 9A_x + (150)(3) = 0$

Izq

$600 - 6A_y + 9A_x + 450 = 0$

$-6A_y + 9A_x + 1050 = 0$

$\curvearrowright +)\ \Sigma M_F = 0 \quad (175)(3) + (200)(6) + (175)(9) + (150)(12) + (100)(15)$

Izq

$-15A_y - 6A_x = 0$

$525 + 1200 + 1575 + 1800 + 1500 - 15A_y - 6A_x = 0$

$6\,600 - 15A_y - 6A_x = 0$

$9A_x = -1050 + 6A_y \qquad A_x = -\frac{1050}{9} + \frac{6A_y}{9}$

$A_x = 116.6667 + 0.6667\,A_y$

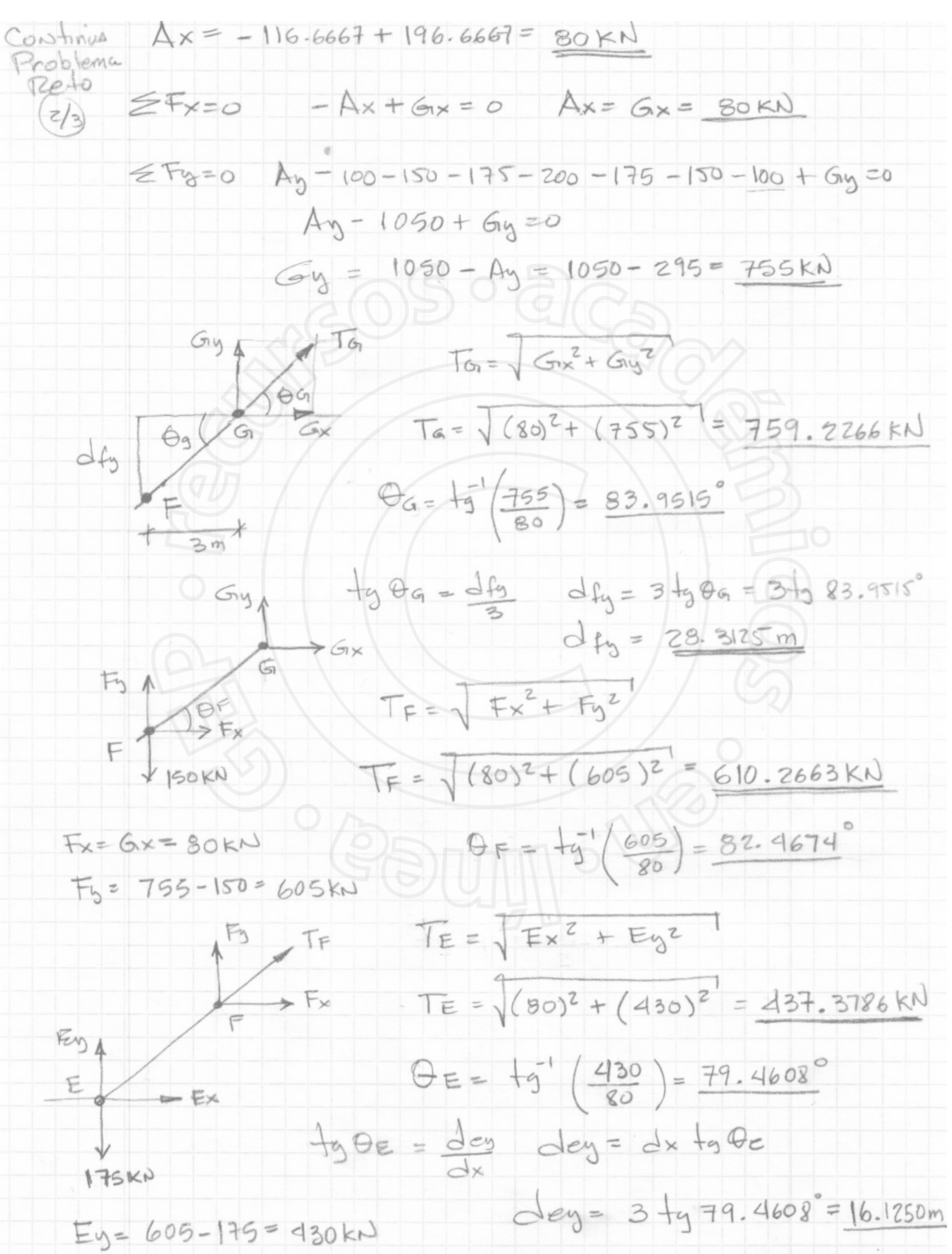
$6\,600 - 15A_y - 6\,[116.6667 + 0.6667\,A_y] = 0$

$6600 - 15A_y - 700 - 4A_y = 0$

$6\,600 - 700 = 15A_y + 4A_y$

$5900 = 20A_y$

$A_y = \frac{5\,900}{20} = \underline{\underline{295\ \text{KN}}} \qquad A_x = -116.6667 + \left(\frac{6}{9}\right)295$



Continua Problema Reto (2/3)

$A_x = -116.6667 + 196.6667 = \underline{80\ kN}$

$\Sigma F_x = 0 \qquad -A_x + G_x = 0 \qquad A_x = G_x = \underline{80\ kN}$

$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y - 100 - 150 - 175 - 200 - 175 - 150 - 100 + G_y = 0$

$A_y - 1050 + G_y = 0$

$G_y = 1050 - A_y = 1050 - 295 = \underline{755\ kN}$

$T_G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$

$T_G = \sqrt{(80)^2 + (755)^2} = \underline{759.2266\ kN}$

$\theta_G = tg^{-1}\left(\frac{755}{80}\right) = \underline{83.9515^\circ}$

$tg\,\theta_G = \frac{df_y}{3} \qquad df_y = 3\,tg\,\theta_G = 3\,tg\,83.9515^\circ$

$df_y = \underline{28.3125\ m}$

$T_F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$T_F = \sqrt{(80)^2 + (605)^2} = \underline{610.2663\ kN}$

$F_x = G_x = 80\ kN$

$F_y = 755 - 150 = 605\ kN$

$\theta_F = tg^{-1}\left(\frac{605}{80}\right) = \underline{82.4674^\circ}$

$T_E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$

$T_E = \sqrt{(80)^2 + (430)^2} = \underline{437.3786\ kN}$

$\theta_E = tg^{-1}\left(\frac{430}{80}\right) = \underline{79.4608^\circ}$

$tg\,\theta_E = \frac{de_y}{dx} \qquad de_y = dx\,tg\,\theta_E$

$de_y = 3\,tg\,79.4608^\circ = \underline{16.1250\ m}$

$E_y = 605 - 175 = 430\ kN$



Continua Problema Reto 3/3

(Diagrama: nodo D con Dx, Dy, 200 kN; nodo E con Ex, Ey)

$$T_D = \sqrt{Dx^2 + Dy^2}$$

$$T_D = \sqrt{(80)^2 + (230)^2} = 243.5159 \text{ kN}$$

$$\theta_D = tg^{-1}\left(\frac{230}{80}\right) = 70.8210°$$

$$Dy = 430 - 200 = 230 \text{ kN}$$

$$tg\,\theta_D = \frac{ddy}{dx}$$

$$ddy = dx\, tg\,\theta_D = 3\, tg\, 70.8210° = 8.6250 \text{ m}$$

(Diagrama: TA, Ay, Ax, θ_A, B, dby, 3m)

$$T_A = \sqrt{Ax^2 + Ay^2}$$

$$T_A = \sqrt{(80)^2 + (295)^2} = 305.655 \text{ kN}$$

$$\theta_A = tg^{-1}\left(\frac{295}{80}\right) = 74.8271°$$

$$tg\,\theta_A = \frac{dy}{dx} \qquad dy = dx\, tg\,\theta_A = 3\, tg\, 74.8271$$

$$dy = 11.0625 \text{ m}$$

$$\therefore\ dby = 6 + dy = 6 + 11.0625 = 17.0625 \text{ m}$$

(Diagrama: nodo B con Bx, By, 150, θ_B; nodo C con Cx, Cy, 175)

$$T_B = \sqrt{Bx^2 + By^2} = \sqrt{(80)^2 + (145)^2}$$

$$T_C = \sqrt{Cx^2 + Cy^2} = \sqrt{(80)^2 + (30)^2}$$

$$T_B = 165.6050 \text{ kN}$$

$$By = Ay - 150 = 295 - 150 = 145 \text{ kN}$$

$$Cy = By - 175 = 145 - 175 = -30 \text{ kN} \qquad T_C = 85.44 \text{ kN}$$

$$\theta_B = tg^{-1}\left(\frac{145}{80}\right) = 61.1134°$$

$$\theta_C = tg^{-1}\left(\frac{30}{80}\right) = 20.5560°$$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	25.00	cm
From centroid to top	y (top)	25.00	cm
Area of shape	A	1,500.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	312,500.00	cm^4
Section Modulus	Sx	12,500.00	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	12,500.00	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	12,500.00	cm^3
Radius of Gyration	rx	14.4338	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	15.00	cm
From centroid to right	x (right)	15.00	cm
Area of shape	A	1,500.00	cm^2
Moment of Inertia	Iy	112,500.00	cm^4
Section Modulus	Sy	7,500.00	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	7,500.00	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	7,500.00	cm^3
Radius of Gyration	ry	8.6603	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	425,000.00	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

4.2

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	10.00		inch
From centroid to top	y (top)	10.00		inch
Area of shape	A	240.00		inch^2
Moment of Inertia	Ix	8,000.00		inch^4
Section Modulus	Sx	800.00		inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	800.00		inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	800.00		inch^3
Radius of Gyration	rx	5.77		inch
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	6.00		inch
From centroid to right	x (right)	6.00		inch
Area of shape	A	240.00		inch^2
Moment of Inertia	Iy	2,880.00		inch^4
Section Modulus	Sy	480.00		inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	480.00		inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	480.00		inch^3
Radius of Gyration	ry	3.46		inch
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	10,880.00		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0		inch^4


MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.3

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	30.00	cm
From centroid to top	y (top)	30.00	cm
Area of shape	A	1600.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	613,333.3333	cm^4
Section Modulus	Sx	20,444.4444	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	20,444.4444	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	20,444.4444	cm^3
Radius of Gyration	rx	19.5789	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	20.00	cm
From centroid to right	x (right)	20.00	cm
Area of shape	A	1600.00	cm^2
Moment of Inertia	Iy	293,333.3333	cm^4
Section Modulus	Sy	14,666.6667	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	14,666.6667	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	14,666.6667	cm^3
Radius of Gyration	ry	13.5401	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	906,666.6667	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.4

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	15.00		inch
From centroid to top	y (top)	15.00		inch
Area of shape	A	380.00		inch^2
Moment of Inertia	Ix	35,166.6667		inch^4
Section Modulus	Sx	2,344.4444		inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	2,344.4444		inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	2,344.4444		inch^3
Radius of Gyration	rx	9.6200		inch
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	9.00		inch
From centroid to right	x (right)	9.00		inch
Area of shape	A	380.00		inch^2
Moment of Inertia	Iy	13,726.6667		inch^4
Section Modulus	Sy	1,525.1852		inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,525.1852		inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,525.1852		inch^3
Radius of Gyration	ry	6.0102		inch
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	48,893.3333		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0		inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

4.5

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	20.00	cm
From centroid to top	y (top)	20.00	cm
Area of shape	A	1,256.6371	cm^2
Moment of Inertia	Ix	125,663.7061	cm^4
Section Modulus	Sx	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	6,283.1853	cm^3
Radius of Gyration	rx	10.00	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	20.00	cm
From centroid to right	x (right)	20.00	cm
Area of shape	A	1,256.6371	cm^2
Moment of Inertia	Iy	125,663.7061	cm^4
Section Modulus	Sy	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	6,283.1853	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	6,283.1853	cm^3
Radius of Gyration	ry	10.00	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	251,327.4123	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4


MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

4.6

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	7.5	inch
From centroid to top	y (top)	7.5	inch
Area of shape	A	176.7146	inch^2
Moment of Inertia	Ix	2,485.0489	inch^4
Section Modulus	Sx	331.3399	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	331.3399	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	331.3399	inch^3
Radius of Gyration	rx	3.75	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	7.5	inch
From centroid to right	x (right)	7.5	inch
Area of shape	A	176.7146	inch^2
Moment of Inertia	Iy	2,485.0489	inch^4
Section Modulus	Sy	331.3399	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	331.3399	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	331.3399	inch^3
Radius of Gyration	ry	3.75	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	4,970.0978	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	inch^4


MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

4.7

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	35		cm
From centroid to top	y (top)	35		cm
Area of shape	A	1,021.0176		cm^2
Moment of Inertia	Ix	542,415.6066		cm^4
Section Modulus	Sx	15,497.5888		cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	15,497.5888		cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	15,497.5888		cm^3
Radius of Gyration	rx	23.0489		cm
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	35		cm
From centroid to right	x (right)	35		cm
Area of shape	A	1,021.0176		cm^2
Moment of Inertia	Iy	542,415.6066		cm^4
Section Modulus	Sy	15,497.5888		cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	15,497.5888		cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	15,497.5888		cm^3
Radius of Gyration	ry	23.0489		cm
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	1,084,831.2132		cm^4
Product of Inertia	Ixy	0		cm^4

4.8

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	15.00	inch
From centroid to top	y (top)	15.00	inch
Area of shape	A	254.4690	inch^2
Moment of Inertia	Ix	23,474.7657	inch^4
Section Modulus	Sx	1,564.9844	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	1,564.9844	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	1,564.9844	inch^3
Radius of Gyration	rx	9.6047	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	15.00	inch
From centroid to right	x (right)	15.00	inch
Area of shape	A	254.4690	inch^2
Moment of Inertia	Iy	23,474.7657	inch^4
Section Modulus	Sy	1,564.9844	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,564.9844	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,564.9844	inch^3
Radius of Gyration	ry	9.6047	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	46,949.5314	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

4.9

X Axis Properties		CUADRADO	CIRCULO	CONJUNTO	
From bottom to centroid	y (bot)	25.00	15.00	25.00	cm
From centroid to top	y (top)	25.00	15.00	25.00	cm
Area of shape	A	2,500.0000	706.8583	1,793.1417	cm^2
Moment of Inertia	Ix	520,833.3333	39,760.7820	481,072.5513	cm^4
Section Modulus	Sx	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Radius of Gyration	rx	14.4338	7.5	16.3794	cm
Y Axis Properties					
From left to centroid	x (left)	25.00	15.00	25.00	cm
From centroid to right	x (right)	25.00	15.00	25.00	cm
Area of shape	A	2,500.0000	706.8583	1,793.1417	cm^2
Moment of Inertia	Iy	520,833.3333	39,760.7820	481,072.5513	cm^4
Section Modulus	Sy	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	20,833.3333	2,650.7188	19,242.9021	cm^3
Radius of Gyration	ry	14.4338	7.50	16.3794	cm
Other Properties					
Polar Moment of Inertia	J	1041666.667	79521.56404	962145.1026	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	0		cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.10

		CUADRADO	CIRCULO	CONJUNTO	
X Axis Properties					
From bottom to centroid	y (bot)	12.5	7.5	12.5	inch
From centroid to top	y (top)	12.5	7.5	12.5	inch
Area of shape	A	625.0000	176.7146	448.2854	inch^2
Moment of Inertia	Ix	32,552.0833	2,485.0489	30,067.0345	inch^4
Section Modulus	Sx	2,604.1667	331.3399	2,405.3628	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	2,604.1667	331.3399	2,405.3628	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	2,604.1667	331.3399	2,405.3628	inch^3
Radius of Gyration	rx	7.2169	3.75	8.1897	inch
Y Axis Properties					
From left to centroid	x (left)	12.5	7.5	12.5	inch
From centroid to right	x (right)	12.5	7.5	12.5	inch
Area of shape	A	625.0000	176.7146	448.2854	inch^2
Moment of Inertia	Iy	32,552.0833	2,485.0489	30,067.0345	inch^4
Section Modulus	Sy	2,604.1667	331.3399	2,405.3628	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	2,604.1667	331.3399	2,405.3628	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	2,604.1667	331.3399	2,405.3628	inch^3
Radius of Gyration	ry	7.2169	3.75	8.1897	inch
Other Properties					
Polar Moment of Inertia	J	65,104.1667	4,970.0978	60,134.0689	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	0	0	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

4.11

		CIRCULO	CUADRADO	CONJUNTO	
X Axis Properties					
From bottom to centroid	y (bot)	37.5	27.5	37.5	cm
From centroid to top	y (top)	37.5	27.5	37.5	cm
Area of shape	A	4,417.8647	3,025.0000	1,392.8647	cm^2
Moment of Inertia	Ix	1,553,155.5477	762,552.0833	790,603.4644	cm^4
Section Modulus	Sx	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Radius of Gyration	rx	18.75	15.8771324	23.8246	cm
Y Axis Properties					
From left to centroid	x (left)	37.5	27.5	37.5	cm
From centroid to right	x (right)	37.5	27.5	37.5	cm
Area of shape	A	4,417.8647	3,025.0000	1,392.8647	cm^2
Moment of Inertia	Iy	1,553,155.5477	762,552.0833	790,603.4644	cm^4
Section Modulus	Sy	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	41,417.4813	27,729.1667	21,082.7591	cm^3
Radius of Gyration	ry	18.7500	15.8771	23.8246	cm
Other Properties					
Polar Moment of Inertia	J	3,106,311.0955	1,525,104.1667	1,581,206.9288	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	0		cm^4



4.12

X Axis Properties		CIRCULO	CUADRADO	CONJUNTO	
From bottom to centroid	y (bot)	12.5	5.5	12.5	inch
From centroid to top	y (top)	12.5	5.5	12.5	inch
Area of shape	A	490.8739	121.0000	369.8739	inch^2
Moment of Inertia	Ix	19,174.7598	1,220.0833	17,954.6765	inch^4
Section Modulus	Sx	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Radius of Gyration	rx	6.2500	3.1754	6.9673	inch
Y Axis Properties					
From left to centroid	x (left)	12.5	5.5	12.5	inch
From centroid to right	x (right)	12.5	5.5	12.5	inch
Area of shape	A	490.8739	121.0000	369.8739	inch^2
Moment of Inertia	Iy	19,174.7598	1,220.0833	17,954.6765	inch^4
Section Modulus	Sy	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,533.9808	221.8333	1,436.3741	inch^3
Radius of Gyration	ry	6.2500	3.1754	6.9673	inch
Other Properties					
Polar Moment of Inertia	J	38349.5197	2440.166667		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	0		inch^4



4.13

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	35.7692	cm
From centroid to top	y (top)	24.2308	cm
Area of shape	A	1,950.0000	cm^2
Moment of Inertia	Ix	670,096.1538	cm^4
Section Modulus	Sx	18,733.8710	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	18,733.8710	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	27,654.7619	cm^3
Radius of Gyration	rx	18.5375	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	35	cm
From centroid to right	x (right)	35	cm
Area of shape	A	1,950.0000	cm^2
Moment of Inertia	Iy	350,937.5000	cm^4
Section Modulus	Sy	10,026.7857	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	10,026.7857	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	10,026.7857	cm^3
Radius of Gyration	ry	13.4152	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	1,021,033.6538	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.14

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	20.5816	inch
From centroid to top	y (top)	12.4184	inch
Area of shape	A	490.0000	inch^2
Moment of Inertia	Ix	47,637.5680	inch^4
Section Modulus	Sx	2,314.5670	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	2,314.5670	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	3,836.0572	inch^3
Radius of Gyration	rx	9.8600	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	15.00	inch
From centroid to right	x (right)	15.00	inch
Area of shape	A	490.0000	inch^2
Moment of Inertia	Iy	20,083.3333	inch^4
Section Modulus	Sy	1,338.8889	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	1,338.8889	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,338.8889	inch^3
Radius of Gyration	ry	6.4021	inch
Plastic Modulus	Zy	2,425.0000	inch^3
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	67,720.9014	inch^4
Product of Inertia	Ixy	0	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot

4.15

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	36.8233	cm
From centroid to top	y (top)	58.1767	cm
Area of shape	A	3,325.0000	cm^2
Moment of Inertia	Ix	3,334,154.5269	cm^4
Section Modulus	Sx	57,310.8306	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	90,544.6763	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	57,310.8306	cm^3
Radius of Gyration	rx	31.6663	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	27.7256	cm
From centroid to right	x (right)	47.2744	cm
Area of shape	A	3,325.0000	cm^2
Moment of Inertia	Iy	1,581,757.9104	cm^4
Section Modulus	Sy	33,459.0540	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	57,050.5226	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	33,459.0540	cm^3
Radius of Gyration	ry	21.8109	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	4,915,912.4373	cm^4
Product of Inertia	Ixy	-783,242.4812	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.16

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	15.2292	inch
From centroid to top	y (top)	18.7708	inch
Area of shape	A	480.00	inch^2
Moment of Inertia	Ix	61,534.7917	inch^4
Section Modulus	Sx	3,278.2131	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	4,040.5882	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	3,278.2131	inch^3
Radius of Gyration	rx	11.3224	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	8.9583	inch
From centroid to right	x (right)	21.0417	inch
Area of shape	A	480.00	inch^2
Moment of Inertia	Iy	25,479.1667	inch^4
Section Modulus	Sy	1,210.8911	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	2,844.1860	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	1,210.8911	inch^3
Radius of Gyration	ry	7.2857	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	87,013.9583	inch^4
Product of Inertia	Ixy	-12,385.4167	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.17

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	27.3413	cm
From centroid to top	y (top)	38.6587	cm
Area of shape	A	945.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	604,834.9405	cm^4
Section Modulus	Sx	15,645.4943	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	22,121.6843	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	15,645.4943	cm^3
Radius of Gyration	rx	25.2990	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	25.00	mm
From centroid to right	x (right)	25.00	mm
Area of shape	A	945.00	mm^2
Moment of Inertia	Iy	119,281.2500	mm^4
Section Modulus	Sy	4,771.2500	mm^3
Section Modulus (left)	S (left)	4,771.2500	mm^3
Section Modulus (right)	S (right)	4,771.2500	mm^3
Radius of Gyration	ry	11.2349	mm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	724,116.1905	mm^4
Product of Inertia	Ixy	0.0000	mm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.18

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	10.3108		inch
From centroid to top	y (top)	16.6892		inch
Area of shape	A	185.00		inch^2
Moment of Inertia	Ix	19,333.7950		inch^4
Section Modulus	Sx	1,158.4622		inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	1,875.0994		inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	1,158.4622		inch^3
Radius of Gyration	rx	10.2229		inch
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	12.50		inch
From centroid to right	x (right)	12.50		inch
Area of shape	A	185.00		inch^2
Moment of Inertia	Iy	6,065.4167		inch^4
Section Modulus	Sy	485.2333		inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	485.2333		inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	485.2333		inch^3
Radius of Gyration	ry	5.7259		inch
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	25,399.2117		inch^4
Product of Inertia	Ixy	0		inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.19

X Axis Properties				
From bottom to centroid	y (bot)	39.2782		cm
From centroid to top	y (top)	45.7218		cm
Area of shape	A	2,840.0000		cm^2
Moment of Inertia	Ix	2,238,186.9131		cm^4
Section Modulus	Sx	48,952.2590		cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	56,982.9747		cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	48,952.2590		cm^3
Radius of Gyration	rx	28.0730		cm
Y Axis Properties				
From left to centroid	x (left)	43.0000		cm
From centroid to right	x (right)	43.0000		cm
Area of shape	A	2,840.0000		cm^2
Moment of Inertia	Iy	1,414,386.6667		cm^4
Section Modulus	Sy	32,892.7132		cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	32,892.7132		cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	32,892.7132		cm^3
Radius of Gyration	ry	22.3164		cm
Other Properties				
Polar Moment of Inertia	J	3,652,573.5798		cm^4
Product of Inertia	Ixy	0.0000		cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.20

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	67.3630	cm
From centroid to top	y (top)	32.6370	cm
Area of shape	A	3,650.00	cm^2
Moment of Inertia	Ix	3,105,035.6735	cm^4
Section Modulus	Sx	46,094.0730	cm^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	46,094.0730	cm^3
Section Modulus (top)	S (top)	95,138.5537	cm^3
Radius of Gyration	rx	29.1667	cm
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	50.00	cm
From centroid to right	x (right)	50.00	cm
Area of shape	A	3,650.00	cm^2
Moment of Inertia	Iy	2,127,916.6667	cm^4
Section Modulus	Sy	42,558.3333	cm^3
Section Modulus (left)	S (left)	42,558.3333	cm^3
Section Modulus (right)	S (right)	42,558.3333	cm^3
Radius of Gyration	ry	24.1452	cm
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	5,232,952.3402	cm^4
Product of Inertia	Ixy	0	cm^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.21

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	4.0395	inch
From centroid to top	y (top)	2.4605	inch
Area of shape	A	28.50	inch^2
Moment of Inertia	Ix	108.8306	inch^4
Section Modulus	Sx	26.9418	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	26.9418	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	44.2306	inch^3
Radius of Gyration	rx	1.9541	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	4.50	inch
From centroid to right	x (right)	4.50	inch
Area of shape	A	28.50	inch^2
Moment of Inertia	Iy	139.8750	inch^4
Section Modulus	Sy	31.0833	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	31.0833	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	31.0833	inch^3
Radius of Gyration	ry	2.2154	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	248.7056	inch^4
Product of Inertia	Ixy	1.11022E-16	inch^4





4.22

X Axis Properties			
From bottom to centroid	y (bot)	4.50	inch
From centroid to top	y (top)	4.50	inch
Area of shape	A	17.00	inch^2
Moment of Inertia	Ix	189.4167	inch^4
Section Modulus	Sx	42.0926	inch^3
Section Modulus (bottom)	S (bot)	42.0926	inch^3
Section Modulus (top)	S (top)	42.0926	inch^3
Radius of Gyration	rx	3.3380	inch
Y Axis Properties			
From left to centroid	x (left)	4.50	inch
From centroid to right	x (right)	4.50	inch
Area of shape	A	17.00	inch^2
Moment of Inertia	Iy	61.4167	inch^4
Section Modulus	Sy	13.6481	inch^3
Section Modulus (left)	S (left)	13.6481	inch^3
Section Modulus (right)	S (right)	13.6481	inch^3
Radius of Gyration	ry	1.9007	inch
Other Properties			
Polar Moment of Inertia	J	250.8333	inch^4
Product of Inertia	Ixy	-80.00	inch^4

MDSolids - Educational Software for Mechanics of Materials   Copyright © 1997-2009 Timothy A. Philpot



4.23

$$I_x = I_{x'} + A d_y^2$$

$$I_y = I_{y'} + A d_x^2$$

Perfil	$I_{x'}$ cm⁴	A cm²	d_y cm	d_y^2 cm²	$A d_y^2$	I_x cm⁴
IE 610 × 158	122,372.	201	0	0	0	122,372.
CE 152 × 12.20	29.14	15.42	32.398	1,049.6704	16,185.3008	16,214.4408
					Σ =	138,586.44

NOTA: Para CE 152×12.20 se tomó el valor de I_x como el de I_y por encontrarse girada 90° la sección.

$$d_y = \frac{d}{2} + \bar{x} = \frac{62.2}{2} + 1.298 = 31.1 + 1.298 = 32.3980 \text{ cm}$$

Perfil	$I_{y'}$ cm⁴	A cm²	d_x cm	d_x^2 cm²	$A d_x^2$	I_y cm⁴
IE 610 × 158	3,209.	201.	0	0	0	3,209.
CE 152 × 12.20	541.1	15.42	0	0	0	541.1
					Σ =	3,750.1

NOTA: Para CE 152×12.20 se tomó el valor de I_y como el de I_x por encontrarse girada 90° la sección.

Del conjunto:

$$I_x = 138,586.44 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 3,750.10 \text{ cm}^4$$



4.24 $I_x = I_{x'} + Ad_y^2$

$I_y = I_{y'} + Ad_x^2$

Placas laterales

$A = 41 \times 1 = 41\ cm^2$

$I_{x'} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(1)(41)^3}{12} = 5{,}743.4167\ cm^4$

$A_{TOT\ PL} = 2 \times 41 = 82\ cm^2$

$I_{y'} = \frac{hb^3}{12} = \frac{(41)(1)^3}{12} = 3.4167\ cm^4$

Perfil	$I_{x'}$ cm⁴	A cm²	d_y cm	d_y^2 cm²	Ad_y^2	I_x
IR 406 x 67.4	24,391.	85.8	0	0	0	24 391.0
2 PL 41x1	5,743.467	82.0	0	0	0	5,743.4167
					Σ =	30,134.4167

Perfil	$I_{y'}$ cm⁴	A cm²	d_x cm	d_x^2 cm²	Ad_x^2	I_y
IR 406x67.4	1,365.0	85.8	0	0	0	1,365.0
2 PL 41x1	3.4167x2 = 6.8334	82.0	9.45	89.3025	7,322.805	7,329.6384

$d_x = \frac{bf}{2} + \frac{e_{PL}}{2} = \frac{17.9}{2} + \frac{1}{2} = 8.95 + 0.50 = 9.45\ cm$

Del conjunto:

$I_x = 30{,}134.4167\ cm^4$

$I_y = 7{,}329.6384\ cm^4$



4.25

CE 254 × 22.76	LD 152 × 102 × 8
$d = 254\text{ mm}$	$Lado_1 = 152\text{ mm}$
$bf = 66.04\text{ mm}$	$Lado_2 = 102\text{ mm}$
$t_f = 11.07\text{ mm}$	$t_f = 8\text{ mm}$
$t_w = 6.10\text{ mm}$	$t_w = 8\text{ mm}$
$A = 28.97\text{ cm}^2$	$A = 19.44\text{ mm}^2$
$I_x = 2\,805.40\text{ cm}^4$	$I_x = 472.7\text{ cm}^4$
$I_y = 94.90\text{ cm}^4$	$I_y = 173.1\text{ cm}^4$
$\bar{x} = 16.10\text{ mm}$	$\bar{x} = 2.33\text{ mm}$
$\bar{y} = 127.0\text{ mm}$	$\bar{y} = 4.87\text{ mm}$

Primero debemos calcular el centroide del conjunto:

y (mm); 168.1; 159.679; 147.13; • ALD; • C̄; • ACE; 0; 2.33; 76.936; 127; x (mm)

$$CE\begin{cases} d_{y_1} = 168.1 - 159.679 = 8.4210\text{ mm} = 0.8421\text{ cm} \\ d_{x_1} = 127.0 - 76.936 = 50.0640\text{ mm} = 5.0064\text{ cm} \end{cases}$$

$$LD\begin{cases} d_{y_2} = 159.679 - 147.13 = 12.5490\text{ mm} = 1.2549\text{ cm} \\ d_{x_2} = 76.936 - 2.33 = 74.6060\text{ mm} = 7.4606\text{ cm} \end{cases}$$

Perfil	A cm²	x cm	y cm	$M_x = A d_y$	$M_y = A d_x$
CE 254×22.76	28.97	12.7	16.81	486.9857	367.919
LD 152×102×8	19.44	0.233	14.713	286.0207	4.5295
Σ =	48.41			773.0064	372.4485

$$\bar{X} = \frac{\Sigma M_y}{\Sigma A} = \frac{372.4485}{48.41} = 7.6936\text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma M_x}{\Sigma A} = \frac{773.0064}{48.41} = 15.9679\text{ cm}$$

$\bar{C}(\bar{x}, \bar{y})$ cm

$\bar{C}(7.6936,\ 15.9679)$

	I_x cm⁴	A cm²	d_y cm	d_y^2 cm²	$A d_y^2$
CE 254×22.76	2,805.40	28.97	0.8421	0.7091	20.5426
LD 152×102×8	472.70	19.44	1.2549	1.5748	30.6141
Σ =	3,278.10	—	—	—	51.1567



4.25
continuación

$I_x = \Sigma I_{x'} + \Sigma A d_y^2$

$I_x = 3,278.10 + 51.1567 = 3,329.2567 \text{ cm}^4$

	$I_{y'}$ cm^4	A cm^2	dx cm	dx^2 cm^2	Adx^2
CE 254 x 22.76	94.90	28.97	5.0064	25.0640	726.1041
LD 152 x 102 x 8	173.1	19.44	7.4606	55.6606	1,082.0421
Σ =	268.0	—	—	—	1,808.1462

$I_y = \Sigma I_{y'} + \Sigma A d_y^2$

$I_y = 268. + 1808.1462 = 2,076.1462 \text{ cm}^2$



4.26

		I_x' cm^4	I_y' cm^4	A cm^2
①	CE 254 x 29.76	2x 3284.1 = 6,568.20	2x116.96 = 233.92	2x 37.94 = 75.88
②	PL 600x50	625.0	90,000.00	300.00
–	Σ =	7,193.20	90,233.92	—

PL 60x5

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{(60)(5)^3}{12} = 625 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{(5)(60)^3}{12} = 90,000 \text{ cm}^4$$

$$A = 60 \times 5 = 300 \text{ cm}^2$$

$$I_x = \Sigma I_x' + \Sigma A d_y^2 \qquad d_{y1} = 0 \quad d_{y2} = 0$$

$$I_x = 7,193.20 + 0 = \underline{7,193.20 \text{ cm}^4}$$

$$I_y = \Sigma I_y' + \Sigma A d_x^2 \qquad d_{x1} = 300 + 15.4 = 315.4 \text{ mm} = 31.5 \qquad d_{x2} = 0$$

$$I_y = 90\ 233.92 + (75.88)(31.54)^2 + (300)(0)^2$$

$$I_y = 90\ 233.92 + 75,483.2690 + 0$$

$$I_y = \underline{165,717.1890 \text{ cm}^4}$$



PROBLEMA

4.27

RESPUESTA

Para empezar a mover la caja

la fuerza $P = 250\,Kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(0.5) = 1226.25\,N$

Para seguir en movimiento

la fuerza $P = 250\,Kg(9.81)(.45) = 1103.625\,N$

4.28 $375\,lb \times (0.35) = 131.25\,lb$ Para empezar a mover

$375\,lb \times (0.3) = 112.5\,lb$ Para seguir en movimiento

4.29 a) $3000(9.81)(0.65)(.45) = 8608.275\,N$

b) $3000(9.81)(0.65)(.4) = 7651.8\,N$

4.30 a) $117000\,N(.55) = 64350\,N$

b) $117000\,N(.4) = 46800\,N$

4.31 a) $1350000\,N(.35) = 472500\,N$

b) $1350000\,N\cdot(.25) = 337500\,N$

4.32 a) $70000\,Kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(.7) = 480690\,N$

b) $70000\,Kg\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(.6) = 412020\,N$

4.33 a) $375 \times 9.81 \times 0.55 = 2023.3125$

b) $375 \times 9.81 \times 0.4 = 1471.5$



4.34

750 N cos 5° = 747.14 N

750 N sen 5° = 65.36 N

25°

30°

60

90

30°

4247.85 N

4905 N

2452.5 N

Normal = 4247.85 + 65.36 N = 4313.21

F_{fs} = 3666.22 N

F_{fk} = 3185.88 N

Fuerza cuesta abajo = 2452.5 N − 747.14 N = 1705.36 N

y se necesitan 3666.22 N para empezar a mover la caja por tanto No se mueve.



4:35

305.04N
3500N
35
3486.68N
30°
4247.8N
2452.5N
4905N

Normal = 4247.8 − 305.04N = 3942.76

3942.76 X .65 = 2562.79 N estatic μ_s = 0.6…

3942.76 x .55 = 2168.518N Cinematica μ_k = 0.…

2452.5 + 2562.79 N − 3486.65 = 1528.64N

Por tanto No es posible mover a la caja hacia arriba.



Problema Reto 2

750 Kg peso = 750 × 9.81 = 7357.5 N

$\theta = 45°$ $\mu_s = .95$ $\mu_k = 0.9$

7357.5 cos 45° × 0.95 =
= 4942.41 N

7357.5 sen 45° = 5202.53

hay una fuerza resultante hacia abajo Paralela al plano de 260.12 N por lo cual se resbala al soltar la piedra

para subir la piedra se nececita una fuerea de 5202.53 + 4942.41 N = 10 144 N cuesta arriba

4942.41 5202.53 45° 7357.5

Respuesta

F = 10 144 N Paralelo al plano hacia arriba

Roberto Hernández Cárdenas



$\pi = 3.14159265358979 3$

$e = 2.718281828459045$

e = base de los logaritmos naturales

$$1 \text{ radian} = \frac{180°}{\pi} = 57.2957795130823 2°$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x^2 - y^2) = (x-y)(x+y)$$

$$(x^3 - y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

ECUACION CUADRATICA $ax^2 + bx + c = 0$

Soluciones $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Área del círculo $= \pi r^2$

r = radio del círculo

Perímetro de la circunferencia $= 2\pi r$

longitud del arco de círculo $S = r\theta$

θ es el angulo en radianes

r
S
θ rad.
r

Triangulo

a
c
h
θ
b

Área $= \frac{1}{2} b h$

Área $= \frac{1}{2} (a \operatorname{seno}\theta) h$

$$\text{Área} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$



Volumen de la esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Volumen de un cilindro $= \pi r^2 h$

h= altura del cilindro

Volumen de un cono $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumen de Pirámide $= \frac{1}{3}$ Área de la base h

h = altura

Área de la base

Distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

distancia entre P_1 y $P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$(x_2, y_2) = P_2$

d

$y_2 - y_1$

$P_1 (x_1, y_1)$

$x_2 - x_1$



$$\text{Seno de } A = \frac{a}{c}$$

$$\text{Coseno de } A = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tangente de } A = \frac{a}{b}$$

$$\text{Cotangente de } A = \frac{b}{a}$$

$$\text{Secante de } A = \frac{c}{b}$$

$$\text{Cosecante de } A = \frac{c}{a}$$

(Triángulo rectángulo: lados a, b, c; ángulos A, B, $90°$)

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt[2]{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt[2]{c^2 - a^2}$$

$$\tan A = \frac{\operatorname{Sen} A}{\cos A}$$

$$\operatorname{Sen}^2 A + \cos^2 B = 1$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

LEYES DE EXPONENTES

$$a^p a^q = a^{p+q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

$$(ab)^p = a^p b^p$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$





LEYES DE LOGARITMOS

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^p = p \log_a M$$



Derivadas

$$\frac{d}{dt}(c) = 0 \qquad c = \text{CONSTANTE}$$

$$\frac{d}{dt}(cx) = c$$

$$\frac{d}{dt} ct^n = nct^{n-1}$$

$$\frac{d}{dt}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dt} \pm \frac{dv}{dt} \pm \frac{dw}{dt} \pm \cdots$$

$$\frac{d}{dt} cu = c\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(uv) = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(uvw) = uv\frac{dw}{dt} + uw\frac{dv}{dt} + vw\frac{du}{dt}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dt} - u\left(\frac{dv}{dt}\right)}{v^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(u^n\right) = n u^{n-1} \frac{du}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$ (REGLA DE LA CADENA)

$$\frac{d}{dt}\,\text{sen}\,u = \cos u\,\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\cos u = -\text{sen}\,u\,\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\tan u = \sec^2 u\,\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\log_a u = \frac{\log_a}{u}\,\frac{du}{dt}$$ si $a \neq 0$ y 1

$$\frac{d}{dt}\ln u = \frac{d}{dt}\log_e u = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dt}$$



$$\frac{d a^u}{dt} = a^u \ln a \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} e^u = e^u \frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} u^v = \frac{d}{dt} e^{v \ln u} = e^{v \ln u} \frac{d}{dt}(v \ln u) =$$

$$= v u^{v-1} \frac{du}{dt} + u^v \ln u \frac{dv}{dt}$$

Segunda derivada $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2 y}{dt^2}$

Tercera derivada $= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \frac{d^3 y}{dt^3}$

$$\int e^{u}\,du = e^{u}$$

$$\int a^{u}\,du = \int e^{u\ln a}\,du = \frac{e^{u\ln a}}{\ln a} = \frac{a^{u}}{\ln a} \quad \text{si } a>0 \text{ y } a\neq 1$$

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$$

$$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u$$

$$\int \tan u\,du = \ln \sec u = -\ln \cos u$$

$$\int \frac{du}{(u^{2}+a^{2})} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{(u^{2}-a^{2})} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} \quad \text{si } u^{2}>a^{2}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}} = \ln\left(u+\sqrt{u^{2}+a^{2}}\right) \quad \text{o} \quad \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^{2}-a^{2}}} = \ln\left(u+\sqrt{u^{2}-a^{2}}\right)$$



INTEGRALES INDEFINIDAS

$$\int a\,dt = at$$

$$\int a f(t)\,dt = a\int f(t)\,dt$$

$$\int (u \pm v \pm w \pm \dots)\,dt = \int u\,dt \pm \int v\,dt \pm \int w\,dt \pm \dots$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int f(u)\,du$$

$$\int F\{f(t)\}\,dt = \int F(u)\frac{dt}{du}\,du = \int \frac{F(u)}{f'(t)}\,du \quad \text{donde } u = f(t)$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \quad \text{donde } n \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u \quad \text{donde } u>0 \text{ o } \ln(-u) \text{ si } u<0$$



$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

$$\int e^{ax}\,dt = \frac{e^{at}}{a}$$

$$\int t e^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a}\left(t-\frac{1}{a}\right)$$

$$\int t^2 e^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a}\left(t^2-\frac{2t}{a}+\frac{2}{a^2}\right)$$

$$\int \ln t\,dt = t\ln t-(t)$$

$$\int t\ln t\,dt = \frac{t^2}{2}\left(\ln t-\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$





INTEGRALES DEFINIDAS

$$\int_a^b \{ f(t) \pm g(t) \pm h(t) \pm \ldots \} dt =$$

$$= \int_a^b f(t)\, dt \pm \int_a^b g(t)\, dt \pm \int_a^b h(t)\, dt \pm \ldots$$

$$\int_a^b c\, f(t)\, dt = c \int_a^b f(t)\, dt$$

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0$$

$$\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt$$

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$$



VECTORES

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

donde $\vec{A} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

y $\vec{B} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen} \theta \qquad 0 \leq \theta \leq$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$$

$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

$|\vec{A} \times \vec{B}|$ = área de paralelogramo con lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = \vec{C}\{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})\} - \vec{D}\{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\} =$$

$$\vec{B}\{\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})\} - \vec{A}\{\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{D})\}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

$$\frac{d}{dt}\{\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})\} = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{A}\cdot\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\times\vec{C}\right) + \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{dt}\right)$$

$$\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} = A\frac{dA}{dt}$$

$$\vec{A}\cdot\frac{d\vec{A}}{du} = 0 \quad \text{si } |\vec{A}| = \text{Constante}$$



distancia entre dos puntos en el espacio

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\text{dist } \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{23} + \ldots + (-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Nota si dos renglones o columnas son propocionales lineal mente el determinante es cero



Centro de Gravedad

$$x_{c.m} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \qquad y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \qquad z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

deben proporcionarse los limites de integración

Momento de inercia

alrededor del eje x $\quad I_x = \int y^2\,ds$

alrededor del eje y $\quad I_y = \int x^2\,ds$

alrededor del origen $\quad I_o = \int (x^2 + y^2)\,ds$

Para un solido de masa m alrededor del plano YZ

$$I_{YZ} = \int x^2\,dm$$

Para un solido de masa m alredeor del plano XZ

$$I_{XZ} = \int y^2\,dm$$

Para un solido de masa m alrededor del plano XY

$$I_{XY} = \int z^2\,dm$$

Para un solido de masa m alrededor del eje x $I_x = I_{XZ} + I_{XY}$ ETC.

(deben proporcionar se los limites de integración)



$\vec{F} = m\vec{a}$ Segunda ley de Newton

Momento de Inercia de un cuerpo

Momento $= \alpha I = \tau = T$

donde $\alpha =$ aceleracion angular

Momento $= \alpha \int x \, dm \, x$

donde $\int x^2 dm = I =$ momento de inercia de un cuerpo



CINEMATICA

$$\vec{Vel}\ inst = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

las componentes axiales de la velocidad son

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

la velocidad resultante tiene una magnitud

$$|\vec{V}| = \sqrt[2]{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

la aceleracion instantanea es

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

las componentes axiales de la aceleración son

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$



Movimiento Rectilíneo

Velocidad $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

$$\vec{v} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + \vec{V}_z\hat{k}$$

Aceleración $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$

desplazamiento $\vec{S}$

$\vec{S} = \vec{S}_2 - \vec{S}_1$ donde $S_2 - S_1 = \int_{t_1}^{t_2} V\,dt$

Aceleración uniforme

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t$$

Velocidad adquirida $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$



Velocidad adquirida

$$V_2 - V_1 = 2\int_{s_1}^{s_2} a\, ds$$

Aceleración uniforme

$$V_{final} = at + v_0$$

$$v_{final} = \sqrt[2]{(2as + V_0^2)}$$

tiempo para el desplazamiento $\vec{s}$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$t_2 - t_1 = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{v} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{a}$$

Aceleración uniforme $t = \dfrac{\sqrt[2]{(2as + v_0^2)} - v_0}{a}$

Aceleracion requerida para un desplazamiento $\vec{s}$ en un tiempo $= t$

$$a = \frac{2(s - v_0 t)}{t^2}$$

Ecuaciones del movimiento en una dimensión

$$V_x = V_{x0} + a_x t$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(V_{x0} + V_x)t$$

$$x = x_0 + V_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$V_x^2 = V_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Tiro parabolico

$$V_x = V_0 \cos\theta$$

$$V_y = V_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$



ROTACION CON EJE FIJO

Velocidad angular ω $\qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$

Aceleración angular α $\qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

desplazamiento angular $\Delta\theta$ $\qquad \theta_2 - \theta_1 = \int_{t_1}^{t_2} \omega\, dt$

Aceleracion angular uniforme $\qquad \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$

Velocidad angular adquirida $\Delta\omega$ $\qquad \omega_2 - \omega_1 = \int_{t_1}^{t_2} \alpha\, dt$

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \alpha\, d\theta$$

aceleracion uniforme

$$\omega_f = \alpha t + \omega_0$$

$$\omega_f = (2\alpha\theta + \omega_0^2)^{1/2}$$

Tiempo para desplazamiento $\Delta\theta$ $\qquad t_2 - t_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{dt} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{a}$

Aceleración uniforme $\qquad t = \frac{(2\alpha\theta + \omega_0^2)^{1/2} - \omega_0}{a}$

Aceleracion angular requerida para un desplazamiento θ en un tiempo t $\qquad \alpha = \frac{2(\theta - \omega_0 t)}{t^2}$



Relacion entre velocidad, velocidad angular, vector de posicion $\vec{r}$, aceleracion angular, aceleracion tangencial y aceleracion normal.

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Movimiento de un proyectil

$$x = (v_0 \cos\theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \frac{gt^2}{2}$$

$$V = (V_0^2 - 2gy)^{1/2} \qquad V_x = V_0 \cos\theta \qquad V_y = V_0 \operatorname{sen}\theta - gt$$

$$h = \frac{V_0^2}{2g} \operatorname{sen} 2\theta \qquad r = \frac{V_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta \qquad T = \frac{2V_0}{g} \operatorname{sen}\theta$$

T = Tiempo total de vuelo

v_0 = Velocidad inicial

g = aceleracion hacia abajo

r = alcance maximo

Dinámica

1ª ley $\quad mv = \text{constante}$

2ª ley $\quad \vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

3ª ley $\quad \vec{F} = -\vec{F}_R$

$\vec{F} = m\vec{a} \quad$ 2ª ley

Trabajo, Potencia y energía

$$W_K = \int_{x_1}^{x_2} F \cos \alpha \, ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds$$

Trabajo hecho por un momento T

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_1 r \, d\theta$$

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad W = |\vec{F}||\vec{s}| \cos \theta$$ donde θ separa a $\vec{F}$ de $\vec{s}$

$$\text{Potencia} = \frac{\text{Trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{W_K}{\Delta t}$$



Ecuaciones de Dinamica Lineal.

lineal

$F = ma$

Impulso $= F\Delta t$

$Imp = m(v_2 - v_1)$

Cambio de Movimiento lineal $m(v_2 - v_1) = Ft$

Trabajo W $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

Potencia $P = Fv$

Energia cinetica $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

Cambio de energia cinetica $\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = F(s_2 - s_1)$



Ecuaciones de Dinamica Rotación

$\tau = T = I\alpha = mK^2\alpha$ Torque o momento $= \tau = T$

Impulso rotacional $= T t = \tau \Delta t$

Impulso $= I(\omega_2 - \omega_1)$

$I(\omega_2 - \omega_1) = T t$ Cambio de momento angular

$W_K = T\theta$ W_K = Trabajo realizado por un momento T

$P = T\omega$ P = Potencia rotacional

$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} mK^2\omega^2$ Ec = Energia cinetica de rotacion.

Cambio de energia cinetica $= \frac{1}{2} I(\omega_2^2 - \omega_1^2) = T(\theta_2 - \theta_1)$



Momento angular Fuerza y momento de rotación

$\gamma = T =$ momento de rotacion

$\vec{\gamma} = \vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

$\frac{dl}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$

$l =$ momento angular

$T = \frac{dl}{dt}$

$\Delta \vec{P} = \vec{F} \Delta t$

$P =$ Cantidad de movimiento lineal

$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$

$d\vec{L} = \vec{T} dt$ $L =$ momento angular

$\vec{\tau} = \vec{T} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

$\Delta \vec{L} = \vec{T} \Delta t$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1 NO ES POSIBLE SUMAR CANTIDADES VECTORIALES CON CANTIDADES ESCALARES.

1.2 $3\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$

1.3 ES EL VECTOR CERO

$\vec{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ Su sentido puede ser cualquiera.

1.4 $\hat{e}_A = 0.3984\hat{i} + 0.6972\hat{j} + 0.5976\hat{k}$

1.5 Si es correcta

1.6 Si es correcta el producto punto es conmutativo

$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

1.7 Si es lo mismo, la igualdad es correcta

1.8 $\theta = 96.3969^\circ$

1.9 $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = 89$

1.10

$$\vec{A}-\vec{B} = 5\hat{j}-8\hat{k}$$

1.11

$$(\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) = |\vec{A}-\vec{B}|^2 = 89$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} - 2\vec{A}\cdot\vec{B} = 89$$

$$\therefore |\vec{A}-\vec{B}|^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} - 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

1.12

$$\vec{A}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$$

porque $\vec{A}\times\vec{B}$ es un vector perpendicular al vector $\vec{A}$ y al hacer el producto punto entre el vector $\vec{A}$ y un vector perpendicular a el resulta cero

1.13 $\vec{C}\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) = 0$ POR LA MISMA RAZON QUE EN EL PROBLEMA 1.12

1.14 la misma razon que en el ejemplo 1.12 y 1.13

1.15 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = -\vec{A}\cdot(\vec{C}\times\vec{B}) =$

$$= -\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C}) = -\vec{C}\cdot(\vec{B}\times\vec{A})$$

En todos los casos resulta $= 14$



1.16

a) $= -71\hat{i} - 196\hat{j} - 246\hat{k}$

b) $= -71\hat{i} - 196\hat{j} - 246\hat{k}$

$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{C})\vec{A}$

1.17

a) $-206\hat{i} - 895\hat{j} + 607\hat{k}$

b) $-206\hat{i} - 895\hat{j} + 607\hat{k}$

$\therefore \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$

1.18

a) 421
b) 421

$\therefore (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) =$

$= (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})) \cdot (\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}))$

1.19 distancia = 16.519 km



1.20 $\vec{A}+\vec{B}=(13.9\hat{i}-11.7\hat{j}+10.6\hat{k})$

1.21 $8\hat{i}+0\hat{j}+17\hat{k}$

1.22 $1.1953\hat{i}+0.717\hat{j}-1.435\hat{k}$

1.23 55.19 Unidades cuadraticas.

1.24 $256\ u^3$

1.25 $-2.754\hat{i}-0.652\hat{j}-2.826\hat{k}$

1.26 Ángulo $\theta = 69.8259°$

1.27 $\hat{i}(-4+24)-\hat{j}(-6+18)+\hat{k}(-12-6)$

$= 20\hat{i}-12\hat{j}-18\hat{k}$

1.28 Área $= 21.9772\ u^2$

1.29 $-27\hat{i}-6\hat{j}-13\hat{k}$

1.30 $\vec{0}$

1.31 $\vec{0}$

1.32 POR QUE SON VECTORES PARALELOS Y EL PRODUCTO VECTORIAL RESULTA NULO $\vec{0}$



1.33 RESULTADO ES IGUAL A 1
Porque $0.57732\hat{i} + 0.57732\hat{j} + 0.57732\hat{k}$ es un vector unitario
1.34 RESULTADO ES $\vec{0}$
Porque es el producto vectorial entre dos Vectores paralelos. y eso resulta cero $\vec{0}$

1.35 RESULTADO a) 0.8164 es la magnitud.

b) el resultado del producto punto entre

$(0.4714\hat{i} - 0.4714\hat{j} - 0.4714\hat{k}) \cdot (0.4714\hat{i} - 0.4714\hat{j} - 0.4714\hat{k})$

es 0.8164

c) $(.8164)^2 = 0.6666$
d) .6666 es .8164 veces .8164
1.36 a) EL RESULTADO es CERO (0)

b) EL RESULTADO ES CER (0)

c) RESULTA CERO PORQUE $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
o $\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
es el producto punto entre dos vectores perpendiculares y $\cos 90° = 0$ Portanto el resultado es cero

1.37 el ángulo $\theta = 36.554°$ separa a los vectores $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ y $9\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$

1.38

a) 5.385

b) 11.7898

1.39: (5.385)(11.7898) sen 36.554° = 37.8122

37.8122

1.40 la magnitud de

$|(2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}) \times (9\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k})| = 37.81$

es lo mismo que

$|2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}|\,|9\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k}|$ Sen 36.554° = 37.81

del problema 1.39

1.41 la magnitud de un producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ es igual a $|\vec{A}||\vec{B}|$ Sen θ

1.42 la magnitud de todo vector unitario es uno

magnitud del vector unitario

del vector $5.7735\hat{i} + 5.7735\hat{j} + 5.7735\hat{k}$

es uno.



1.43 $0.57735\hat{i}+0.57735\hat{j}-0.57735\hat{k}$

1.44 la magnitud del vector $5.773\hat{i}+5.773\hat{j}-5.773\hat{k}$ es 10 y la relación que hay entre la magnitud de este vector y la magnitud de su vector unitario es por tanto 1:10.

1.45 $(\vec{D}\times\vec{A})\cdot(\vec{C}\times\vec{B})=(\vec{D}\cdot\vec{C})(\vec{A}\cdot\vec{B})-(\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{D}\cdot\vec{B})$

$= -150$

1.46 EL VOLUMEN DE UN PARALELEPIPEDO FORMADO POR VECTORES COPLANARES ES CERO

1.47 $A\cdot(B\times C)$

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(-1-14)+5(2-28)+3(4+4)$$

$$= -60-130+24 = |-166|$$

Volumen = 166 unidades cubicas

1.48 EL VOLUMEN ES CERO

1.49 LOS VECTORES SON COPLANARES POR TANTO EL VOLUMEN ES CERO



1.50 $12t^2\hat{i} + (8t^3 - 15t^2)\hat{j} + (6t+3)\hat{k}$

1.51 $12t^2\hat{i} + 2\hat{j} + (24t+10)\hat{k}$

1.52 $2\hat{i} + 3\hat{j}$ Para $t=1$

$4\hat{i} + 6\hat{j}$ Para $t=2$

$\vec{0}$ Para $t=0$

$6i + 9j$ Para $t=3$

$(2\hat{i}+3\hat{j})$ $t=1$

$(4\hat{i}+6j)$ $t=2$

$6i+9j$ $t=3$

1.53

$2i + 3j$ Para $t=1$

$4i + 12j$ Para $t=2$

$\vec{0}$ Para $t=0$

1.54 $25i - j$ Para $t=1$

$25\hat{i} - 4\hat{j}$ Para $t=2$ $25i - 16j$ Para $t=4$

$25i$ Para $t=0$

$25i - 9j$ Para $t=3$



PROBLEMA RETO 1

$$\vec{A} = \cos\varphi\,\hat{i} + \text{sen}\,\varphi\,\hat{j}$$

$$\vec{B} = -\text{Sen}\,\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\varphi & \text{Sen}\varphi & 0 \\ -\text{Sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi) = \hat{k}$$

$$\hat{B} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\text{Sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(\cos\varphi) - j(-\text{Sen}\,\varphi) + 0\hat{k}$$

$$= \cos\varphi\, i + \text{Sen}\varphi\, j = \vec{A}$$

$$\hat{k} \times A = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\varphi & \text{Sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(-\text{Sen}\varphi) - \hat{j}(\cos\varphi) + 0\hat{k}$$

$$= -\text{Sen}\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j} = \vec{B}$$

la magnitud de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es uno porque

$\text{Sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ Por identidad Trigonometrica

PROBLEMA RETO 2

RESPUESTA

$$|\vec{A}+\vec{B}|^2 = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) =$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} =$$

$$= |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

PROBLEMA RETO 3

en el caso de

$$(3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\cdot((3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\times(3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}))$$

es cero porque $(3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\times(3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k})$ es perpendicular a $3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ portanto el producto punto es cero

enel caso de $(3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k})\times(9\hat{i}-12\hat{j}-6\hat{k})$ son vectores paralelos por tanto el producto cruz es cero.



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1 6.9867 slug

2.2 5.5772 ft

2.3 90720 gr

2.4 14312.79 N

2.5 4.628×10^{10} mm

2.6 6886400 ft^2

2.7 263.76 m^3

2.8 467.82 Nm

2.9 59.033 $\frac{mi}{h}$

2.10 1390393.701 $\frac{in}{min^2}$

2.11 0.2175 $\frac{lb}{in^2}$

2.12 a) $\frac{Nm^2}{Kg^2}$ b) $\frac{lb_f\, ft^2}{slug^2}$



2.13 Tiene unidades Nm
llamada Joule.

2.14 K debe tener unidades de fuerza sobre distancia

EN (SI) $\frac{N}{m}$ y en S. ingles $\frac{lb}{ft}$

2.15

$\left(Kg\ \frac{m}{s}\right)$ $\left(Slug\ \frac{ft}{s}\right)$ etc.

2.16 $vt + at^2$ es dimensionalmente congruente.
por tanto es correcta.

2.17 $5.976725161 \times 10^{19}$ m

2.18 48 000 000

2.19 24808.32 lt

2.20 0.76825856 $\frac{Nm}{s}$

2.21 6.225858 $\frac{Nm}{Kg}$

2.22 $38\,282\,117.4 \; \frac{in^3}{slug}$

2.23 $0.0007708 \; \frac{N s}{m^2}$

2.24 342000 Watts

2.25 $1940.37 \; \frac{slug}{ft^3}$

2.26 31500 adimensional.

2.27 $3.5396 \; Kg \frac{m}{s^2}$

2.28 766.656 N

2.29 $0.5434 \; \frac{slug}{ft^2}$

2.30 $300{,}000 \; \frac{N m}{s^6}$

2.31 $Kg \frac{m^2}{s^3}$ o $N \frac{m}{s}$ o $JouN \frac{m}{s} \frac{m}{s}$

o Watt son equivalentes.



2.32 $0.050025 \frac{lb}{in^2}$

2.33 significa que hay un incremento en la rapidez de 45 m/s cada segundo que pasa.

2.34 $6654.48 \frac{N s^2}{m}$

2.35 136080 gr

2.36 2π radianes equivale a un angulo de 180°
y 2π es 6.2831
aunque 2π radianes es numericamente igual a 2π ya que el radian es unidad adimensional.

2.37 2 m(0.67 rad) y 2m(0.67)

el resultado es el mismo 1.34 m

2.38 $(-18\hat{i} + 16\hat{j} - 2\hat{k})\frac{m}{s}$



2.39 $2.022151727 \times 10^{29} \ \frac{Kg\,m}{s}$

2.40 54 Nm

2.41 2112.6 h

2.42 $66.657 \ \frac{mi}{h}$

2.43 $315 \ \frac{m}{s^2}$

2.44 $12250 \ Kg \ \frac{m}{s}$

2.45

98034000.0541354000836321 km



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1 $V_{Marte} = 86887.91 \frac{km}{h}$

3.2 $\vec{v} = -55213.42 \frac{ft}{min} \hat{i}$

3.3 a) $v = 3765.98 \frac{mi}{h} \hat{j}$

b) 514.35 s desde que empieza a frenar

c) 432945.76 m

3.4 rapidez media $= 550.65 \frac{ft}{min}$

3.5 a) $\vec{a} = 1.543209 \times 10^{-6} \frac{m}{s^2}$

b) $0.54683 \frac{ft}{min}$

3.6

a) EL RELOJ MARCA LAS 13:05

b) EL TREN 1 RECORRE 6670 m
EL TREN 2 RECORRE 8330 m



3.7

a) $\vec{r}(14\,s) = 4.34\,m\,\hat{i} + 7.24\,m\,\hat{j} + 17.16\,m\,\hat{k}$

b) $t = 8.47156\,s$

c) $\vec{v} = 0.06\,\frac{m}{s}\,\hat{i} + 0.16\,\frac{m}{s}\,\hat{j} + 0.44\,\frac{m}{s}\,\hat{k}$

3.8

a) $\vec{a} = 43.232\,\frac{ft}{s^2}\,\hat{i}$

b) $t = 4.896\,s$

3.9

a) distancia = 666.55 m

b) distancia = 400 m

3.10 a) rapidez V = 60 m/s

b) distancia = 4800 m

3.11 RAPIDEZ $V = 62.35\,\frac{km}{h}$





3.12 a) distancia = 480.23 Km

b) $|\vec{a}| = 30375 \frac{Km}{h^2}$

c) t = 0.01582 h

3.13 distancia = 189.76 m

3.14 a) altura del edificio = 95.6 m

b) t = 4.4147 s

3.15 tiempo = 8.282 s

3.16 a) t = 7.0385 s

b) distancia = 2393.09 m

3.17 a) altura maxima = 662.38 m

b) alcance maximo = 3807.4092 m

c) t = 23.24 s



3.18 a) $\vec{V}_Y = 1383 \frac{m}{s} \hat{j}$

b) altura maxima = $34\,187.05\ m\ \hat{j}$

c) alcance horizontal = $97551.4\ m\ \hat{i}$

3.19 $y(x) = 0.839x - 3.0912\times10^{-3}x^2$

3.20 a) $\theta = 33.54°$

b) $t = 1.042\ s$

c) Altura de choque = $10.9387\ m$

3.21 a) $t = 4.6744\ s$

b) $V_0 = 3.799987 \frac{m}{s}$ = Rapidez

3.22 a) $t = 0.6736123\ s$

b) dist = $1.01418\ m$

3.23 a) $t = 5.041\ s$

b) $\vec{V} = 6.8566\hat{i} \frac{m}{s} - 3.3555 \frac{m}{s}\hat{j}$

3.24 a) $V_T = 0.698061\ m/s$

b) $\omega = 3.4903\ rad/s$

c) $a_c = 2.436\ m/s^2$

d) $t = 2.31594\ min$



3.26

$\vec{V}_A = -1.175 \frac{m}{s}\hat{i} + 0.84425 \frac{m}{s}\hat{j} + 2.1878 \frac{m}{s}\hat{k}$

3.27

$V_T = 11.0736 \frac{m}{s}$

3.28

a) $-30 \frac{m}{s}\hat{i} + 21 \frac{m}{s}\hat{j} = \vec{V}_T$

b) $V_T = 7208.5958 \frac{ft}{min}$

3.29

a) $\vec{\alpha} = -4.75 \frac{rad}{s^2}\hat{k}$

b) $\vec{\omega} = -8.37 \frac{rad}{s}\hat{k}$

3.30

a) Desplazamiento $= 6\hat{i} + 9\hat{j}$

b) $\vec{v} = 6\hat{i}\frac{m}{s} + 9\frac{m}{s}\hat{j}$

c) $\vec{v}_{(1.5s)} = 6\frac{m}{s}\hat{i} + 9\frac{m}{s}\hat{j}$

d) $\vec{a}_{(2s)} = 6\frac{m}{s^2}\hat{j}$

e) $\vec{a} = 4.8\frac{m}{s^2}\hat{e}_\theta + 3.5999\frac{m}{s^2}\hat{e}_r$

f) radio de curvatura $\rho = 35.154$ m



3.31

a) Ya que la rueda esta tocando el suelo con el punto A de su periferia la velocidad del centro de la rueda hacia la derecha en el sentido ↻ se anula con la velocidad Tangencial de la rueda en el punto A porque son iguales en magnitud y de sentidos contrarios ∴ la velocidad del punto A es cero.

b) $\vec{a}_A = -34.175196 \frac{ft}{s^2} \hat{i} + 1261.39 \frac{ft}{s^2} \hat{k}$

3.32

a) $\vec{v}(t) = 4t\hat{i} + 4t\hat{j} + 4t\hat{k}$

b) $\vec{a}(3s) = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

c) $\vec{a}_c(3s) = \vec{0}$

d) radio de curvatura $\rho \to \infty$ tiende a infinito porque en realidad el movimiento es uniformemente acelerado en linea recta Por tanto la curvatura es cero y el radio de curvatura es muy grande o tiende a infinito.



3.33

a) $|\vec{a}_T| = 0.4025 \frac{m}{s^2}$

b) $|\vec{a}_c| = 2.3786 \frac{m}{s^2}$

c) $|\vec{a}_{TOTAL}| = 2.3695 \frac{m}{s^2}$

3.34

a) $|\vec{\alpha}| = 0.72722 \frac{rad}{s^2}$ el modulo es positivo aunque el sentido de la aceleracion angular es contrario al de la velocidad angular inicial.

b) $|\vec{a}_T| = 0.1818 \frac{m}{s^2}$ en sentido contrario al movimiento de la particula.

3.35

$|\vec{a}| = |\vec{a}_c| = 0.1315947 \frac{m}{s^2}$

3.36

$$\vec{r}(t) = (4P^3t^3 + 3P^2t^2)\hat{i} + Pt\hat{j} + PT\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = (12P^3t^2 + 6P^2t)\hat{i} + P\hat{j} + P\hat{k}$$

$$\frac{d^2(r)}{dt^2} = \vec{a}(t) = (24P^3t + 6P^2)\hat{i}$$



3.37

$V_T = 4.801 \ \frac{m}{s}$

$V_N = 12.08 \ \frac{m}{s}$

$a_T = 14.7973 \ \frac{m}{s^2}$

$a_n = 19.3128 \ \frac{m}{s^2}$

3.38

a) $\vec{V} = 0.09 \ \frac{m}{s} \ \hat{i} + 0.36 \ \frac{m}{s} \ \hat{j}$

$\vec{a} = -1.53 \ \frac{m}{s^2} \ \hat{K}$

b) $\vec{\omega} = -4 \ \frac{rad}{s} \ \hat{i} + 1 \ \frac{rad}{s} \ \hat{j} + 2 \ \frac{rad}{s} \ \hat{K}$

$|\vec{\omega}| = 4.582 \ \frac{rad}{s}$

3.39

$\vec{v}_A = -19.79 \ \frac{m}{s} \ \hat{i} + 0.398945 \ \frac{m}{s} \ \hat{j} + 12.93 \ \frac{m}{s} \ \hat{K}$

$\vec{a}_A = -34.33178 \ \frac{m}{s^2} \ \hat{i} - 4.148 \ \frac{m}{s^2} \ \hat{j} - 59.391 \ \frac{m}{s^2} \ \hat{K}$



3.40

a) $V = 23.321518 \frac{m}{s}$

b) distancia $= 72.48\,m$

c) $V = 23.882692 \frac{m}{s}$

3.41

Considerando la velocidad inicial de $4\frac{m}{s}\hat{i} + 3\frac{m}{s}\hat{j}$

la posicion de la particula a los 3s es

$$r(3s) = 30\,m\hat{i} + 22.5\hat{j} + 72.9\hat{k}$$

3.42

$$\vec{v} = -12.07485\hat{e}_r + 3296.056\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = 90960.\hat{e}_r - 4032.099\hat{e}_\theta$$

3.43

$$V = \sqrt[2]{\left(50\,\theta\, e^{5\theta^2} \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(5 e^{5\theta^2} \frac{d\theta}{dt}\right)^2}$$



3.44

a) $\vec{V}(1s) = -5\pi\,\hat{j}$

b) $\vec{a}(2s) = -5\pi^2\,\hat{i}$

3.45

a) $\vec{V}(t) = 164.87\cos 2\pi t\,\hat{j} + 61.84\cos 2\pi t\,\hat{k}$

$\vec{a}(t) = -1035.9136\,\text{Sen}\,2\pi t\,\hat{j} - 388.56\,\text{Sen}\,2\pi t\,\hat{k}$

b) $|\vec{V}(5s)| = 53.68\,\frac{m}{s}$

$|\vec{a}(4s)| = 0\,\frac{m}{s^2}$

3.46

a) $\vec{V} = -6i + \left(3\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi t\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t\right)\hat{j} + \left(3\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi t\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t\right)\hat{k}$

Para $t=5$ $\vec{V}(5s) = -6i - 23.56\,\hat{j} - 23.56\,\hat{k}$

$\vec{a} = 0\hat{i} + \left(-\frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{8}\pi^2 t\cos\frac{\pi}{2}t\right)\hat{j} + \ldots$

$\ldots + \left(-\frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{4}\pi^2 t\cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{2}\pi\,\text{Sen}\,\frac{\pi}{2}t\right)\hat{k}$

Para $t=4s$ $\vec{a}(4s) = 0\hat{i} - 12\pi^2\hat{j} - 3\pi^2\hat{k}$

3.47

$$\vec{V} = -\frac{6\omega \operatorname{Sen}\omega t}{(3-\cos\omega t)^2}\,\hat{e}r + \frac{6\omega}{3-\cos\omega t}\,\hat{e}\phi$$

$$\vec{a} = \left[\frac{(3-\cos\omega t)^2\,\omega(-6\omega\cos\omega t) + 12\omega^2 \operatorname{sen}^2\omega t\,(3-\cos\omega t)}{(3-\cos\omega t)^4} + \dots\right.$$

$$\left.\dots - \frac{6}{(3-\cos\omega t)}\,\omega^2\right]\hat{e}r + \dots$$

$$\dots + \left[2\left(-\frac{6\omega \operatorname{sen}\omega t}{(3-\cos\omega t)^2}\right)\omega\right]\hat{e}\phi$$



3.48

$\vec{V} = 30\,\hat{e}_\varphi - 8\hat{k}$

$\vec{a} = -15t^2\,\hat{e}_r$

3.49

$\rho = 16.73\,m$

3.50

$\vec{V} = 0\hat{e}_r - \frac{8}{16}\pi\omega\,\text{Sen}\,\omega t\,\hat{e}_\theta + 8\omega\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\cos\omega t\right)\hat{e}_\phi$

$\vec{a} = \left(-\frac{8}{16^2}\pi^2\,\text{Sen}^2\omega t - 8\left(\frac{\pi}{16}\right)^2\text{Sen}^2\omega t\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\right)\hat{e}_r + \ldots$

$\ldots - \frac{8}{16}\pi\omega^2(\cos\omega t) - 8\omega^2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\cos\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\right)\hat{e}_\theta + \ldots$

$\ldots - \pi\,\text{Sen}(\omega t)\,\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{16}\cos\omega t\right)\right)\hat{e}_\phi$

3.51

$\rho = 10454.52$

3.52 $\rho = 0.29026$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1 $\vec{v} = 11.2171 \frac{m}{s} \hat{i}$

4.2

el suelo ejerce una fuerza de reacción sobre la rueda

$\vec{F}_R = 12{,}962.95 \text{ N} \hat{i}$

y la superficie de la rueda ejerce una fuerza de acción sobre el suelo $\vec{F}_A = -12{,}962.95 \text{ N} \hat{i}$

donde $\vec{F}_R = -\vec{F}_A$

4.3

Suponiendo que el peso del Tracto camión recae sobre las ruedas de tracción

el coeficiente $\mu_e = 0.1887$

4.4

$\theta = 0.3381 \text{ rad}$

4.5

$\vec{F} = 4397.55 \text{ N} \hat{k}$

4.6

la fuerza promedio $\vec{F} = 3{,}775.18 \text{ N} \hat{j}$

4.7

$\vec{v} = 11.26 \frac{m}{s} \hat{j}$



4.8

$3383.85 N \hat{k}$

4.9

Cuando $\vec{a} = 6 \text{ pies}/s^2 \hat{k}$ el peso que marcan las Basculas son

Peso A = 261.11 lb

Peso B = 221.77 lb

Cuando $\vec{a} = -8 \text{ pie}/s^2 \hat{k}$

el peso que marcan las basculas son

Peso A = 165.37 lb

Peso B = 140.57 lb

4.10

F = 161.32 N hacia la derecha.

4.11

$\vec{F} = 126.76 \vec{N}$ hacia la derecha.

4.12

$|\vec{F}| = 68.82 \vec{N}$

4.13

$\vec{\omega} = 1.8135 \frac{rad}{s} \hat{k}$

4.14

$$\vec{a} = 10 \frac{m}{s} \hat{i}$$

4.15

$$\vec{a} = 1.459468 \frac{m}{s} \hat{i} + 1.459468 \frac{m}{s} \hat{j}$$

donde la magnitud de la aceleración $|\vec{a}| = 2.064\ m/s^2$

4.16

para el cuerpo A la aceleración es

a) $\vec{a}_A = \left(-1.041992 \frac{m}{s^2} \hat{i} + 1.041992 \frac{m}{s^2} \hat{j}\right)$

$\vec{a}_B = -1.4364 \frac{m}{s^2} \hat{j}$

b) $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = 1.4364 \frac{m}{s^2}$

y en el problema anterior $|\vec{a}| = 2.064 \frac{m}{s^2}$

Por tanto comparativamente $|\vec{a}_A|$ y $|\vec{a}_B|$ son menores que $|\vec{a}|$!

c) la razon por la que no resulta lo mismo es porque cuando se aplica la fuerza debida a un peso la masa de ese peso forma parte del sistema y por tanto hay mas inercia y sera mas dificil acelerar al mismo y cuando se aplica una fuerza no hay incremento de masa en el sistema portanto se acelera más.



4.17

$$|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = 0.5\,\frac{m}{s^2}$$

4.18

$$\vec{a}_{m_1} = -2.2959\,\frac{m}{s^2}\,\hat{k}$$

$$\vec{a}_{m_2} = 2.7134\,\frac{m}{s^2}\,\hat{k}$$

$$\vec{a}_{m_3} = -0.417436148\,\frac{m}{s^2}\,\hat{k}$$

4.19

$$\vec{v} = 26.1107\,\frac{m}{s}\,\hat{i} - 6.6458\,\frac{m}{s}\,\hat{j}$$

4.20

$$\vec{v} = 13.7968\,\frac{m}{s}\,\hat{i} - 6.6458\,\frac{m}{s}\,\hat{j}$$



4.21

$$\vec{a}_{globo} = 2.30968 \frac{m}{s^2} \hat{k}$$

4.22

a) TIENE QUE REBOTAR LA ESFERA CINCO VECES PARA QUE LA ALTURA DEL REBOTE SEA 0.090145152 m LO CUAL ES CERCANO A 9 cm

b) en el primer rebote la altura es 0.618 m
en el 2° rebote la altura es 0.381924 m
en el 3° rebote la altura es 0.236029032 m
en el 4° rebote la altura es 0.145865941 m
en el 5° rebote la altura es 0.090145152 m

$$\frac{1}{0.618} = 1.618$$

$$\frac{.618}{0.3819} = 1.618$$

$$\frac{.3819}{0.2360} = 1.618$$

$$\frac{.236}{0.1458} = 1.618$$

$$\frac{0.1458}{0.090145} = 0.618$$



4.23

las velocidades v_A y v_B despues del choque son. ya que e=1

$\vec{v}_A = 0 \frac{m}{s} \hat{j}$

$\vec{v}_B = 20 \frac{m}{s} \hat{j}$

4.24

la maxima rapidez es $|\vec{v}| = 31.33396 \frac{m}{s}$

4.25

la maxima rapidez es $|\vec{v}| = 16.13529 \frac{m}{s}$

4.26

$\Delta L_{R1} = 24.9$ cm

$\Delta L_{R2} = 18.7328$ cm

4.27

r_c = radio de curvatura

$r_c = 49.8599$ m



4.28

Respuesta $\vec{\omega} = 5.8596 \frac{rad}{s}$

$\theta = 8.2132^\circ$

4.29

el Peso del cuerpo A $P_A = 322.8433N$

4.30 PROBLEMA 30

Respuesta $v_{t2} = 47.9979 \frac{m}{s} \hat{i}$

4.31

en la dirección horizontal no sentirá fuerza alguna y en dirección vertical sentira una fuerza con magnitud de 2684.7N

4.32

DESPLAZAMIENTO = $0m\,\hat{i} + 99.4671m\,\hat{j} + 17.5387m\,\hat{k}$

4.33

la distacia recorrida es.

$d = 37.9518\ m$



4.34

EL CABLE FALLA PORQUE SOLO PUEDE RESISTIR 1721.65 N Y EL CABLE DEBE RESISTIR MÁS DE 1765.8 N

4.35

$$\vec{F} \doteq -14.8149\,N\,\hat{k}$$

4.36

la magnitud de la fuerza media que ejerce cada liga es $|\vec{F}| = 9.375N$

4.37

a) $|\vec{v}| = 10.0762\ \frac{m}{s}$

b) $|\vec{F}| = 9N$



4.38

a) La magnitud de la fuerza que ejerce la cuerda sobre B $|\vec{F}_B| = 2916 \text{ N}$

b) la magnitud de la fuerza que ejerce el cable sobre la A es

$$|\vec{F}_A| = 1620 \text{ N}$$

4.39

$$\vec{v}_f = -2.6478 \ \frac{m}{s} \ \hat{k}$$

4.40

a) $W_K = 75$ Joules

b) $P_{OT} = 0.02011$ hp

4.41

$$K = 23621.94 \ \frac{N}{m}$$

4.42

a) $\vec{v}_{Af} = 1.1949 \ \frac{m}{s} \ \hat{i}$, $\vec{v}_{Bf} = -4.9 \ \frac{m}{s} \ \hat{i}$

b) $\beta = 0.8036$ rad

c) $\Delta t = 3.068$ S



4.43

a) la velocidad del globo mientras el hombre asciende es $\vec{v}_G = -0.4737 \frac{m}{s} \hat{k}$

b) Cuando el hombre esta sobre la canasta todo el sistema esta en reposo respecto a tierra.

Nota: el centro de masa del sistema en ningun momento cambia de posición.

4.44

Respuestas

a) $\tau = -530.51 \, Nm \, \hat{j}$

b) $M_{max} = 108.15 Kg$

c) $\vec{v} = 188.49 \frac{m}{s} \hat{k}$

4.45

a) Cuando el niño esta sobre el plato a 1.5m del eje de giro la velocidad angular es

$$\vec{\omega} = 2.586 \frac{rad}{s} \hat{k}$$

b) Cuando el niño esta sobre el plato alejado 0.75m del eje de giro la velocidad angular $\vec{\omega}$ es.

$$\vec{\omega} = 4.21933 \frac{rad}{s} \hat{k}$$



4.46

a) Cuando los patinadores estan separados 2.5 m la velocidad angular $\vec{\omega}$ es

$$\vec{\omega} = 1.6 \frac{rad}{s} \hat{k}$$

b) Cuando los patinadores estan separados 1 m la velocidad angular $\vec{\omega}$ es

$$\vec{\omega} = 10 \frac{rad}{s} \hat{k}$$

4.47

la rapidez del centro de masa al recorrer 1 m cuesta abajo es $|\vec{v}| = 2.557342 \frac{m}{s}$

---

4. 48

Respuesta

a) la fuerza normal en el punto más alto del Rizo es

$\vec{N} = 2.9974$ N hacia abajo.

b) la distancia horizontal que recorre la esferita antes de tocar el suelo es dist horizontal = 0.84911 m



4.49

a) la aceleración del centro de masa de la esfera es

$\vec{a}_{c.m.e} = 3.38275 \frac{m}{s^2} \hat{j}$

b) la velocidad de la masa colgante justo antes de chocar con el suelo es

$\vec{v} = -2.60106 \frac{m}{s} \hat{k}$

4.50

a) $\vec{\alpha} = 32 \frac{rad}{s^2} \hat{i}$

b) $\vec{\omega} = 56.5685 \frac{rad}{s} \hat{i}$

c) $W_k = 125000$ Joules.

d) Potencia media = 70710.7562 Watts

e) POTENCIA INSTANTANEA = 141421.25 Watts

4.51

a) la velocidad del centro de masa es

$\vec{v}_{cm} = 0.5 \frac{m}{s} \hat{J}$

b) la velocidad angular del sistema es

$\vec{\omega} = 1.6 \frac{rad}{s} \hat{K}$



PROBLEMA RETO

a) $\vec{v}_A = -4.4294 \text{ m/s } \hat{k}$

b) $\vec{\omega}_p = 29.528 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \hat{i}$

c) $\Delta\theta = 5.7143 \text{ rad}$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
a) 0,9678 atm
b) 14,227 Lbf/in^2
c) 98,066 Kpa
d) 735,55 mmHg

1.3

$$4{,}1868\,\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

1.4
a) 98,6 ºF
b) 558,27 ºR

1.5
m= 164,36 lb_m

1.6
41,32 mH_20

1.7
0,0576 g/cm^3

1.8
m = 2,1822 × 10^9 Ton de H_2O

1.9
a) 423 K
b) –460 ºF
c) 1391,6 ºR
d) –449,6 ºF
e) 50 K
f) 9,99 ºC
g) 200 K

1.10
a) 2 mili-in
b) 10 mili-milla
c) 12 mil-ft^3
d) 1 giga-años
e) 7 mega-volts
f) 3.5 micro-toneladas

1.11
a) I
b) E
c) E
d) I
e) I
f) E

1.12
a) 6,2365 × 10^4
b) 1,987
c) 0,083147

1.13
428,203 KPa

1.14

$$P=\frac{\text{T}}{0{,}9315\text{V}-0{,}058936}-\frac{5478{,}82}{\text{V}^2}$$

1.15
a) 219,526
b) 326,9598
c) 3269,598

1.16
a) 0,357 mol
b) 78 g
c) 0,138 milimol
d) 1,76 × 10^4 Ton
e) 0,59 mol; f) 837 g

1.17
417 KPa

1.19
1,5 m

1.22
218,1 KPa

1.23
a) 0,255 lb_f
b) 1,5 lb_f



1.24
a) Representación gráfica
b) $P_2 = 837{,}075$ KPa

1.25
28,02 ft

1.26
B = 25º y A= 102,5º

1.27
b) $\Delta T = 10^{\circ}$

1.28
T = – 40,045

1.29
$$2{,}426\frac{m}{s}$$

1.30
$F_2 = 60{,}7$ KN

1.31
h_1=0,428 (m)
h_2=4,3 (m)
h_3=4,687 (m)
h_4=0,8 (m)

1.32
49,05 KPa

1.33
P = 90,7 KPa

1.34
$$\frac{m}{s}$$

1.35
c = m

1.37
b

1.38
a

1.39
c

1.40
a

1.42
b

1.43
$$\left(\frac{m}{s}\right)$$

1.44
a) $0{,}91\left(\frac{g}{cm^3}\right)$

b) $0{,}91\left(\frac{kg}{1}\right)$

c) $901\left(\frac{kg}{m^3}\right)$

1.45

	Masa (g)	Volumen (cm^3)	Densidad $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$
Hielo	184	**200**	920
Poliestireno expandido	10	1000	**10**
Vidrio	**130**	50	2,600
Agua de mar	510	**500**	1,020

1.46
a) No

b) $\rho = 11{,}3\frac{g}{cm^3}$ $\quad \rho = 7{,}8\frac{g}{cm^3}$ $\quad \rho = 2{,}7\frac{g}{cm^3}$

$$\rho = 0{,}86\frac{g}{cm^3}$$

1.47
$$\gamma = 9200\frac{N}{m^3}$$

1.48
m_2= 3,33 kg

1.49
31,9 N

1.50
1482,6 J

1.51
a) 3936,52 J
b) 1986,52 J

1.52
a) 75 J
b) 300 J
c) 75 J
d) 450 J

1.53
a) $a = \frac{KJ}{kg - K}$; $b = \frac{KJ}{kg - K^3}$

1.54
m= 24,012Kg
w= 235,55 kg_f

1.55
$$PM = 28{,}85 \frac{kg}{kgmol}$$

1.56
$$PM = 28{,}95 \frac{kg}{kgmol}$$

1.57
No se llega al equilibrio térmico entre si

1.58
b

1.59
La función cuadrática que representa estos datos es: $Y = ax^b$; que se muestra en la segunda gráfica representación cuadrática b.

1.60
La gráfica segunda sigue la ecuación de correlación apropiada $Y = ax^b$; la comprobación se realiza por medio del factor de correlación, cuyo valor es $r = 0{,}9$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1

T °C	**P** KPa	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**u** $\frac{kJ}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**Calidad** x
150	**300**	0,63388	2570,8	2761,0	1,0
151,86	500	0,26885	2016	2150,52	0,7163
1200	500	1,35964	4466,8	5146,6	vapor sobrecalentado
17,50	2,0	16,751	654,98	688,48	0,25
147,93	450	0,1134	1148,029	1200	0,272
50	12,35	8.5	1787,5418	1892,5128	0,7064

2.2

T °C	**P** KPa	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**u** $\frac{kJ}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**Calidad** x
0	0,294	0,045	–	329,69	0,6538
55,89	0,200	0,13033	–	450	vapor sobrecalentado
100	0.300	0,09860	–	490,482	vapor sobrecalentado
101,46	0.500	0,05829	–	490	vapor sobrecalentado
103,24	0,250	0,1200	–	494,135	vapor sobrecalentado
50	1,3180	0,0085	–	357,65	0,5340

Para obtener los datos de energía interna puedes consultar tablas adicionales a las que te proporcionamos

2.3

T °C	**P** KPa	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**u** $\frac{kJ}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**Calidad** x
0	429,29	0,2894	–	1442,22	1,00
15,84	200	0,6886	–	1500	vapor sobrecalentado
-30	119,46	0.001476	–	44,26	0,00
48,04	2010	0,0628	–	1366,25	0,90
65	450	0,35615	–	1599,9	vapor sobrecalentado
-40	71,72	0,001450	–	0,00	0,00 líquido saturado

Para obtener los datos de energía interna puedes consultar tablas adicionales a las que te proporcionamos

2.4

T °C	**P** KPa	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**u** $\frac{kJ}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**Calidad** x
-20	15,093	0,108847	–	178,736	1.00
67,25	0,450	0,04959	–	230	Vapor sobrecalentado
-30	0.10041	0,48261	–	724,135	0,50
-15	0,23632	0,27671	–		0,90
90	0,40	0,059846	–	246,017	Vapor sobrecalentado
70	300	0.075706	–	233,33	Vapor Sobrecalentado

Para obtener los datos de energía interna puedes consultar tablas adicionales a las que te proporcionamos

2.5

$$3380\ \frac{lb_f}{in^2}$$



2.6

$m_f = 1{,}6\text{kg}$ $V_f = 0{,}00032\text{m}^3$

$m_v = 0{,}4\text{kg}$ $V_g = 0{,}0416\text{m}^3$

2.7
$x = 0.0208$

2.9

Sustancia	T °C	x	v $\frac{m^3}{kg}$
Amoniaco	28	80	0,0941
Freón -12	55	50	0,006692
Agua	30	90	29,6038
Nitrógeno	-184	40	0,0273

2.10

$m_l = 0{,}339\text{kg}$; $m_v = 1{,}022\text{kg}$

$v = 0{,}0004\text{m}^3$; $v_v = 0{,}280\text{m}^3$

2.11
12,73 bar, vapor sobrecalentado

2.12
V = 0,0631 m^3

2.13

P MPa	T °C	v esp. $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	Estado
0,5	15,74	0,025	170,32	182,80	0,6034 mezcla líquido-vapor
0,28	15,74	0,125	241,969	264,473	vapor sobrecalentado
0,28	-1,23	0,0719	226,38	246,52	Vapor saturado

2.14

Variables Termodinámicas				
P MPa	T °C	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$
4,6886	260	0,0218	1865,84	1968,12
1,724	260	0,1345	2706,39	2942,32

2.15
94,42 °C

2.16

a) 16,6%

b) $v_f = 0{,}00107 \dfrac{\text{m}^3}{\text{kg}}$, $v_g = 0{,}000899 \dfrac{\text{m}^3}{\text{kg}}$

2.17

Estado	**P** kPa	**T** °C	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**u** $\frac{kJ}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**x** %	**Estado físico**
1	150	111,37	1,0036	2519,6	2693,5	100	vapor saturado
2	47,39	80	1,0036	967,02	1014,6	29,44	mezcla líquido-vapor
3	47,39	80	0,001032	334,84	334,88	0,00	líquido saturado
4	150	–	0,001053	446,92	467,08	–	líquido comprimido

2.18

Estado	**P** MPa	**T** °C	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**u** $\frac{kJ}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**x** %	**Estado físico**
1	11,274	320	0,01	2101,03	2214,05	60,76	mezcla líquido-vapor
2	3,0	320	0,085	2787,48	3042,22	–	vapor sobrecalentado
3	2,5	223,99	0, 07998	2603,1	2803,1	100	vapor saturado
4	2,5	223,99	0,002998	996,73	1004,25	2,29	mezcla líquido-vapor
5	11,274	320	0,002998	2101,03	2214,05	60,76	mezcla líquido-vapor

2.19

Estado	**P** MPa	**T** °C	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**u** $\frac{kJ}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	Δv	Δu	Δh	**Estado físico**
1	5,0	80	0,0010268	333,69	338,83	–	–	–	líquido comprimido
2	15	100	0,0010361	414,72	430,26	–	–	–	líquido comprimido
Incremento							81,03	91,17	

2.20

Estado	**P** kPa	**T** °C	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**s** $\frac{kJ}{kg\ °K}$	Δv	Δh	Δs	**Estado físico**
1	1642,98	42	0,001735	381,35	1,3885	–	–	–	líquido saturado
2	2000	140	0,1057	1842,0	5,742	–	–	–	vapor sobrecalentado
Incremento						,103965	1460,65	4,3535	

2.21

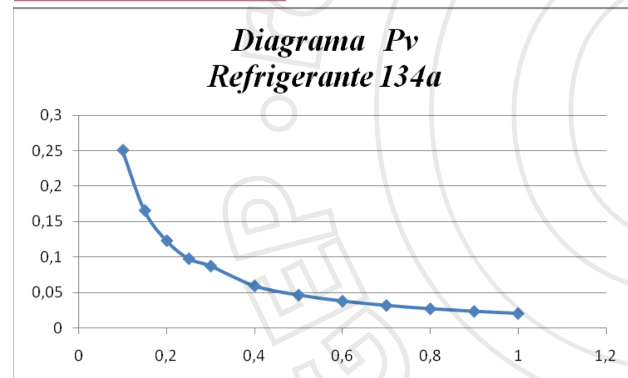
Estado	**P** MPa	**T** °C	**v** $\frac{m^3}{kg}$	**h** $\frac{kJ}{kg}$	**s** $\frac{kJ}{kg\ °K}$	Δv	Δh	Δs	**Estado físico**
1	0,9	60	0,022012	219,373	0,73633	–	–	–	Vapor sobrecalentado
2	1,21932	50	0,01417	206,45	0,67967	–	–	–	vapor saturado
Incremento						-0,007842	-12,923	-0,05666	

Son negativos los resultados

2.22
70,14 kPa
18,89 m³

2.23

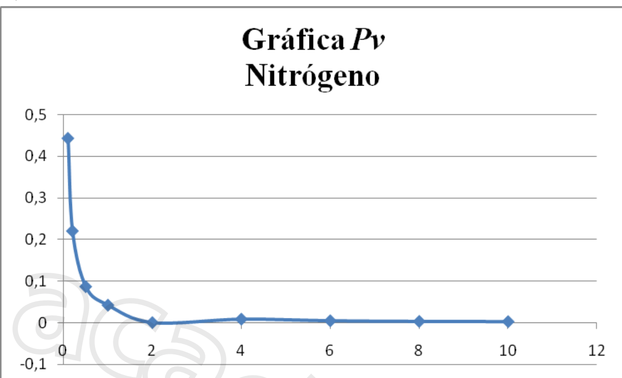
P kPa	**v** $\frac{m^3}{kg}$
01	0,25102
0,15	0,16592
0,2	0,12335
0,25	0,097798
0,3	0,08748
0,4	0,059402
0,5	0,046557
0,6	0,037958
0,7	0,31781
0,8	0,027113
0,9	0,23446
1,0	0,020473



2.24
a)

P MPa	**v** $\frac{m^3}{kg}$
0,1	0,442612
0,2	0,220007
0,5	0,086429
1,0	0,041876
2,0	0, 019541
4,0	0,008231
6,0	0,004421
8,0	0,002914
10,0	0,002388

b)



2.25
a) 125kPa
b) 1,42 g
c) 32%
d) 696 kPa

2.26
m = 295,5 kg y P 105,3 kPa

2.27
204,45 kPa, 231,88 kPa

2.28
24,65 psia

2.30

Ecuación	**P** MPa
Gas ideal	22,43
Estados correspondientes	21,33
Tabla de vapor	17,80

2.31

Ecuación	**P** MPa
Gas ideal	3,268
Van der Waals	2,33
Estados correspondientes	
Tabla de vapor	0,8



2.32

Ecuación	v $\frac{m^3}{kg}$	% error
Gas ideal	0,004452	86,43
Carta de compresibilidad	0,002404	0,70

2.33

Ecuación		% error
Gas ideal	1,861	17,28
Carta de compresibilidad	1,586	0,00
Tablas de vapor del R-134a	1,6	0,88

2.37

a) $v = 0{,}02314\,\frac{m^3}{kg}$

b) $v = 0{,}01758\,\frac{m^3}{kg}$

2.38

a) $T = 1083{,}42$ K

b) $T = 1086{,}39$ K

c) $T = 1085{,}05$ K

2.39

a) 2042,2 kPa

b) 1968,98 kPa

2.42

a) 0,004452 y 86,4%

b) 0,002404 y 0,7%

2.44

a) $0{,}007636\,\frac{L}{kg}$

b) $0{,}00075\,\frac{L}{kg}$

2.46

a) W=424,9935 kJ

b) Q=2565,9315 kJ

2.47

Q= –33,3656 kJ

2.48

a) $w = -25{,}45056\,\frac{kJ}{kg}$

b) $q = -221{,}5\,\frac{kJ}{kg}$

2.49

W= 42,1638 kJ

P= 650 kPa

T= 161,98 °C

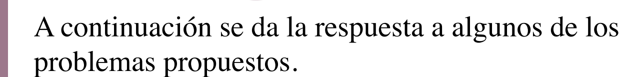
2.50

W= 11,3344 kJ

2.51

$q = 1222{,}485\,\frac{kJ}{kg}$





A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1
877,872 kJ

3.2
a) 91,55 $\frac{m}{s}$
b) 497,25 kJ

3.3
a) 343,171
b) 333,77
c) 349,21 $\frac{kJ}{hr}$

3.4
a) 2 453 kJ
b) 44,29 $\frac{m}{s}$
c) 30000 kN

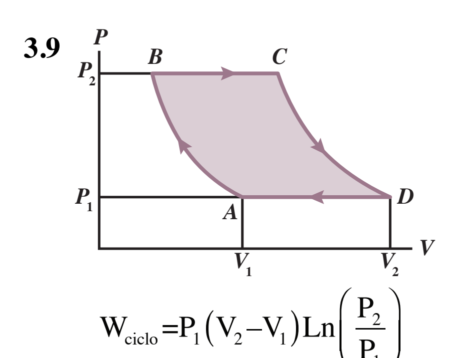
3.5
h= 515,46 m

3.6
a) $v = 50{,}08 \frac{m}{s}$
b) 0,41 m

3.7
1,18 MJ

3.8
465,6 J

3.9



$$W_{ciclo} = P_1 (V_2 - V_1) Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$$

3.10
1181,83 kJ

3.11
a) 12,5 kJ
b) 8,66 kJ
c) 12,5 kJ
d) 15,14 kJ

3.13
14,62 Kcal

3.14
T=100 ºC

3.15
a) $c = 0{,}435 \frac{cal}{g–ºC}$, el tipo de material es berilio
b) $Q_{abs} = 1900{,}5$ cal y $Q_{des} = -2034{,}06$ cal

3.16
a) Q = 311430 J = 311,43 kJ

3.17
75 ºC

3.18
q'' = 3000 W

3.19
a) $\Delta x_A = 0{,}39$ m
b) $\Delta x_B = 0{,}295 \cong 0{,}3$ m

3.20
A = 1,27 $\frac{m^2}{maq.}$ A salón = 31,746 m^2

3.21
k = 1,2 $\frac{W}{m–k}$

3.22
q'' = 3,48 kW

3.23

q'' = 1,98 kW

3.24

Nombre del Proceso	ciclo	*W* KJ	*Q* KJ	*ΔE* KJ
Adiabático Compresión	1-2	-250	0,0000	-250
Expansión Isobárica	2-3	800	1694,3	2494,3
Expansión Adiabática	3-4	1477,5	0,000	1477,5
Isocórico	4-1	0,000	-2087,20	-2087,20

3.25

31,897 KJ

3.26

Proceso	*W* kJ	*Q* kJ	*ΔU* kJ
Adiabático	-17,5000	0,000	-17,500
Isobárico	93,000	100,0	193,00
Isotérmico	133,58	133,58	0,000
Isobárico	-100,00	-353,33	-253,33

3.27

Proceso	Diagrama P-T	Diagrama P-V	Calor Absorbido-Cedido
A-B	Isocórico	Isocórico	Absorbe
B-C	Isobárico	Isobárico	Absorbe
C-A	Isotérmico	Isotérmico	Cede

3.28

Proceso	*W* J	*Q* J	*ΔU* J
A-B-C	**500**	**300**	**800**

	Nombre del Proceso	Expansión	Compresión	1º Ley de la Termodinámica
A-B	Isobárico	●	–	Q = ΔU - W
B-C	Isocórico	●	–	ΔU = Q
C-D	Isobárico	–	●	Q = ΔU - W
D-A	Isocórico	–	●	ΔU = Q

3.29

a) 1129,5 KPa
b) 252 ºC
c) –0,07136 kJ
d) –0,01791 kJ

3.30

a) 0,5

3.31

Estado	*P* KPa	*V* m³	*T* K
1	$1{,}00 \times 10^5$	0,4	300
2	$2{,}14 \times 10^4$	1,2	193,3
3	$6{,}44 \times 10^4$	0,4	193,3

Proceso	*W* kJ	*Q* kJ	*U* kJ
1-2	-35,800	0,0	-35,800
2-3	-28,315	28,315	0,0
3-1	0,0	35,566	35,566

3.33

i = 1,67 volts

3.34

Q = -105,4 kJ

3.35

F = 50 N
w = 2,5 J

3.36

W = 786,971 kJ

3.37

W = –262,08 J

3.38

b) x_2 = 38,944 cm
c) W = –67,7 J

Nota: no existe inciso *a)* sino es parte de la definición del problema

3.39

Estado	*P* kPa	*T* °C	*v* $\frac{m^3}{kg}$	*h* $\frac{kJ}{kg}$	
1	700	80	0,2367	1625,8	Vapor sobrecalentado
2	700	13,82	0,18146	1455,38	Vapor saturado
3	290,67	-10	0,18146	693,95	X = 0,4316

Proceso	*W* $\frac{kJ}{kg}$	*Q* $\frac{kJ}{kg}$	*ΔU* $\frac{kJ}{kg}$
1-2	-38,668	-170,42	-131,752
2-3	0	-39,1076	-39,1076

3.40

Estado	P MPa	T °C	v $\frac{m^3}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$
1	0,21882	- 8 °C	0,19118	230,4356
2	0,21882			277,1565

Proceso	W $\frac{kJ}{kg}$	$Q = \Delta h$ $\frac{kJ}{kg}$	ΔU $\frac{kJ}{kg}$
1-2	45,69	427,209	381,519

3.41

Estado	P kPa	T °C	v $\frac{m^3}{kg}$	u $\frac{kJ}{kg}$	h $\frac{kJ}{kg}$	
1	100	99,62	1,0168	1670,592	1772,276	Mezcla líquido-vapor
2	200	324,24	1,37268	2846,93	3110,128	Vapor sobrecalentado

Proceso	W $\frac{kJ}{kg}$	$Q = \Delta h$ $\frac{kJ}{kg}$	ΔU $\frac{kJ}{kg}$	Δh $\frac{kJ}{kg}$
1-2	504,22	1337,852	1176,338	1337,852



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1
$T_2 = 168{,}014$ °C
$m = 0{,}5655 \dfrac{kg}{s}$
$A = 190\ cm^2$

4.2
$T = 231{,}03$ °C
$m = 3{,}714 \dfrac{kg}{s}$
$A = 239{,}65\ cm^2$

4.3
$T = 29{,}95$ °C
$m = 2{,}2338 \dfrac{kg}{s}$
para Freón 12

4.8
$T = 39{,}39$ °C
$m = 1{,}6804 \dfrac{kg}{s}$

4.12
$v = 35{,}28 \dfrac{m}{s}$
$5{,}92 \dfrac{kg}{s}$

4.17
Si es un proceso adiabático

4.19
$q = 1234{,}39 \dfrac{MJ}{min}$
Se desprende calor al medio ambiente

4.20
$W\ flecha = -681{,}44 \dfrac{kJ}{kg}$
$m = 760{,}65 \dfrac{kg}{s}$
$W = 518{,}34$ MW

4.21
$Ec = -6{,}928 \times 10^{-3}$
$W = 308{,}22$ kW

4.22
$W = 6{,}373$ kW

4.23
$v_e = 48{,}014 \dfrac{m}{s}$
$v_s = 68{,}32 \dfrac{m}{s}$
$W = 146{,}71$ kW

4.24
$m = 500{,}35 \dfrac{kg}{s} = 1801260 \dfrac{kg}{hr}$
$Vs = 89{,}08 \dfrac{m}{s}$

4.25
$W_{1\text{-}2} = 294$ kW
$W_{1\text{-}3} = 686$ kW
$W_T = 908$ kW

4.26
$W = 45$ kW

4.27
$m_B = 398{,}16 \dfrac{kg}{hr}$
$Q = 277{,}78 \dfrac{kJ}{s}$

4.28

$m_{\text{líquido comprimido}} = 3{,}5\ \dfrac{kg}{s}$

Nota: La presión del líquido comprimido al inicio es de 50 bar y la presión de la cámara es de 1 mPa.

4.29

$m = 1{,}1867\ \dfrac{kg}{s}$

$T = 250{,}45\ °C$

4.30

$m = 183{,}97\ \dfrac{kg}{min}$

$A = 0{,}2151\ m^2$

4.31

$v_1 = 1{,}7857\ \dfrac{m}{s}$

$v_2 = 0{,}2824\ \dfrac{m}{s}$

$W = 30{,}66\ kW$

4.33

$P = 0{,}18825\ MPa$

$d = 0{,}1085\ m^2$

4.35

$q = 9108{,}6\ \dfrac{kJ}{s}$

4.36

$T = 131\ °C$

4.37

$v = 301{,}183\ \dfrac{m}{s}$

4.38

$q = -\ 2733{,}8442\ kJ$

4.39

$T = 151{,}83\ °C$

$m = 36{,}7174\ kg$

4.41

$v_1 = 0{,}021249\ m^3$

$v_2 = 0{,}024996\ m^3$

$w = 0{,}7434\ kJ$

$q = 6{,}2369\ kJ$

4.42

$Q = 47{,}73\ MW$

4.43

$m = 0{,}07556\ \dfrac{kg}{s}$

4.44

$m = 91{,}6389\ kg$

4.45

$T = 118{,}1599\ °C$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1
e = 34,62%
q = 411,894 J

5.2
Qc = 13,788 kJ
Qf = 9,238 kJ

5.3
Qc = 12,846 kJ
Qf = 4,496 kJ
t = 0,05 s

5.4
e = 36,61%

5.5
w= 2,222 $\frac{kJ}{kg}$

Qc = 5697,36 $\frac{kJ}{kg}$

Qf = 3475,38 $\frac{kJ}{kg}$

5.6
e= 80%
Qc = 5 W
Qf =4 W

5.7
Tc = 400 K

5.8
e = 91,82%

5.10
e= 31,44%
Qf = 863,5 $\frac{kJ}{kg}$

5.12
e = 73,2 %

5.13
Qf = 11 W
Qc = 22 W
W = 11 W

5.14
Proceso Irreversible

5.15
e= 9,62%
QC = 24,90 kW
W = 2,40 kW

5.16
e= 75 %

5.17
e= 80%
e = 95%

5.18
e = 87,5 %
e = a5,1%

5.22
e = 28%
W = 583,33 W
Qc = 178,57 W
Qf = 128,57 W

5.23
e = 75%
Tf = 200 K
Qf = 200 J
Q = no es factible

5.30
e = 12,77

5.31
e = 82,86%

5.32
e= 83,33%

5.34
e = 71,43%
W = - 467,9 $\frac{kJ}{kg}$
e= 28,69 %

5.42
e= 44,92% e= 19,1%

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de temperatura (unidades SI)*

Temp. °C T	Presión kPa, MPa P	Volumen específico, m³/kg Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Energía interna, kJ/kg Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Entalpía, kJ/kg Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Entropía, kJ/kg K Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.01	0.6113	0.001000	206.132	0.00	2375.3	2375.3	0.00	2501.3	2501.3	0.0000	9.1562	9.1562
5	0.8721	0.01000	147.118	20.97	2361.3	2382.2	20.98	2489.6	2510.5	0.0761	8.9496	9.0257
10	1.2276	0.001000	106.377	41.99	2347.2	2389.2	41.99	2477.7	2519.7	0.1510	8.7498	8.9007
15	1.7051	0.001001	77.925	62.98	2333.1	2396.0	62.98	2465.9	2528.9	0.2245	8.5569	8.7813
20	2.3385	0.001002	57.790	83.94	2319.0	2402.9	83.94	2454.1	2538.1	0.2966	8.3706	8.6671
25	3.1691	0.001003	43.359	104.86	2304.9	2409.8	104.87	2442.3	2547.2	0.3673	8.1905	8.5579
30	4.2461	0.001004	32.893	125.77	2290.8	2416.6	125.77	2430.5	2556.2	0.4369	8.0164	8.4533
35	5.6280	0.001006	25.216	146.65	2276.7	2423.4	146.66	2418.6	2565.3	0.5052	7.8478	8.3530
40	7.3837	0.001008	19.523	167.53	2262.6	2430.1	167.54	2406.7	2574.3	0.5724	7.6845	8.2569
45	9.5934	0.001010	15.258	188.41	2248.4	2436.8	188.42	2394.8	2583.2	0.6386	7.5261	8.1647
50	12.350	0.001012	12.032	209.30	2234.2	2443.5	209.31	2382.7	2592.1	0.7037	7.3725	8.0762
55	15.758	0.001015	9.568 I	230.19	2219.9	2450.1	230.20	2370.7	2600.9	0.7679	7.2234	7.9912
60	19.941	0.001017	7.671	251.09	2205.5	2456.6	251.11	2358.5	2609.6	0.8311	7.0784	7.9095
65	25.033	0.001020	6.197	272.00	2191.1	2463.1	272.03	2346.2	2618.2	0.8934	6.9375	7.8309
70	31.188	0.001023	5.042	292.93	2176.6	2469.5	292.96	2333.8	2626.8	0.9548	6.8004	7.7552
75	38.578	0.001026	4.131	313.87	2162.0	2475.9	313.91	2321.4	2635.3	1.0154	6.6670	7.6824
80	47.390	0.001029	3.407	334.84	2147.4	2482.2	334.88	2308.8	2643. 7	1.0752	6.5369	7.6121
85	57.834	0.001032	2.828	355.82	2132.6	2488.4	355.88	2296.0	2651.9	1.1342	6.4102	7.5444
90	70.139	0.001036	2.361	376.82	2117.7	2494.5	376.90	2283.2	2660.1	1.1924	6.2866	7.4790
95	84.554	0.001040	1.982	397.86	2102.7	2500.6	397.94	2270.2	2668.1	1.2500	6.1659	7.4158
100	101.325	0.001044	1.6729	418.91	2087.6	2506.5	419.02	2257.0	2676.0	1.3068	6.0480	7.3548
105	0.12082	0.001047	1.4194	440.00	2072.3	2512.3	440.13	2243.7	2683.8	1.3629	5.9328	7.2958
110	0.14328	0.001052	1.2102	461.12	2057.0	2518.1	461.27	2230.2	2691.5	1.4184	5.8202	7.2386
115	0.16906	0.001056	1.0366	482.28	2041.4	2523.7	482.46	2216.5	2699.0	1.4733	5.7100	7.1832
120	0.19853	0.001060	0.8919	503.48	2025.8	2529.2	503.69	2202.6	2706.3	1.5275	5.6020	7.1295
125	0.2321	0.001065	0.77059	524.72	2009.9	2534.6	524.96	2188.5	2713.5	1.5812	5.4962	7.0774
130	0.2701	0.001070	0.66850	546.00	1993.9	2539.9	546.29	2174.2	2720.5	1.6343	5.3925	7.0269
135	0.3130	0.001075	0.58217	567.34	1977.7	2545.0	567.67	2159.6	2727.3	1.6869	5.2907	6.9777
140	0.3613	0.001080	0.50885	588.72	1961.3	2550.0	589.11	2144.8	2733.9	1.7390	5.1908	6.9298
145	0.4154	0.001085	0.44632	610.16	1944.7	2554.9	610.61	2129.6	2740.3	1.7906	5.0926	6.8832
150	0.4759	0.001090	0.39278	631.66	1927.9	2559.5	632.18	2114.3	2746.4	1.8417	4.9960	6.8378
155	0.5431	0.001096	0.34676	653.23	1910.8	2564.0	653.82	2098.6	2752.4	1.8924	4.9010	6.7934
160	0.6178	0.001102	0.30706	674.85	1893.5	2568.4	675.53	2082.6	2758.1	1.9426	4.8075	6.7501
165	0.7005	0.001108	0.27269	696.55	1876.0	2572.5	697.32	2066.2	2763.5	1.9924	4.7153	6.7078
170	0.7917	0.001114	0.24283	718.31	1858.1	2576.5	719.20	2049.5	2768.7	2.0418	4.6244	6.6663



TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*

TABLA *Agua saturada: tabla de temperatura (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C T	Presión MPa P	Volumen específico, m³/kg Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Energía interna, kJ/kg Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Entalpía, kJ/kg Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Entropía, kJ/kg K Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
175	0.8920	0.001121	0.21680	740.16	1840.0	2580.2	741.16	2032.4	2773.6	2.0909	4.5347	6.6256
180	1.0022	0.001127	0.19405	762.08	1821.6	2583.7	763.21	2015.0	2778.2	2.1395	4.4461	6.5857
185	1.1227	0.001134	0.17409	784.08	1802.9	2587.0	785.36	1997.1	2782.4	2.1878	4.3586	6.5464
190	1.2544	0.001141	0.15654	806.17	1783.8	2590.0	807.61	1978.8	2786.4	2.2358	4.2720	6.5078
195	1.3978	0.001149	0.14105	828.36	1764.4	2592.8	829.96	1960.0	2790.0	2.2835	4.1863	6.4697
200	1.5538	0.001156	0.12736	850.64	1744.7	2595.3	852.43	1940.7	2793.2	2.3308	4.1014	6.4322
205	1.7230	0.001164	0.11521	873.02	1724.5	2597.5	875.03	1921.0	2796.0	2.3779	4.0172	6.3951
210	1.9063	0.001173	0.10441	895.51	1703.9	2599.4	897.75	1900.7	2798.5	2.4247	3.9337	6.3584
215	2.1042	0.001181	0.09479	918.12	1682.9	2601.1	920.61	1879.9	2800.5	2.4713	3.8507	6.3221
220	2.3178	0.001190	0.08619	940.85	1661.5	2602.3	943.61	1858.5	2802.1	2.5177	3.7683	6.2860
225	2.5477	0.001199	0.07849	963.72	1639.6	2603.3	966.77	1836.5	2803.3	2.5639	3.6863	6.2502
230	2.7949	0.001209	0.07158	986.72	1617.2	2603.9	990.10	1813.8	2803.9	2.6099	3.6047	6.2146
235	3.0601	0.001219	0.06536	1009.88	1594.2	2604.1	1013.61	1790.5	2804.1	2.6557	3.5233	6.1791
240	3.3442	0.001229	0.05976	1033.19	1570.8	2603.9	1037.31	1766.5	2803.8	2.7015	3.4422	6.1436
245	3.6482	0.001240	0.05470	1056.69	1546.7	2603.4	1061.21	1741.7	2802.9	6.1083	2.7471	3.3612
250	3.9730	0.001251	0.05013	1080.37	1522.0	2602.4	1085.34	1716.2	2801.5	2.7927	3.2802	6.0729
255	4.3195	0.001263	0.04598	1104.26	1496.7	2600.9	1109.72	1689.8	2799.5	2.8382	3.1992	6.0374
260	4.6886	0.001276	0.04220	1128.37	1470.6	2599.0	1134.35	1662.5	2796.9	2.8837	3.1181	6.0018
265	5.0813	0.001289	0.03877	1152.72	1443.9	2596.6	1159.27	1634.3	2793.6	2.9293	3.0368	5.9661
270	5.4987	0.001302	0.03564	1177.33	1416.3	2593.7	1184.49	1605.2	2789.7	2.9750	2.9551	5.9301
275	5.9418	0.001317	0.03279	1202.23	1387.9	2590.2	1210.05	1574.9	2785.0	3.0208	2.8730	5.8937
280	6.4117	0.001332	0.03017	1227.43	1358.7	2586.1	1235.97	1543.6	2779.5	3.0667	2.7903	5.8570
285	6.9094	0.001348	0.02777	1252.98	1328.4	2581.4	1262.29	1511.0	2773.3	3.1129	2.7069	5.8198
290	7.4360	0.001366	0.02557	1278.89	1297.1	2576.0	1289.04	1477.1	2766.1	3.1593	2.6227	5.7821
295	7.9928	0.001384	0.02354	1305.21	1264.7	2569.9	1316.27	1441.8	2758.0	3.1061	2.5375	5.7436
300	8.5810	0.001404	0.02167	1331.97	1231.0	2563.0	1344.01	1404.9	2748.9	3.2533	2.4511	5.7044
305	9.2018	0.001425	0.01995	1359.22	1195.9	2555.2	1372.33	1366.4	2738.7	3.3009	2.3633	5.6642
310	9.8566	0.001447	0.01835	1387.03	1159.4	2546.4	1401.29	1326.0	2727.3	3.3492	2.2737	5.6229
315	10.547	0.001472	0.01687	1415.44	1121.1	2536.6	1430.97	1283.5	2714.4	3.3981	2.1821	5.5803
320	11.274	0.001499	0.01549	1444.55	1080.9	2525.5	1461.45	1238.6	2700.1	3.4479	2.0882	5.5361
330	12.845	0.001561	0.012996	1505.24	993.7	2498.9	1525.29	1140.6	2665.8	3.5506	1.8909	5.4416
340	14.586	0.001638	0.010797	1570.26	894.3	2464.5	1594.15	1027.9	2622.0	3.6593	1.6763	5.3356
350	16.514	0.001740	0.008813	1641.81	776.6	2418.4	1670.54	893.4	2563.9	3.7776	1.4336	5.2111
360	18.651	0.001892	0.006945	1725.19	626.3	2351.5	1760.48	720.5	2481.0	3.9146	1.1379	5.0525
370	21.028	0.002213	0.004926	1843.84	384.7	2228.5	1890.37	441.8	2332.1	4.1104	0.6868	4.7972
374	22.089	0.003155	0.003155	2029.58	0	2029.6	2099.26	0	2099.3	4.4297	0	4.4297



TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de presión (unidades SI)*

		Volumen específico, m³/kg		Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión kPa, MPa P	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.6113	0.01	0.001000	206.132	0	2375.3	2375.3	0.00	2501.3	2501.3	0	9.1562	9.1562
1.0	6.98	0.001000	129.208	29.29	2355.7	2385. 2	29.29	2484.9	2514.	0.1059	8.8697	8.9756
1.5	13.03	0.001001	87.980	54.70	2338.6	2393.3	54.70	2470.6	2525.3	0.1956	8.6322	8.8278
2.0	17.50	0.001001	67.004	73.47	2326.0	2399.5	73.47	2460.0	2533.5	0.2607	8.4629	8.7236
2.5	21.08	0.001002	54.254	88.47	2315.9	2404.4	88.47	2451.6	2540.0	0.3120	8.3311	8.6431
3.0	24.08	0.001003	45.665	101.03	2307.5	2408.5	101.03	2444.5	2545.5	0.3545	8.2231	8.5775
4.0	28.96	0.001004	34.800	121.44	2293.7	2415.2	121.44	2432.9	2554.4	0.4226	8.0520	8.4746
5.0	32.88	0.001005	28.193	137.79	2282.7	2420.5	137.79	2423.7	2561.4	0.4763	7.9187	8.3950
7.5	40.29	0.001008	19.238	168.76	2261.7	2430.5	168.77	2406.0	2574.8	0.5763	7.6751	8.2514
10.0	45.81	0.001010	14.674	191.79	2246.1	2437.9	191.81	2392.8	2584.6	0.6492	7.5010	8.1501
15.0	53.97	0.001014	10.022	225.90	2222.8	2448.7	225.91	2373.1	2599.1	0.7548	7.2536	8.0084
20.0	60.06	0.001017	7.649	251.35	2205.4	2456.7	251.38	2358.3	2609.7	0.8319	7.0766	7.9085
25.0	64.97	0.001020	6.204	271.88	2191.2	2463.1	271.90	2346.3	2618.2	0.8930	6.9383	7.8313
30.0	69.10	0.001022	5.229	289.18	2179.2	2468.4	289.21	2336.1	2625.3	0.9439	6.8247	7.7686
40.0	75.87	0.001026	3.993	317.51	2159.5	2477.0	317.55	2319.2	2636.7	1.02~	8 6.6441	7.6700
50.0	81.33	0.001030	3.240	340.42	2143.4	2483.8	340.47	2305.4	2645.9	1.0910	6.5029	7.5939
75.0	91.77	0.001037	2.217	384.29	2112.4	2496.7	384.36	2278.6	2663.0	1.2129	6.2434	7.4563
MPa												
0.100	99.62	0.001043	1.6940	417.33	2088.7	2506.1	417.44	2258.0	2675.5	1.3025	6.0568	7.3593
0.125	105.99	0.001048	1.3749	444.16	2069.3	2513.5	444.30	2241.1	2685.3	1.3739	5.9104	7.2843
0.150	111.37	0.001053	1.1593	466.92	2052.7	2519.6	467.08	2226.5	2693.5	1.4335	5.7897	7.2232
0.175	116.06	0.001057	1.0036	486.78	2038.1	2524.9	486.97	2213.6	2700.5	1.4848	5.6868	7.1717
0.200	120.23	0.001061	0.8857	504.47	2025.0	2529.5	504.68	2202.0	2706.6	1.5300	5.5970	7.1271
0.225	124.00	0.001064	0.7933	520.45	2013.1	2533.6	520.69	2191.3	2712.0	1.5705	5.5173	7.0878
0.250	127.43	0.001067	0.7187	535.08	2002.1	2537.2	535.34	2181.5	2716.9	1.6072	5.4455	7.0526

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de presión (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m³/kg		Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Presión MPa P	Temp. °C T	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.275	130.60	0.001070	0.6573	548.57	1992.0	2540.5	548.87	2172.4	2721.3	1.6407	5.3801	7.0208
0.300	133.55	0.001073	0.6573	548.57	1992.0	2540.5	561.45	2163.9	2725.3	1.6717	5.3201	6.9918
0.325	136.30	0.001076	0.5620	572.88	1973.5	2546.3	573.23	2155.8	2729.0	1.7005	5.2646	6.9651
0.350	138.88	0.001079	0.5243	583.93	1965.0	2548.9	584.31	2148.1	2732.4	1.7274	5.2130	6.9404
0.375	141.32	0.001081	0.4914	594.38	1956.9	2551.3	594.79	2140.8	2735.6	1.7527	5.1647	6.9174
0.40	143.63	0.001084	0.4625	604.29	1949.3	2553.6	604.73	2133.8	2738.5	1.7766	5.1193	6.8958
0.45	147.93	0.001088	0.4140	622.75	1934.9	2557.6	623.24	2120.7	2743.9	1.8206	5.0359	6.8565
0.50	151.86	0.001093	0.3749	639.66	1921.6	2561.2	640.21	2108.5	2748.7	1.8606	4.9606	6.8212
0.55	155.48	0.001097	0.3427	655.30	1909.2	2564.5	655.91	2097.0	2752.9	1.8972	4.8920	6.7892
0.60	158.85	0.001101	0.3157	669.88	1897.5	2567.4	670.54	2086.3	2756.8	1.9311	4.8289	6.7600
0.65	162.01	0.001104	0.2927	683.55	1886.5	2570.1	684.26	2076.0	2760.3	1.9627	4.7704	6.7330
0.70	164.97	0.001108	0.2729	696.43	1876.1	2572.5	697.20	2066.3	2763.5	1.9922	4.7158	6.7080
0.75	167.77	0.001111	0.2556	708.62	1866.1	2574.7	709.45	2057.0	2766.4	2.0199	4.6647	6.6846
0.80	170.43	0.001115	0.2404	720.20	1856.6	2576.8	721.10	2048.0	2769.1	2.0461	4.6166	6.6627
0.85	172.96	0.001118	0.2270	731.25	1847.4	2578.7	732.20	2039.4	2771.6	2.0709	4.5711	6.6421
0.90	175.38	0.001121	0.2150	741.81	1838.7	2580.5	742.82	2031.1	2773.9	2.0946	4.5280	6.6225
0.95	177.69	0.001124	0.2042	751.94	1830.2	2582.1	753.00	2023.1	2776.1	2.1171	4.4869	6.6040
1.00	179.91	0.001127	0.19444	761.67	1822.0	2583.6	762.79	2015.3	2778.1	2.1386	4.4478	6.5864
1.10	184.09	0.001133	0.17753	780.08	1806.3	2586.4	781.32	2000.4	2781.7	2.1791	4.3744	6.5535
1.20	187.99	0.001139	0.16333	797.27	1791.6	2588.8	798.64	1986.2	2784.8	2.2165	4.3067	6.5233
1.30	191.64	0.001149	0.15125	813.42	1777.5	2590.9	814.91	1972.7	2787.6	2.2514	4.2438	6.4953
1.40	195.07	0.001144	0.14084	828.68	1764.1	2592.8	830.29	1959.7	2790.0	2.2842	4.1850	6.4692
1.50	198.32	0.001154	0.13177	843.14	1751.3	2594.5	844.87	1947.3	2792.1	2.3150	4.1298	6.4448
1.75	205.76	0.001166	0.11349	876.44	1721.4	2597.8	878.48	1918.0	2796.4	2.3851	4.0044	6.3895
2.00	212.42	0.001177	0.09963	906.42	1693.8	2600.3	908.77	1890.7	2799.5	2.4473	3.8935	6.3408
2.25	218.45	0.001187	0.08875	933.81	1668.2	2602.0	936.48	1865.2	2801.7	2.5034	3.7938	6.2971



TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua saturada: tabla de presión (unidades SI)* *(Continuación)*

Presión MPa P	Temp. °C T	Volumen específico, m³/kg — Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Energía interna, kJ/kg — Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Entalpía, kJ/kg — Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Entropía, kJ/kg K — Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
2.50	223.99	0.001197	0.07998	959.09	1644.0	2603.1	962.09	1841.0	2803.1	2.5546	3.7028	6.2574
2.75	229.12	0.001207	0.07275	982.65	1621.2	2603.8	985.97	1817.9	2803.9	2.6018	3.6190	6.2208
3.00	233.90	0.001216	0.06668	1004.76	1599.3	2604.1	1008.41	1795.7	2804.1	2.6456	3.5412	6.1869
3.25	238.38	0.001226	0.06152	1025.62	1578.4	2604.0	1029.60	1774.4	2804.0	2.6866	3.4685	6.1551
3.50	242.60	0.001235	0.05707	1045.41	1558.3	2603.7	1049.73	1753.7	2803.4	2.7252	3.4000	6.1252
4.0	250.40	0.001252	0.049778	1082.28	1520.0	2602.3	1087.29	1714.1	2801.4	2.7963	3.2737	6.0700
5.0	263.99	0.001286	0.039441	1147.78	1449.3	2597.1	1154.21	1640.1	2794.3	2.9201	3.0532	5.9733
6.0	275.64	0.001319	0.032440	1205.41	1384.3	2589.7	1213.32	1571.0	2784.3	3.0266	2.8625	5.8891
7.0	285.88	0.001351	0.027370	1257.51	1323.0	2580.5	1266.97	1505.1	2772.1	3.1210	2.6922	5.8132
8.0	295.06	0.001384	0.023518	1305.54	1264.3	2569.8	1316.61	1441.3	2757.9	3.2067	2.5365	5.7431
9.0	303.40	0.001418	0.020484	1350.47	1207.3	2557.8	1363.23	1378.9	2742.1	3.2857	2.3915	5.6771
10.0	311.06	0.001452	0.018026	1393.00	1151.4	2544.4	1407.53	1317.1	2724.7	3.3595	2.2545	5.6140
11.0	318.15	0.001489	0.015987	1433.68	1096.1	2529.7	1450.05	1255.5	2705.6	3.4294	2.1233	5.5527
12.0	324.75	0.001527	0.014263	1472.92	1040.8	2513.7	1491.24	1193.6	2684.8	3.4961	1.9962	5.4923
13.0	330.93	0.001567	0.012780	1511.09	985.0	2496.1	1531.46	1130.8	2662.2	3.5604	1.8718	5.4323
14.0	336.75	0.001611	0.011485	1548.53	928.2	2476.8	1571.08	1066.5	2637.5	3.6231	1.7485	5.3716
15.0	342.24	0.001658	0.010338	1585.58	869.8	2455.4	1610.45	1000.0	2610.5	3.6847	1.6250	5.3097
16.0	347.43	0.001711	0.009306	1622.63	809.1	2431.7	1650.00	930.6	2580.6	3.7460	1.4995	5.2454
17.0	352.37	0.001770	0.008365	1660.16	744.8	2405.0	1690.25	856.9	2547.2	3.8078	1.3698	5.1776
18.0	357.06	0.001840	0.007490	1698.86	675.4	2374.3	1731.97	777.1	2509.1	3.8713	1.2330	5.1044
19.0	361.54	0.001924	0.006657	1739.87	598.2	2338.1	1776.43	688.1	2464.5	3.9387	1.0841	5.0227
20.0	365.81	0.002035	0.005834	1785.47	507.6	2293.1	1826.18	583.6	2409.7	4.0137	0.9132	4.9269
21.0	369.89	0.002206	0.004953	1841.97	388.7	2230.7	1888.30	446.4	2334.7	4.1073	0.6942	4.8015
22.0	373.80	0.002808	0.003526	1973.16	108.2	2081.4	2034.92	124.0	2159.0	4.3307	0.1917	4.5224
22.09	374.14	0.003155	0.003155	2029.58	0	2029.6	2099.26	0	2099.3	4.4297	0	4.4297

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*

TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)*

	P = 10 kPa (45.81)				*P* = 50 kPa (81.33				*P* = 100 kPa (99.62)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
Sat.	14.674	2437.9	2584.6	8.1501	3.240	2483.8	2645.9	7.5939	1.6940	2506.1	2675.5	7.3593
50	14.869	2443.9	2592.6	8.1749								
100	17.196	2515.5	2687.5	8.4479	3.418	2511.6	2682.5	7.6947	1.6958	2506.6	2676.2	7.3614
150	19.513	2587.9	2783.0	8.6881	3.889	2585.6	2780.1	7.9400	1.9364	2582.7	2776.4	7.6133
200	21.825	2661.3	2879.5	8.9037	4.356	2659.8	2877.6	8.1579	2.1723	2658.0	2875.3	7.8342
250	24.136	2736.0	2977.3	9.1002	4.821	2735.0	2976.0	8.3555	2.4060	2733.7	2974.3	8.0332
300	26.445	2812.1	3076.5	9.2812	5.284	2811.3	3075.5	8.5372	2.6388	2810.4	3074.3	8.2157
400	31.063	2968.9	3279.5	9.6076	6.209	2968.4	3278.9	8.8641	3.1026	2967.8	3278.1	8.5434
500	35.679	3132.3	3489.0	9.8977	7.134	3131.9	3488.6	9.1545	3.5655	3131.5	3488.1	8.8341
600	40.295	3302.5	3705.4	10.1608	8.058	3302.2	3705.1	9.4177	4.0278	3301.9	3704.7	9.0975
700	44.911	3479.6	3928.7	10.4028	8.981	3479.5	3928.5	9.6599	4.4899	3479.2	3928.2	9.3398
800	49.526	3663.8	4159.1	10.6281	9.904	3663.7	4158.9	9.8852	4.9517	3663.5	4158.7	9.5652
900	54.141	3855.0	4396.4	10.8395	10.828	3854.9	4396.3	10.0967	5.4135	3854.8	4396.1	9.7767
1000	58.757	4053.0	4640.6	11.0392	11.751	4052.9	4640.5	10.2964	5.8753	4052.8	4640.3	9.9764
1100	63.372	4257.5	4891.2	11.2287	12.674	4257.4	4891.1	10.4858	6.3370	4257.3	4890.9	10.1658
1200	67.987	4467.9	5147:8	11.4090	13.597	4467.8 '	5147.7	10.6662	6.7986	4467.7	5147.6	10.3462
1300	72.603	4683.7	5409.7	11.5810	14.521	4683.6	5409.6	J.0.8382	7.2603	4683.5	5409.5	10.5182
	P = 200 kPa (120.23)				*P* = 300 kPa (133.55)				*P* = 400 kPa (143.63)			
Sat.	0.88573	2529.5	2706.6	7.1271	0.60582	2543.6	2725.3	6.9918	0.46246	2553.6	2738.5	6.8958
150	0.95964	2576.9	2768.8	7.2795	0.63388	2570.8	2761.0	7.0778	0.47084	2564.5	2752.8	6.9299
200	1.08034	2654.4	2870.5	7.5066	0.71629	2650.7	2865.5	7.3115	0.53422	2646.8	2860.5	7.1706
250	1.19880	2731.2	2971.0	7.7085	0.79636	2728.7	2967.6	7.5165	0.59512	2726.1	2964.2	7.3788
300	1.31616	2808.6	3071.8	7.8926	0.87529	2806.7	3069.3	7.7022	0.65484	2804.8	3066.7	7.5661
400	1.54930	2966.7	3276.5	8.2217	1.03151	2965.5	3275.0	8.0329	0.77262	2964.4	3273.4	7.8984
500	1.78139	3130.7	3487.0	8.5132	1.18669	3130.0	3486.0	8.3250	0.88934	3129.2	3484.9	8.1912
600	2.01297	3301.4	3704.0	8.7769	1.34136	3300.8	3703.2	8.5892	1.00555	3300.2	3702.4	8.4557
700	2.24426	3478.8	3927.7	9.0194	1.49573	3478.4	3927.1	8.8319	1.12147	3477.9	3926.5	8.6987
800	2.47539	3663.2	4158.3	9.2450	1.64994	3662.9	4157.8	9.0575	1.23722	3662.5	4157.4	8.9244

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 200 kPa (120.23)				*P* = 300 kPa (133.55)				*P* = 400 kPa (143.63)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
900	2.70643	3854.5	4395.8	9.4565	1.80406	3854.2	4395.4	9.2691	1.35288	3853.9	4395.1	9.1361
1000	2.93740	4052.5	4640.0	9.6563	1.95812	4052.3	4639.7	9.4689	1.46847	4052.0	4639.4	9.3360
1100	3.16834	4257.0	4890.7	9.8458	2.11214	4256.8	4890.4	9.6585	1.58404	4256.5	4890.1	9.5255
1200	3.39927	4467.5	5147.3	10.0262	2.26614	4467.2	5147.1	9.8389	1.69958	4467.0	5146.8	9.7059
1300	3.63018	4683.2	5409.3	10.1982	2.42013	4683.0	5409.0	10.0109	1.81511	4682.8	5408.8	9.8780
	P = 500 kPa (151.86)				*P* = 600 kPa (158.85)				*P* = 800 kPa (170.43)			
Sat.	0.37489	2561.2	2748.7	6.8212	0.31567	2567.4	2756.8	6.7600	0.24043	2576.8	2769.1	6.6627
200	0.42492	2642.9	2855.4	7.0592	0.35202	2638.9	2850.1	6.9665	0.26080	2630.6	2839.2	6.8158
250	0.47436	2723.5	2960.7	7.2708	0.39383	2720.9	2957.2	7.1816	0.29314	2715.5	2950.0	7.0384
300	0.52256	2802.9	3064.2	7.4598	0.43437	2801.0	3061.6	7.3723	0.32411	2797.1	3056.4	7.2327
350	0.57012	2882.6	3167.6	7.6328	0.47424	2881.1	3165.7	7.5463	0.35439	2878.2·	3161.7	7.4088
400	0.61728	2963.2	3271.8	7.7937	0.51372	2962.0	3270.2	7.7078	0.38426	2959.7	3267.1	7.5715
500	0.71093	3128.4	3483.8	8.0872	0.59199	3127.6	3482.7	8.0020	0.44331	3125.9	3480.6	7.8672
600	0.80406	3299.6	3701.7	8.3521	0.66974	3299.1	3700.9	8.2673	0.50184	3297.9	3699.4	8.1332
700	0.89691	3477.5	3926.0	8.5952	0.74720	3477.1	3925.4	8.5107	0.56007 ".	3476.2	3924.3	8.3770
800	0.98959	3662.2	4157.0	8.8211	0.82450	3661.8	4156;5	8.7367	0.61813	3661.1	4155.7	8.6033
900	1.08217	3853.6	4394.7	9.0329	0.90169	3853.3	4394.4	8.9485	0.67-610	3852.8	4393.6	8.8153
1000	1.17469	4051.8	4639.1	9.2328	0.97883	4051.5	4638.8	9.1484	0.73401	4051.0	4638.2	9.0153
1100	1.26718	4256.3	4889.9	9.4224	1.05594	4256.1	4889.6	9.3381	0.79188	4255.6	4889.1	9.2049
1200	1.35964	4466.8	5146.6	9.6028	1.13302	4466.5	5146.3	9.5185	0.84974	4466.1	5145.8	9.3854
1300	1.45210	4682.5	5408.6	9.7749	1.21009	4682.3	5408.3	9.6906	0.90758	4681.8	5407.9	9.5575
	P= 1.00 MPa(179.91)				*P* = 1.20 MPa (187.99)				*P* = 1.40 MPa (195.07)			
Sato	0.19444	2583.6	2778.1	6.5864	0.16333	2588.8	2784.8	6.5233	0.14084	2592.8	2790.0	6.4692
200	0.20596	2621.9	2827.9	6.6939	0.16930	2612.7	2815.9	6.5898	0.14302	2603.1	2803.3	6.4975
250	0.23268	2709.9	2942.6	6.9246	0.19235	2704.2	2935.0	6.8293	0.16350	2698.3	2927.2	6.7467
300	0.25794	2793.2	3051.2	7.1228	0.21382	2789.2	3045.8	7.0316	0.18228	2785.2	3040.4	6.9533
350	0.28247	2875.2	3157.7	7.3010	0.23452	2872.2	3153.6	7.2120	0.20026	2869.1	3149.5	7.1359
400	0.30659	2957.3	3263.9	7.4650	0.25480	2954.9	3260.7	7.3773	0.21780	2952.5	3257.4	7.3025
500	0.35411	3124.3	3478.4	7.7621	0.29463	3122.7	3476.3	7.6758	0.25215	3121.1	3474.1	7.6026

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 1.00 MPa (179.91)				*P* = 1.20 MPa (187 .99)				*P* = *1.40* MPa (195.07)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
600	0.40109	3296.8	3697.9	8.0289	0.33393	3295.6	3696.3	7.9434	0.28596	3294.4	3694.8	7.8710
700	0.44779	3475.4	3923.1	8.2731	0.37294	3474.5	3922.0	8.1881	0.31947	3473.6	3920.9	8.1160
800	0.49432	3660.5	4154.8	8.4996	0.41177	3659.8	4153.9	8.4149	0.35281	3659.1	4153.0	8.3431
900	0.54075	3852.2	4392.9	8.7118	0.45051	3851.6	4392.2	8.6272	0.38606	3851.0	4391.5	8.5555
1000	0.58712	4050.5	4637.6	8.9119	0.48919	4050.0	4637.0	8.8274	0.41924	4049.5	4636.4	8.7558
1100	0.63345	4255.1	4888.5	9.1016	0.52783	4254.6	4888.0	9.0171	0.45239	4254.1	4887.5	8.9456
1200	0.67977	4465.6	5145.4	9.2821	0.56646	4465.1	5144.9	9.1977	0.48552	4464.6	5144.4	9.1262
1300	0.72608	4681.3	5407.4	9.4542	0.60507	4680.9	5406.9	9.3698	0.51864	4680.4	5406.5	9.2983
	P = 1.60 MPa (201.40)				*P* = 1.80 MPa (207.15)				*P* = 2.00 MPa (212.42)			
Sat.	0.12380	2595.9	2794.0	6.4217	0.11042	2598.4	2797.1	6.3793	0.09963	2600.3	2799.5	6.3408
225	0.13287	2644.6	2857.2	6.5518	0.11673	2636.6	2846.7	6.4807	0.10377	2628.3	2835.8	6.4146
250	0.14184	2692.3	2919.2	6.6732	0.12497	2686.0	2911.0	6.6066	0.11144	2679.6	2902.5	6.5452
300	0.15862	2781.0	3034.8	6.8844	0.14021	2776.8	3029.2	6.8226	0.12547	2772.6	3023.5	6.7663
350	0.17456	2866.0	3145.4	7.0693	0.15457	2862.9	3141.2	7.0099	0.13857	2859.8	3137.0	6.9562
400	0.19005	2950.1	3254.2	7.2373	0.16847	2947.7	3250.9	7.1793	0.15120	2945.2	3247.6	7.1270
500	0.22029	3119.5	3471.9	7.5389	0.19550	3117.8	3469.7	7.4824	0.17568	3116.2	3467.6	7.4316
600	0.24998	3293.3	3693.2	7.8080	0.22199	3292.1	3691.7	7.7523	0.19960	3290.9	3690.1	7.7023
700	0.27937	3472.7	3919.7	8.0535	0.24818	3471.9	3918.6	7.9983	0.22323	3471.0	3917.5	7.9487
800	0.30859	3658.4	4152.1	8.2808	0.27420	3657.7	4151.3	8.2258	0.24668	3657.0	4150.4	8.1766
900	0.33772	3850.5	4390.8	8.4934	0.30012	3849.9	4390.1	8.4386	0.27004	3849.3	4389.4	8.3895
1000	0.36678	4049.0	4635.8	8.6938	0.32598	4048.4	4635.2	8.6390	0.29333	4047.9	4634.6	8.5900
1100	0.39581	4253.7	4887.0	8.8837	0.35180	4253.2	4886.4	8.8290	0.31659	4252.7	4885.9	8.7800
1200	0.42482	4464.2	5143.9	9.0642	0.37761	4463.7	5143.4	9.0096	0.33984	4463.2	5142.9	8.9606
1300	0.45382	4679.9	5406.0	9.2364	0.40340	4679.4	5405.6	9.1817	0.36306	4679.0	5405.1	9.1328
	P = 2.50 MPa (223.99)				*P* = 3.00 MPa (233.90)				*P* = 3.50 MPa (242.60)			
Sat.	0.07998	2603.1	2803.1	6.2574	0.06668	2604.1	2804.1	6.1869	0.05707	2603.7	2803.4	6.1252
225	0.08027	2605.6	2605.6	6.2638	–	–	–	–	–	–	–	–
250	0.08700	2662.5	2662.5	6.4084	0.07058	2644.0	2855.8	6.2871	0.05873	2623.7	2829.2	6.1748
300	0.09890	2761.6	2761.6	6.6437	0.08114	2750.0	2993.5	6.5389	0.06842	2738.0	2977.5	6.4460
350	0.10976	2851.8	2851.8	6.8402	0.09053	2843.7	3115.3	6.7427	0.07678	2835.3	3104.0	6.6578
400	0.12010	2939.0	2939.0	7.0147	0.09936	2932.7	3230.8	6.9211	0.08453	2926.4	3222.2	6.8404
450	0.13014	3025.4	3025.4	7.1745	0.10787	3020.4	3344.0	7.0833	0.09196	3015.3	3337.2	7.0051
500	0.13998	3112.1	3112.1	7.3233	0.11619	3107.9	3456.5	7.2337	0.09918	3103.7	3450.9	7.1571
600	0.15930	3288.0	3288.0	7.5960	0.13243	3285.0	3682.3	7.5084	0.11324	3282.1	3678.4	7.4338
700	0.17832	3468.8	3468.8	7.8435	0.14838	3466.6	3911.7	7.7571	0.12699	3464.4	3908.8	7.6837

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 2.50 MPa (223.99)				*P* = 3.00 MPa (233.90)				*P* = 3.50 MPa (242.60)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
800	0.19716	3655.3	4148.2	8.0720	0.16414	3653.6	4146.0	7.9862	0.14056	3651.8	4143.8	7.9135
900	0.21590	3847.9	4387.6	8.2853	0.17980	3846.5	4385.9	8.1999	0.15402	3845.0	4384.1	8.1275
1000	0.23458	4046.7	4633.1	8.4860	0.19541	4045.4	4631.6	8.4009	0.16743	4044.1	4630.1	8.3288
1100	0.25322	4251.5	4884.6	8.6761	0.21098	4250.3	4883.3	8.5911	0.18080	4249.1	4881.9	8.5191
1200	0.27185	4462.1	5141.7	8.8569	0.22652	4460.9	5140.5	8.7719	0.19415	4459.8	5139.3	8.7000
1300	0.29046	4677.8	5404.0	9.0291	0.24206	4676.6	5402.8	8.9442	0.20749	4675.5	5401.7	8.8723
	P = 500 kPa (151.86)				*P* = 600 kPa (158.85)				*P* = 800 kPa (170.43)			
Sat.	0.04978	2602.3	2801.4	6.0700	0.04406	2600.0	2798.3	6.0198	0.03944	2597.1	2794.3	5.9733
275	0.05457	2667.9	2886.2	6.2284	0.04730	2650.3	2863.1	6.1401	0.04141	2631.2	2838.3	6.0543
300	0.05884	2725.3	2960.7	6.3614	0.05135	2712.0	2943.1	6.2827	0.04532	2697.9	2924.5	6.2083
350	0.06645	2826.6	3092.4	6.5820	0.05840	2817.8	3080.6	6.5130	0.05194	2808.7	3068.4	6.4492
400	0.07341	2919.9	3213.5	6.7689	0.06475	2913.3	3204.7	6.7046	0.05781	2906.6	3195.6	6.6458
450	0.08003	3010.1	3330.2	6.9362	0.07074	3004.9	3323.2	6.8745	0.06330	2999.6	3316.1	6.8185
500	0.08643	3099.5	3445.2	7.0900	0.07651	3095.2	3439.5	7.0300	0.06857	3090.9	3433.8	6.9758
600	0.09885	3279.1	3674.4	7.3688	0.08765	3276.0	3670.5	7.3109	0.07869	3273.0	3666.5	7.2588
700	0.11095	3462.1	3905.9	7.6198	0.09847	3459.9	3903.0	7.5631	0.08849	3457.7	3900.1	7.5122
800	0.12287	3650.1	4141.6	7.8502	0.10911	3648.4	4139.4	7.7942	0.09811	3646.6	4137.2	7.7440
900	0.13469	3843.6	4382.3	8.0647	0.11965	3842.1	4380.6	8.0091	0.10762	3840.7	4378.8	7.9593
1000	0.14645	4042.9	4628.7	8.2661	0.13013	4041.6	4627.2	8.2108	0.11707	4040.3	4625.7	8.1612
1100	0.15817	4248.0	4880.6	8.4566	0.14056	4246.8	4879.3	8.4014	0.12648	4245.6	4878.0	8.3519
1200	0.16987	4458.6	5138.1	8.6376	0.15098	4457.4	5136.9	8.5824	0.13587	4456.3	5135.7	8.5330
1300	0.18156	4674.3	5400.5	8.8099	0.16139	4673.1	5399.4	8.7548	0.14526	4672.0	5398.2	8.7055
	P= 1.00 MPa(179.91)				*P* = 1.20 MPa (187.99)				*P* = 1.40 MPa (195.07)			
Sat.	0.03244	2589.7	2784.3	5.8891	0.02737	2580.5	2772.1	5.8132	0.02352	2569.8	2757.9	5.7431
300	0.03616	2667.2	2884.2	6.0673	0.02947	2632.1	2838.4	5.9304	0.02426	2590.9	2785.0	5.7905
350	0.04223	2789.6	3043.0	6.3334	0.03524	2769.3	3016.0	6.2282	0.02995	2747.7	2987.3	6.1300
400	0.04739	2892.8	3177.2	6.5407	0.03993	2878.6	3158.1	6.4477	0.03432	2863.8	3138.3	6.3633
450	0.05214	2988.9	3301.8	6.7192	0.04416	2977.9	3287.0	6.6326	0.03817	2966.7	3272.0	6.5550
500	0.05665	3082.2	3422.1	6.8802	0.04814	3073.3	3410.3	6.7974	0.04175	3064.3	3398.3	6.7239

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 6.00 MPa (275.64)				*P* = 7.00 MPa (285.88)				*P* = 8.00 MPa (295.06)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
550	0.06101	3174.6	3540.6	7.0287	0.05195	3167.2	3530.9	6.9486	0.04516	3159.8	3521.0	6.8778
600	0.06525	3266.9	3658.4	7.1676	0.05565	3260.7	3650.3	7.0894	0.04845	3254..4	3642.0	7.0205
700	0.07352	3453.2	3894.3	7.4234	0.06283	3448.6	3888.4	7.3476	0.05481	3444.0	3882.5	7.2812
800	0.08160	3643.1	4132.7	7.6566	0.06981	3639.6	4128.3	7.5822	0.06097	3636.1	4123.8	7.5173
900	0.08958	3837.8	4375.3	7.8727	0.07669	3835.0	4371.8	7.7991	0.06702	3832.1	4368.3	7.7350
1000	0.09749	4037.8	4622.7	8.0751	0.08350	4035.3	4619.8	8.0020	0.07301	4032.8	4616.9	7.9384
1100	0.10536	4243.3	4875.4	8.2661	0.09027	4240.9	4872.8	8.1933	0.07896	4238.6	4870.3	8.1299
1200	0.11321	4454.0	5133.3	8.4473	0.09703	4451.7	5130.9	8.3747	0.08489	4449.4	5128.5	8.3115
1300	0.12106	4669.6	5396.0	8.6199	0.10377	4667.3	5393.7	8.5472	0.09080	4665.0	5391.5	8.4842
	P = 9.00 MPa (303.40)				*P* = 10.00 MPa (311.06)				*P* = 12.50 MPa (327.89)			
Sat.	0.02048	2557.8	2742.1	5.6771	0.01803	2544.4	2724.7	5.6140	0.01350	2505.1	2673.8	5.4623
325	0.02327	2646.5	2855.9	5.8711	0.01986	2610.4	2809.0	5.7568	—	—	—	—
350	0.02580	2724.4	2956.5	6.0361	0.02242	2699.2	2923.4	5.9442	0.01613	2624.6	2826.2	5.7117
400	0.02993	2848.4	3117.8	6.2853	0.02641	2832.4	3096.5	6.2119	0.02000	2789.3	3039.3	6.0416
450	0.03350	2955.1	3256.6	6.4843	0.02975	2943.3	3240.8	6.4189	0.02299	2912.4	3199.8	6.2718
500	0.03677	3055.1	3386.1	6.6575	0.03279	3045.8	3373.6	6.5965	0.02560	3021.7	3341.7	6.4617
550	0.03987	3152.2	3511.0	6.8141	0.03564	3144.5	3500.9	6.7561	0.02801	3124.9	3475.1	6.6289
600	0.04285	3248.1	3633.7	6.9588	0.03837	3241.7	3625.3	6.9028	0.03029	3225.4	3604.0	6.7810
650	0.04574	3343.7	3755.3	7.0943	0.04101	3338.2	3748.3	7.0397	0.03248	3324.4	3730.4	6.9218
700	0.04857	3439.4	3876.5	7.2221	0.04358	3434.7	3870.5	7.1687	0.03460	3422.9	3855.4	7.0536
800	0.05409	3632.5	4119.4	7.4597	0.04859	3629.0	4114.9	7.4077	0.03869	3620.0	4103.7	7.2965
900	0.05950	3829.2	4364.7	7.6782	0.05349	3826.3	4361.2	7.6272	0.04267	3819.1	4352.5	7.5181
1000	0.06485	4030.3	4613.9	7.8821	0.05832	4027.8	4611.0	7.8315	0.04658	4021.6	4603.8	7.7237
1100	0.07016	4236.3	4867.7	8.0739	0.06312	4234.0	4865.1	8.0236	0.05045	4228.2	4858.8	7.9165
1200	0.07544	4447.2	5126.2	8.2556	0.06789	4444.9	5123.8	8.2054	0.05430	4439.3	5118.0	8.0987
1300	0.08072	4662.7	5389.2	8.4283	0.07265	4660.4	5387.0	8.3783	0.05813	4654.8	5381.4	8.2717
	P = 15 MPa (342.24)				*P* = 17.5 MPa (354.75)				*P* = 20 MPa (365.81)			
Sat.	.010338	2455.4	2610.5	5.3097	.0079204	2390.2	2528.8	5.1418	.0058342	2293.1	2409.7	4.9269
350	.011470	2520.4	2692.4	5.4420	–	–	–	–	–	–	–	–
400	.015649	2740.7	2975.4	5.8810	.0124477	2685.0	2902.8	5.7212	.0099423	2619.2	2818.1	5.5539
450	.018446	2879.5	3156.2	6.1403	.0151740	2844.2	3109.7	6.0182	.0126953	2806.2	3060.1	5.9016
500	.020800	2996.5	3308.5	6.3442	.0173585	2970.3	3274.0	6.2382	.0147683	2942.8	3238.2	6.1400
550	.022927	3104.7	3448.6	6.5198	.0192877	3083.8	3421.4	6.4229	.0165553	3062.3	3393.5	6.3347
600	.024911	3208.6	3582.3	6.6775	.0210640	3191.5	3560.1	6.5866	.0181781	3174.0	3537.6	6.5048
650	.026797	3310.4	3712.3	6.8223	.0227372	3296.0	3693.9	6.7356	.0196929	3281.5	3675.3	6.6582

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Vapor de agua sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 15 MPa (342.24)				*P* = 17.5 MPa (354.75)				*P* = 20 MPa (365.81)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
700	.028612	3410.9	3S40.1	6.9572	.0243365	3398.8	3824.7	6.8736	.0211311	3809.1	3809.1	6.7993
800	.032096	3611.0	4092.4	7.2040	.0273849	3601.9	4081.1	7.1245	.0238532	4069.8	4069.8	7.0544
900	.035457	3811.9	4343.8	7.4279	.0303071	3804.7	4335.1	7.3507	.0264463	4326.4	4326.4	7.2830
1000	.038748	4015.4	4596.6	7.6347	.0331580	4009.3	4589.5	7.5588	.0289666	4582.5	4582.5	7.4925
1100	.042001	4222.6	4852.6	7.8282	.0359695	4216.9	4846.4	7.7530	.0314471	4840.2	4840.2	7.6874
1200	.045233	4433.8	5112.3	8.0108	.0387605	4428.3	5106.6	7.9359	.0339071	5101.0	5101.0	7.8706
1300	.048455	4649.1	5375.9	8.1839	.0415417	4643.5	5370.5	8.1093	.0363574	5365.1	5365.1	8.0441
	P = 25 MPa				*P* = 30MPa				*P* = 35 MPa			
375	.001973	1798.6	1847.9	4.0319	.001789	1737.8	1791.4	3.9303	.001700	1702.9	1762.4	3.8721
400	.006004	2430.1	2580.2	5.1418	.002790	2067.3	2151.0	4.472S	.002100	1914.0	1987.5	4.2124
425	.007882	2609.2	2806.3	5.4722	.005304	2455.1	2614.2	5.1503	.003428	2253.4	2373.4	4.7747
450	.009162	2720.7	2949.7	5.6743	.006735	2619.3	2821.4	5.4423	.004962	2498.7	2672.4	5.1962
500	.011124	2884.3	3162.4	5.9592	.008679	2820.7	3081.0	5.7904	.006927	2751.9	2994.3	5.6281
550	.012724	3017.5	3335.6	6.1764	.010168	2970.3	3275.4	6.0342	.008345	2920.9	3213.0	5.9025
600	.014138	3137.9	3491.4	6.3602	.011446	3100.5	3443.9	6.2330	.009527	3062.0	3395.5	6.1178
650	.015433	3251.6	3637.5	6.5229	.012596	3221.0	3598.9	6.4057	.010575	3189.8	3559.9	6.3010
700	.016647	3361.4	3777.6	6.6707	.013661	3335.8	3745.7	6.5606	.011533	3309.9	3713.5	6.4631
800	.018913	3574.3	4047.1	6.9345	.015623	3555.6	4024.3	6.8332	.013278	3536.8	4001.5	6.7450
900	.021045	3783.0	4309.1	7.1679	.017448	3768.5	4291.9	7.0717	.014883	3754.0	4274.9	6.9886
1000	.023102	3990.9	4568.5	7.3801	.019196	3978~8	4554.7	7.2867	.016410	3966.7	4541.1	7.2063
1100	.025119	4200.2	4828.2	7.5765	.020903	4189.2	4816.3	7.4845	.017895	4178.3	4804.6	7.4056
1200	.027115	4412.0	5089.9	7.7604	.022589	4401.3	5079.0	7.6691	.019360	4390.7	5068.4	7.5910
1300	.029101	4626.9	1847.9	7.9342	.024266	4616.0	5344.0	7.8432	.020815	4605.1	5333.6	7.7652
	P = 40 MPa				*P* = 50 MPa				*P* = 60 MPa			
375	.0016406	1677.1	1742.7	3.8289	.0015593	1638.6	1716.5	3.7638	.0015027	1609.3	1699.5	3.7140
400	.0019077	1854.5	1930.8	4.1134	.0017309	1788.0	1874.6	4.0030	.0016335	1745.3	1843.4	3.9317
425	.0025319	2096.8	2198.1	4.5028	.0020071	1959.6	2060.0	4.2733	.0018165	1892.7	2001.7	4.1625
450	.0036931	2365.1	2512.8	4.9459	.0024862	2159.6	2283.9	4.5883	.0020850	2053.9	2179.0	4.4119
500	.0056225	2678.4	2903.3	5.4699	.0038924	2525.5	2720.1	5.1725	.0029557	2390.5	2567.9	4.9320

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*

TABLA *Agua líquida comprimida (unidades SI)*

	P = 5.00 MPa (263.99)				*P* = 10.00 MPa (311.06				*P* = 15.00 MPa (342.24)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
600	.0080943	3022.6	3346.4	6.0113	6.0113	2942.0	3247.6	5.8177	.0048345	2861.1	3151.2	5.6451
650	.0090636	3158.0	3520.6	6.2054	6.2054	3093.6	3441.8	6.0342	~0055953	3028.8	3364.6	5.8829
700	.0099415	3283.6	3681.3	6.3750	6.3750	3230.5	3616.9	6.2189	.0062719	3177.3	3553.6	6.0824
800	.0115228	3517.9	3978.8	6.6662	6.6662	3479.8	3933.6	6.5290	.0074588	3441.6	3889.1	6.4110
900	.0129626	3739.4	4257.9	6.9150	6.9150	3710.3	4224.4	6.7882	.0085083	3681.0	4191.5	6.6805
1000	.0143238	3954,6	4527.6	7.1356	7.1356	3930.5	4501.1	7.0146	.0094800	3906.4	4475.2	6.9126
1100	.0156426	4167.4	4793.1	7.3364	7.3364	4145.7	4770.6	7.2183	.0104091	4124.1	4748.6	7.1194
1200	.0169403	4380.1	5057.7	7.5224	7.5224	4359.1	5037.2	7.4058	.0113167	4338.2	5017.2	7.3082
1300	.0182292	4594.3	5323.5	7.6969	7.6969	4572.8	5303.6	7.5807	.0122155	4551.4	5284.3	7.4837

Agua líquida comprimida (unidades SI)

	P = 5.00 MPa (263.99)				*P* = 10.00 MPa (311.06)				*P* = 15.00 MPa (342.24)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
Sat.	.0012859	1147.78	1154.21	2.9201	.0014524	139~.00	1407.53	3.3595	.0016581	1585.58	1610.45	3.6847
0	.0009977	0.03	5.02	0.0001	.0009952	0.10	10.05	0.0003	.0009928	0.15	15.04	0.0004
20	.0009995	83.64	88.64	0.2955	.0009972	83.35	93.32	0.2945	.0009950	83.05	97.97	0.2934
40	.0010056	166.93	171.95	0.5705	.0010034	166.33	176.36	0.5685	.0010013	165.73	180.75	0.5665
60	.0010149	250.21	255.28	0.8284	.0010127	249.34	259.47	0.8258	.0010105	248.49	263.65	0.8231
80	.0010268	333.69	338.83	1.0719	.0010245	332.56	342.81	1.0687	.0010222	331.46	346.79	1.0655
100	.0010410	417.50	422.71	1.3030	.0010385	416.09	426.48	1.2992	.0010361	414.72	430.26	1.2954
120	.0010576	501.79	507.07	1.5232	.0010549	500.07	510.61	1.5188	.0010522	498.39	514.17	1.5144
140	.0010768	586.74	592.13	1.7342	.0010737	584.67	595.40	1.7291	.0010707	582.64	598.70	1.7241
160	.0010988	672.61	678.10	1.9374	.0010953	670.11	681.07	1.9316	.0010918	667.69	684.07	1.9259
180	.0011240	759.62	765.24	2.1341	.0011199	756.63	767.83	2.1274	.0011159	753.74	770.48	2.1209
200	.0011530	848.08	853.85	2.3254	.0011480	844.49	855.97	2.3178	.0011433	841.04	858.18	2.3103
220	.0011866	938.43	944.36	2.5128	.0011805	934.07	945.88	2.5038	.0011748	929.89	947.52	2.4952
240	.0012264	1031.34	1037.47	2.6978	.0012187	1025.94	1038.13	2.6872	.0012114	1020.82	1038.99	2.6770

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua líquida comprimida (unidades SI)* *(Continuación)*

	P = 5.00 MPa (263.99				P = 10.00 MPa (311.06)				P = 15.00 MPa (342.24)			
T	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*	*v*	*u*	*h*	*s*
260	.0012748	1127.92	1134.30	2.8829	.0012645	1121.03	1133.68	2.8698	.0012550	1114.59	1133.41	2.8575
280					0013216	1220.90	1234.11	3.0547	.0013084	1212.47	1232.09	3.0392
300					.0013972	1328.34	1342.31	3.2468	.0013770	1316.58	1337.23	3.2259
320									.0014724	1431.05	1453.13	3.4246
340									.0016311	1567.42	1591.88	3.6545
	P = 9.00 MPa (303.40)				P = 10.00 MPa (311.06)				P = 12.50 MPa (327.89)			
Sat.	.0020353	1785.47	1826.18	4.0137	—	—	—	—	—	—	—	—
0	.0009904	0.20	20.00	0.0004	.0009856	0.25	29.82	0.0001	.0009766	0.20	49.03	-0.0014
20	.0009928	82.75	102.61	0.2922	.0009886	82.16	111.82	0.2898	.0009804	80.98	130.00	0.2847
40	.0009992	165.15	185.14	0.5646	.0009951	164.01	193.87	0.5606	.0009872	161.84	211.20	0.5526
60	.0010084	247.66	267.82	0.8205	.0010042	246.03	276.16	0.8153	.0009962	242.96	292.77	0.8051
80	.0010199	330.38	350.78	1.0623	.0010156	328.28	358.75	1.0561	.0010073	324.32	374.68	1.0439
100	.0010337	413.37	434.04	1.2917	.0010290	410.76	441.63	1.2844	.0010201	405.86	456.87	1.2703
120	.0010496	496.75	517.74	1.5101	.0010445	493.58	524.91	1.5017	.0010348	487.63	539.37	1.4857
140	.0010678	580.67	602.03	1.7192	.0010621	576.86	608.73	1.7097	.0010515	569.76	622.33	1.6915
160	.0010885	665.34	687.11	1.9203	.0010821	660.81	693.27	1.9095	.0010703	652.39	705.91	1.8890
180	.0011120	750;94	773.18	2.1146	.0011047	745.57	778.71	2.1024	.0010912	735.68	790.24	2.0793
200	.0011387	837.70	860.47	2.3031	.0011302	831.34	865.24	2.2892	.0011146	819.73	875.46	2.2634
220	.0011693	925.89	949.27	2.4869	.0011590	918.32	953.09	2.4710	.0011408	904.67	961.71	2.4419
240	.0012046	1015.94	1040.04	2.6673	.0011920	1006.84	1042.60	2.6489	.0011702	990.69	1049.20	2.6158
260	.0012462	1108.53	1133.45	2.8459	.0012303	1097.38	1134.29	2.8242	.0012034	1078.06	1138.23	2.7860
280	.0012965	1204.69	1230.62	3.0248	.0012755	1190.69	1228.96	2.9985	.0012415	1167.19	1229.26	2.9536
300	.0013596	1306.10	1333.29	3.2071	.0013304	1287.89	1327.80	3.1740	.0012860	1258.66	1322.95	3.1200
320	.0014437	1415.66	1444.53	3.3978	.0013997	1390.64	1432.63	3.3538	.0013388	1353.23	1420.17	3.2867
340	.0015683	1539.64	1571.01	3.6074	.0014919	1501.71	1546.47	3.5425	.0014032	1451.91	1522.07	3.4556
360	.0018226	1702.78	1739.23	3.8770	.0016265	1626.57	1675.36	3.7492	.0014838	1555.97	1630.16	3.6290
380	—	—	—	—	.0018691	1781.35	1837.43	4.0010	.0015883	1667.13	1746.54	3.8100

TABLA *Propiedades termodinámicas del agua (unidades SI)*
TABLA *Agua sólido saturado-vapor saturado (unidades SI)*

	Volumen específico, m³/kg			Energía interna, kJ/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión kPa, MPa P	Líquido saturado v_f	Vapor saturado v_g	Líquido saturado u_f	Evap. u_{fg}	Vapor saturado u_g	Líquido saturado h_g	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0.01	0.6113	1.0908	206.153	–333.40	2708.7	2375.3	–333.40	2834.7	2501.3	–1.2210	10.3772	9.1562
0	0.6108	1.0908	206.315	–333.42	2708.7	2375.3	–333.42	2834.8	2501.3	–1.2211	10.3776	9.1565
–2	0.5177	1.0905	241.663	–337.61	2710.2	2372.5	–337.61	2835.3	2497.6	–1.2369	10.4562	9.2193
–4	0.4376	1.0901	283.799	–341.78	2711.5	2369.8	–341.78	2835.7	2494.0	–1.2526	10.5358	9.2832
–6	0.3689	1.0898	334.139	–345.91	2712.9	2367.0	–345.91	2836.2	2490.3	–1.2683	10.6165	9.3482
–8	0.3102	1.0894	394.414	–350.02	2714.2	2364.2	–350.02	2836.6	2486.6	–1.2839	10.6982	9.4143
–10	0.2601	1.0891	466.757	–354.09	2715.5	2361.4	–354.09	2837.0	2482.9	–1.2995	10.7809	9.4815
–12	0.2176	1.0888	553.803	–358.14	2716.8	2358.7	–358.14	2837.3	2479.2	–1.3150	10.8648	9.5498
–14	0.1815	1.0884	658.824	–362.16	2718.0	2355.9	–362.16	2837.6	2475.5	–1.3306	10.9498	9.6192
–16	0.1510	1.0881	785.907	–366.14	2719.2	2353.1	–366.14	2837.9	2471.8	–1.3461	11.0359	9.6898
–18	0.1252	1.0878	940.183	–370.10	2720.4	,2350.3	–370.10	2838.2	2468.1	–1.3617	11.1233	9.7616
–20	0.10355	1.0874	1128.113	–374.03	2721.6	2341.5	–374.03	2838.4	2464.3	–1.3772	11.2120	9.8348
–22	0.08535	1.0871	1357.864	–377.93	2722.7	2344.7	–377.93	2838.6	2460.6	–1.3928	11.3020	9.9093
–24	0.07012	1.0868	1639.753	–381.80	2723.7	2342.0	–381.80	2838.7	2456.9	–1.4083	11.3935	9.9852
–26	0.05741	1.0864	1986.776	–385.64	2724.8	2339.2	–385.64	2838.9	2453.2	–1.4239	11.4864	10.0625
–28	0.04684	1.0861	2415.201	–389.45	2725.8	2336.4	–389.45	2839.0	2449.5	–1.4394	11.5808	10.1413
–30	0.03810	1.0858	2945.228	–393.23	2726.8	2333.6	–393.23	2839.0	2445.8	–1.4550	11.6765	10.2215
–32	0.03090	1.0854	3601.823	–396.98	2727.8	2330.8	–396.98	2839.1	2442.1	–1.4705	11.7733	10.3028
–34	0.02499	1.0851	4416.253	–400.71	2728.7	2328.0	–400.71	2839.1	2438.4	–1.4860	11.8713	10.3853
–36	0.02016	1.0848	5430.116	–404.40	2729.6	2325.2	–404.40	2839.1	2434.7	–1.5014	11.9704	10.4690
–38	0.01618	1.0844	6707.022	–408.06	2730.5	2322.4	–408.06	2839.0	2431.0	–1.5168	12.0714	10.5546.
–40	0.01286	1.0841	8366.396	–411.70	2731.3	2319.6	–411.70	2838.9	2427.2	–1.5321	12.1768	10.6447

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*

TABLA *Amoniaco saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m³/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. kPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–50	40.86	0.001424	2.62524	2.62667	-43.76	1416.34	1372.57	–0.1916	6.3470	6.1553
–48	45.94	0.001429	2.35297	2.35440	-35.04	1410.95	1375.90	–0.1528	6.2666	6.1139
–46	51.52	0.001434	2.11359	2.11503	-26.31	1405.50	1379.19	–0.1142	6.1875	6.0733
–44	57.66	0.001439	1.90262	1.90406	-17.56	1400.00	1332.44	–0.0759	6.1095	6.0336
–42	64.38	0.001444	1.71625	1.71769	-8.79	1394.44	1385.65	–0.0378	6.0326	5.9948
–40	71.72	0.001450	1.55124	1.55269	0	1388.82	1388.82	0	5.9568	5.9568
–38	79.74	0.001455	1.40482	1.40627	8.81	1383.13	1391.94	0.0376	5.8820	5.9196
–36	88.48	0.001460	1.27461	1.27607	17.64	1377.39	1395.03	0.0749	5.8082	5.8831
–34	97.98	0.001465	1.15857	1.16004	26.49	1371.58	1398.07	0.1120	5.7353	5.8473
–32	108.29	0.001471	1.05496	1.05643	35.36	1365.70	1401.06	0.1489	5.6634	5.8123
–30	119.46	0.001476	0.96226	0.96374	44.26	1359.76	1404.01	0.1856	5.5924	5.7780
–28	131.54	0.001482	0.87916	0.88064	53.17	1353.74	1406.92	0.2220	5.5223	5.7443
–26	144.59	0.001487	0.80453	0.80602	62.11	1347.66	1409.77	0.2582	5.4530	5.7113
–24	158.65	0.001493	0.73738	0.73887	71.07	1341.51	1412.58	0.2942	5.3846	5.6788
–22	173.80	0.001498	0.67685	0.67835	80.05	1335.29	1415.34	0.3301	5.3170	5.6470
–20	190.08	0.001504	0.62220	0.62371	89.05	1329.00	1418.05	0.3657	5.2501	5.6158
–18	207.56	0.001510	0.57277	0.57428	98.08	1322.64	1420.71	0.4011	5.1840	5.5851
–16	226.29	0.001516	0.52800	0.52951	107.12	1316.20	1423.32	0.4363	5.1187	5.5550
–14	246.35	0.001522	0.48737	0.48889	116.19	1309.68	1425.88	0.4713	5.0541	5.5254
–12	267.79	0.001528	0.45045	0.45197	125.29	1303.09	1428.38	0.5061	4.9901	5.4963
–10	290.67	0.001534	0.41684	0.41837	134.41	1296.42	1430.83	0.5408	4.9269	5.4676
–8	315.08	0.001540	0.38621	0.38775	143.55	1289.67	1433.22	0.5753	4.8642	5.4395
–6	341.07	0.001546	0.35824	0.35979	152.72	1282.84	1435.56	0.6095	4.8023	5.4118
–4	368.72	0.001553	0.33268	0.33423	161.91	1275.93	1437.84	0.6437	4.7409	5.3846
–2	398.10	0.001559	0.30928	0.31084	171.12	1268.94	1440.06	0.6776	4.6801	5.3577

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco saturado (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m³/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. kPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
0	429.29	0.001566	0.28783	0.28940	180.36	1261.86	1442.22	0.7114	4.6199	5.3313
2	462.34	0.001573	0.26815	0.26972	189.63	1254.69	1444.32	0.7450	4.5603	5.3053
4	497.35	0.001579	0.25005	0.25163	198.93	1247.43	1446.35	0.7785	4.5012	5.2796
6	534.39	0.001586	0.23341	0.23499	208.25	1240.08	1448.32	0.8118	4.4426	5.2543
8	573.54	0.001593	0.21807	0.21966	217.60	1232.63	1450.23	0.8449	4.3845	5.2294
10	614.87	0.001600	0.20392	0.20553	226.97	1225.10	1452.07	0.8779	4.3269	5.2048
12	658.48	0.001608	0.19086	0.19247	236.38	1217.46	1453.84	0.9108	4.2698	5.1805
14	704.43	0.001615	0.17878	0.18040	245.81	1209.72	1455.53	0.9435	4.2131	5.1565
16	752.81	0.001623	0.16761	0.16923	255.28	1201.88	1457.16	0.9760	4.1568	5.1328
18	803.71	0.001630	0.15725	0.15888	264.77	1193.94	1458.71	1.0085	4.1009	5.1094
20	857.22	0.001638	0.14764	0.14928	274.30	1185.89	1460.18	1.0408	4.0455	5.0863
22	913.41	0.001646	0.13872	0.14037	283.85	1177.73	1461.58	1.0730	3.9904	5.0634
24	972.38	0.001654	0.13043	0.13208	293.44	1169.45	1462.89	1.1050	3.9357	5.0407
26	1034.21	0.001663	0.12272	0.12438	303.07	1161.06	1464.13	1.1370	3.8813	5.0182
28	1099.00	0.001671	0.11553	0.11720	3'12.72	1152.55	1465.27	1.1688	3.8272	4.9960
30	1166.83	0.001680	0.10883	0.11051	322.42	1143.92	1466.33	1.2005	3.7735	4.9740
32	1237.80	0.001688	0.10258	0.10427	332.14	1135.16	1467.30	1.2321	3.7200	4.9521
34	1312.00	0.001697	0.09675	0.09845	341.91	1126.27	1468.17	1.2635	3.6669	4.9304
36	1389.52	0.001707	0.09129	0.09300	351.71	1117.25	1468.95	1.2949	3.6140	4.9089
38	1470.46	0.001716	0.08619	0.08790	361.55	1108.09	1469.64	1.3262	3.5613	4.8875
40	1554.92	0.001725	0.08141	0.08313	371.43	1098.79	1470.22	1.3574	3.5088	4.8662
42	1642.98	0.001735	0.07693	0.07866	381.35	1089.34	1470.69	1.3885	3.4566	4.8451
44	1734.75	0.001745	0.07272	0.07447	391.31	1079.75	1471.06	1.4195	3.4045	4.8240
46	1830.33	0.001755	0.06878	0.07053	401.32	1070.00	1471.32	1.4504	3.3526	4.8030
48	1929.82	0.001766	0.06507	0.06684	411.38	1060.09	1471.46	1.4813	3.3009	4.7822
50	2033.32	0.001777	0.06159	0.06336	421.48	1050.01	1471.49	1.5121	3.2493	4.7613



TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco sobrecalentado (unidades SI)*

Presión abs. kPa. (T saturación)		*Temperatura, °C* –20	–10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	100
	v	2.4463	2.5471	2.6474	2.7472	2.8466	2.9458	3.0447	3.1435	3.2421	3.3406	3.4390	—
50	*h*	1434.6	1455.7	1476.9	1498.1	1519.3	1540.6	1562.0	1583.5	1605.1	1626.9	1648.8	—
(–46.53)	*s*	6.3187	6.4006	6.4795	6.5556	6.6293	6.7008	6.7703	6.8379	6.9038	6.9682	7.0312	—
	v	1.6222	1.6905	1.7582	1.8255	1.8924	1.9591	2.0255	2.0917	2.1577	2.2237	2.2895	—
75	*h*	1431.7	1453.3	1474.8	1496.2	1517.7	1539.2	1560.7	1582.4	1604.1	1626.0	1648.0	—
(–39.16)	*s*	6.1120	6.1954	6.2756	6.3527	6.4272	6.4993	6.5693	6.6373	6.7036	6.7683	6.8315	—
	v	1.210 1	1.2621	1.3136	1.3647	1.4153	1.4657	1.5158	1.5658	1.6156	1.6652	1.7148	1.8137
100	*h*	1428.8	1450.8	1472.6	1494.4	1516.1	1537.7	1559.5	1581.2	1603.1	1625.1	1647.1	1691.7
(–33.59)	*s*	5.9626	6.0477	6.1291	6.2073	6.2826	6.3553	6.4258	6.4943	6.5609	6.6258	6.6892	6.8120
	v	0.9627	1.0051	1.0468	1.0881	1.1290	1.1696	1.2100	1.2502	1.2903	1.3302	1.3700	1.4494
125	*h*	1425.9	1448.3	1470.5	1492.5	1514.4	1536.3	1558.2	1580.1	1602.1	1624.1	1646.3	1691.0
(–29.06)	*s*	5.8446	5.9314	6.0141	6.0933	6.1694	6.2428	6.3138	6.3827	6.4496	6.5149	6.5785	6.7017
	v	0.7977	0.8336	0.8689	0.9037	0.9381	0.9723	1.0062	1.0398	1.0734	1.1068	1.1401	1.2065
150	*h*	1422.9	1445.7	1468.3	1490.6	1512.8	1534.8	1556.9	1578.9	1601.0	1623.2	1645.4	1690.2
(–25.21)	*s*	5.7465	5.8349	5.9189	5.9992	6.0761	6.1502	6.2217	6.2910	6.3583	6.4238	6.4877	6.6112
	v	—	0.6193	0.6465	0.6732	0.6995	0.7255	0.7513	0.7769	0.8023	0.8275	0.8527	0.9028
200	*h*	—	1440.6	1463.8	1486.8	1509.4	1531.9	1554.3	1576.6	1598.9	1621.3	1643.7	1688.8
(–18.85)	*s*	—	5.6791	5.7659	5.8484	5.9270	6.0025	6.0751	6.1453	6.2133	6.2794	6.3437	6.4679
	v	—	0.4905	0.5129	0.5348	0.5563	0.5774	0.5983	0.6190	0.6396	0.6600	0.6803	0.7206
250	*h*	—	1435.3	1459.3	1482.9	1506.0	1529.0	1551.7	1574.3	1596.8	1619.4	1641.9	1687.3
(–13.65)	*s*	—	5.5544	5.6441	5.7288	5.8093	5.8861	5.9599	6.0309	6.0997	6.1663	6.2312	6.3561
	v	—	—	0.4238	0.4425	0.4608	0.4787	0.4964	0.5138	0.5311	0.5483	0.5653	0.5992
300	*h*	—	—	1454.7	1478.9	1502.6	1525.9	1549.0	1571.9	1594.7	1617.5	1640.2	1685.8
(–9.22)	*s*	—	—	5.5420	5.6290	5.7113	5.7896	5.8645	5.9365	6.0060	6.0732	6.1385	6.2642



TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco sobrecalentado (unidades SI)*

Presión abs. kPa (T saturación)		*Temperatura °C* -20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	100
350 (-5.34)	*v*	—	—	0.3601	0.3765	0.3925	0.4081	0.4235	0.4386	0.4536	0.4685	0.4832	0.5124
	h	—	—	1449.9	1474.9	1499.1	1522.9	1546.3	1569.5	1592.6	1615.5	1638.4	1684.3
	s	—	—	54532	5.5427	5.6270	5.7068	5.7828	5.8557	5.9259	5.9938	6.0596	6.1860
400 (-1.87)	*v*	—	—	0.3123	0.3270	0.3413	0.3552	0.3688	0.3823	0.3955	0.4086	0.4216	0.4473
	h	—	—	1445.1	1470.7	1495.6	1519.8	1543.6	1567.1	1590.4	1613.6	1636.7	1682.8
	s	—	—	5.3741	5.4663	5.5525	5.6338	5.7111	5.7850	5.8560	5.9244	5.9907	6.1179
450 (1.27)	*v*	—	—	—	0.2885	0.3014	0.3140	0.3263	0.3384	0.3503	0.3620	0.3737	0.3967
	h	—	—	—	1466.5	1492.0	1516.7	1540.9	1564.7	1588.2	1611.6	1634.9	1681.3
	s	—	—	—	5.3972	5.4855	5.5685	5.6470	5.7219	5.7936	5.8627	5.9295	6.0575
		20	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*100*	*120*	*140*	*160*	*180*
500 (-4.15)	*v*	0.2695	0.2810	0.2923	0.3033	0.3141	0.3248	0.3353	0.3562	0.3768	0.3972	—	—
	h	1488.3	1513.5	1538.1	1562.3	1586.1	1609.6	1633.1	1679.8	1726.6	1773.8	—	—
	s	5.4244	5.5090	5.5889	5.6647	5.7373	5.8070	5.8744	6.0031	6.1253	6.2422	—	—
600 (-9.29)	*v*	0.2215	0.2315	0.2412	0.2506	0.2598	0.2689	0.2778	0.2955	0.3128	0.3300	—	—
	h	1480.8	1507.1	1532.5	1557.3	1581.6	1605.7	1629.5	1676.8	1724.0	1771.5	—	—
	s	5.3156	5.4037	5.4862	5.5641	5.6383	5.7094	5.7778	5.9081	6.0314	6.1491	—	—
700 (-18.85)	*v*	0.1872	0.1961	0.2046	0.2129	0.2210	'0.2289	0.2367	0.2521	0.2671	0.2819	—	—
	h	1473.0	1500.4	1526.7	1552.2	1577.1	1601.6	1625.8	1673.7	1721.4	1769.2	—	—
	s	5.2196	5.3115	5.3968	5.4770	5.5529	5.6254	5.6949	5.8268	5.9512	6.0698	—	—
800 (-13.65)	*v*	0.1614	0.1695	0.1772	0.1846	0.1919	0.1990	0.2059	0.2195	0.2328	0.2459	0.2589	—
	h	1464.9	1493.5	1520.8	1547.0	1572.5	1597.5	1622.1	1670.6	1718.7	1766.9	1815.3	—
	s	5.1328	5.2287	5.3171	5.3996	5.4774	5.5513	5.6219	5.7555	5.8811	6.0006	6.1150	—
900 (-9.22)	*v*	—	0.1487	0.1558	0.1626	0.1692	0.1756	0.1819	0.1942	0.2061	0.2179	0.2295	—
	h	—	1486.5	1514.7	1541.7	1567.9	1593.3	1618.4	1667.5	1716.1	1764.5	1813.2	—
	s	—	5.1530	5.2447	5.3296	5.4093	5.4847	5.5565	5.6919	5.8187	5.9389	6.0541	—
10000 (24.91)	*v*	—	0.1321	0.1387	0.1450	0.1511	0.1570	0.1627	0.1739	0.1848	0.1955	0.2060	0.2164
	h	—	1479.1	1508.5	1536.3	1563.1	1589.1	1614.6	1664.3	1713.4	1762.2	1811.2	1860.5
	s	—	5.0826	5.1778	5.2654	5.3471	5.4240	5.4971	5.6342	5.7622	5.8834	5.9992	6.1105

TABLA *Propiedades termodinámicas del amoniaco (unidades SI)*
TABLA *Amoniaco sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Presión abs. kPa (T saturación)		*Temperatura °C*											
		40	*50*	*60*	*70*	*80*	*100*	*120*	*140*	*160*	*180*	*200*	*220*
1200 (-30.95)	*v*	0.1129	0.1185	0.1238	0.1289	0.1339	0.1435	0.1527	0.1618	0.1707	0.1795	—	—
	h	1495.4	1525.1	1553.3	1580.5	1606.8	1658.0	1708.0	1757.5	1807.1	1856.9	—	—
	s	5.0564	5.1497	5.2357	5.3159	5.3916	5.5325	5.6631	5.7860	5.9031	6.0156	—	—
1400 (36.26)	*v*	0.0943	0.0994	0.1042	0.1088	0.1132	0.1217	0.1299	0.1378	0.1455	0.1532	—	—
	h	1481.6	1513.4	1543.1	1571.5	1598.8	1651.4	1702.5	1752.8	1802.9	1853.2	—	—
	s	4.9463	5.0462	5.1370	5.2209	5.2994	5.4443	5.5775	5.7023	5.8208	5.9343	—	—
1600 (41.03)	*v*	—	0.0851	0.0895	0.0937	0.0977	0.1054	0.1127	0.1197	0.1266	0.1334	—	—
	h	—	1501.0	1532.5	1562.3	1590.7	1644.8	1696.9	1748.0	1798.7	1849.5	—	—
	s	—	4.9510	5.0472	5.1351	5.2167	5.3659	5.5018	5.6286	5.7485	5.8631	—	—
1800 (45.37)	*v*	—	0.0738	0.0780	0.0819	0.0857	0.0927	0.0993	0.1057	0.1119	0.1180	—	—
	h	—	1487.9	1521.4	1552.7	1582.2	1638.0	1691.2	1743.1	1794.5	1845.7	—	—
	s	—	4.8614	4.9637	5.0561	5.1410	5.2948	5.4337	5.5624	5.6838	5.7995	—	—
20000 (49.36)	*v*	—	0.0647	0.0687	0.0725	0.0760	0.0825	0.0886	0.0945	0.1002	0.1057	—	—
	h	—	1473.9	1509.8	1542.7	1573.5	1631.1	1685.5	1738.2	1790.2	1842.0	—	—
	s	—	4.7754	4.8848	4.9821	5.0707	5.2294	5.3714	5.5022	5.6251	5.742	—	—



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m³/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–90	0.00284	0.000608	4.414937	4.415545	–43.284	189.748	146.464	-0.20863	1.03593	0.82730
–85	0.00424	0.000612	3.036704	3.037316	–39.005	187.737	148.731	-0.18558	0.99771	0.81213
–80	0.00617	0.000617	2.137728	2.138345	–34.721	185.740	151.018	-0.16312	0.96155	0.79843
–75	0.00879	0.000622	1.537030	1.537651	–30.430	183.751	153.321	-0.14119	0.92725	0.78606
–70	0.01227	0.000627	1.126654	1.127280	–26.128	181.764	155.636	-0.11977	0.89465	0.77489
–65	0.01680	0.000632	0.840534	0.841166	–21.814	179.774	157.960	-0.09880	0.86361	0.76480
–60	0.02262	0.000637	0.637274	0.637911	–17.485	177.775	160.289	-0.07827	0.83397	0.75570
–55	0.02998	0.000642	0.490358	0.491000	–13.141	175.762	162.621	-0.05815	0.80563	0.74748
–50	0.03915	0.000648	0.382457	0.383105	–8.779	173.730	164.951	-0.03841	0.77848	0.74007
–45	0.05044	0.000654	0.302029	0.302682	–4.400	171.676	167.276	-0.01903	0.75241	0.73338
–40	0.06417	0.000659	0.241251	0.241910	0	169.595	169.595	0	0.72735	0.72735
–35	0.08071	0.000666	0.194732	0.195398	4.420	167.482	171.903	0.01871	0.70322	0.72193
–30	0.10041	0.000672	0.158703	0.159375	8.862	165.335	174.197	0.03711	0.67993	0.71704
–25	0.12368	0.000679	0.130487	0.131166	13.327	163.149	176.476	0.05522	0.65742	0.71264
–20	0.15093	0.000685	0.108162	0.108847	17.816	160.920	178.736	0.07306	0.63563	0.70869
–15	0.18260	0.000693	0.090326	0.091018	22.331	158.643	180.974	0.09063	0.61450	0.70513
–10	0.21912	0.000700	0.075946	0.076646	26.874	156.314	183.188	0.10796	0.59397	0.70194
–5	0.26096	0.000708	0.064255	0.064963	31.446	153.928	185.375	0.12506	0.57400	0.69907
0	0.30861	0.000716	0.054673	0.055389	36.052	151.479	187.531	0.14196	0.55453	0.69649
5	0.36255	0.000724	0.046761	0.047485	40.694	148.961	189.654	0.15865	0.53551	0.69416
10	0.42330	0.000733	0.040180	0.040914	45.375	146.365	191.740	0.17517	0.51689	0.69206
15	0.49137	0.000743	0.034671	0.035413	50.100	143.684	193.784	0.19154	0.49862	0.69015
20	0.56729	0.000752	0.030028	0.030780	54.874	140.909	195.783	0.20777	0.48064	0.68841
25	0.65162	0.000763	0.026091	0.026854	59.702	138.028	197.730	0.22388	0.46292	0.68680
30	0.74490	0.000774	0.022734	0.023508	64.592	135.028	199.620	0.23991	0.44539	0.68530
35	0.84772	0.000786	0.019855	0.020641	69.551	131.896	20 1.446	0.25587	0.42800	0.68387
40	0.96065	0.000798	0.017373	0.018171	74.587	128.613	203.200	0.27179	0.41068	0.68248
45	1.08432	0.000811	0.015220	0.016032	79.712	125.160	204.872	0.28771	0.39338	0.68109
50	1.21932	0.000826	0.013344	0.014170	84.936	121.514	206.450	0.30366	0.37601	0.67967
55	1.36630	0.000841	0.011701	0.012542	90.274	117.645	207.920	0.31967	0.35849	0.67817
60	1.52592	0.000858	0.010253	0.011111	95.743	113.521	209.264	0.33580	0.34073	0.67653
65	1.69884	0.000877	0.008971	0.009847	101.362	109.099	210.460	0.35209	0.32262	0.67471



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 saturado (unidades SI)* *(Continuación)*

		Volumen específico, m³/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
70	1.88578	0.000897	0.007828	0.008725	107.155	104.326	211.481	0.36861	0.30401	0.67262
75	2.08745	0.000920	0.006802	0.007723	113.153	99.136	212.288	0.38543	0.28474	0.67017
80	2.30460	0.000946	0.005875	0.006821	119.394	93.437	212.832	0.40265	0.26457	0.66722
85	2.53802	0.000976	0.005029	0.006005	125.932	87.107	213.039	0.42040	0.24320	0.66361
90	2.78850	0.001012	0.004246	0.005258	132.841	79.961	212.802	0.43887	0.22018	0.65905
95	3.05689	0.001056	0.003508	0.004563	140.235	71.707	211.942	0.45833"	0.19477	0.65310
100	3.34406	0.001113	0.002790	0.003903	148.314	61.810	210.124	0.47928	0.16564	0.64492
105	3.65093	0.001197	0.002045	0.003242	157.521	49.047	*20§.5ó8*	0.50285	0.12970	0.63254
110	3.97846	0.001364	0.001098	0.002462	169.550	28.444	197.995	0.53334	0.07423	0.60758
112	4.11548	0.001792	0	0.001792	183.418	0	183.418	0.56888	0	0.56888

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
	0.05 MPa			0.10 MPa			0.15 MPa		
–20	0.341859	181.170	0.79172	0.167702	179.987	0.74064	—	—	—
–10	0.356228	186.889	0.81388	0.175223	185.839	0.76331	0.114826	184.753	0.73240
0	0.370509	192.705	0.83557	0.182648	191.765	0.78541	0.119980	190.800	0.75495
10	0.384717	198.614	0.85681	0.189995	197.770	0.80700	0.125051	196:906	0.77690
20	0.398864	204.617	0.87764	0.197277	203.855	0.82812	0.130053	203.077	0.79832
30	0.412960	210.710	0.89808	0.204507	210.018	0.84879	0.135000	209.314	0.81924
40	0.427014	216.891	0.91814	0.211692	216.262	0.86905	0.139900	215.621	0.83971
50	0.441031	223.160	0.93784	0.218839	222.583	0.88892	0.144761	221.998	0.85975
60	0.455018	229.512	0.95720	0.225956	228.982	0.90842	0.149589	228.446	0.87940
70	0.468980	235.946	0.97623	0.233045	235.457	0.92757	0.154391	234.963	0.89867
80	0.482919	242.460	0.99494	0.240112	242.007	0.94638	0.159168	241.549	0.91759
	0.20 MPa			0.25 MPa			0.30 MPa		
0	0.088609	189.805	0.73249	0.069752	188.779	0.71437	0.057150	187.718	0.69894
10	0.092550	196.020	0.75484	0.073024	195.109	0.73713	0.059984	194.173	0.72215
20	0.096419	202.281	0.77657	0.076219	201.468	0.75920	0.062735	200.636	0.74458
30	0.100229	208.597	0.79775	0.079351	207.866	0.780.66	0.065419	207.119	0.76633
40	0.103990	214.971	0.81843	0.082432	214.309	0.80157	0.68049	213.635	0.78747
50	0.107710	221.405	0.83866	0.085470	220.803	0.82198	0.070636	220.191	0.80808
60	0.111397	227.902	0.85846	0.088474	227.351	0.84193	0.073186	226.793	0.82820
70	0.115056	234.462	0.87786	0.091449	233.956	0.86147	0.075706	233.444	0.84787
80	0.118691	241.087	0.89689	0.094399	240.620	0.88061	0.078200	240.147	0.86712
90	0.122305	247.775	0.91556	0.097328	247.341	0.89937	0.080673	246.904	0.88599
100	0.125902	254.525	0.93390	0.100239	254.122	0.91779	0.083127	253.716	0.90449
110	0.129484	261.338	0.95191	0.103135	260.962	0.93588	0.085566	260.482	0.92265

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
	0.40 MPa			0.50 MPa			0.60 MPa		
20	0.045837	198.906	0.72043	0.035646	197.077	0.70043	—	—	—
30	0.047971	205.577	0.74281	0.037464	203.963	0.72352	0.030422	202.263	0.70679
40	0.050046	212.250	0.76447	0.039215	210.810	0.74574	0.031966	209.307	0.72965
50	0.052072	218.939	0.78549	0.040912	217.643	0.76722	0.033450	216.300	0.75163
60	0.054059	225.653	0.80595	0.042566	224.479	0.78806	0.034887	223.268	0.77287
70	0.056014	232.401	0.82591	0.044185	231.330	0.80832	0.036286	230.231	0.79346
80	0.057941	239.188	0.84540	0.045775	238.206	0.82807	0.037653	237.201	0.81348
90	0.059846	246.017	0.86447	0.047341	245.112	0.84735	0.038996	244.188	0.83299
100	0.061731	252.892	0.88315	0.048886	252.054	0.86621	0.040316	251.200	0.85204
110	0.063601	259.815	0.90145	0.050415	259.035	0.88467	0.041619	258.242	0.87066
120	0.065456	266.786	0.91941	0.051929	266.057	0.90276	0.042907	265.318	0.88889
130	0.067299	273.806	0.93704	0.053430	273.123	0.92050	0.044181	271.431	0.90675
	0.70 MPa			0.80 MPa			0.90 MPa		
40	0.016761	207.732	0.71529	0.022830	206.074	0.70210	0.019744	204.320	0.68972
50	0.028100	214.903	0.73783	0.024068	213.446	0.72527	0.020912	211.921	0.71361
60	0.029387	222.017	0.75951	0.025247	220.720	0.74744	0.22012	219.373	0.73633
70	0.030632	229.099	0.78045	0.026380	227.934	0.76878	0.023062	226.730	0.75808
80	0.031843	236.171	0.80076	0.027477	235.114	0.78940	0.024073	234.028	0.77905
90	0.033028	243.244	0.82051	0.028545	242.279	0.80941	0.025051	241.290	0.79932
100	0.034189	250.330	0.83976	0.029588	249.443	0.82887	0.026005	248.537	0.81901
110	0.035332	257.436	0.85855	0.030612	256.616	0.84784	0.026937	255.781	0.83817
120	0.036459	264.568	0.87693	0.031619	263.806	0.86636	0.027852	263.032	0.85685
130	0.037572	271.730	0.89492	0.032612	271.019	0.88448	0.028751	270.298	0.87510
140	0.038673	278.925	0.91254	0.033592	278.259	0.90221	0.029639	277.585	0.89295
150	0.039765	286.155	0.92984	0.034563	285.529	0.91960	0.030515	284.896	0.91043



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kgK	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kgK	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kg
		1.00 MPa			1.20 MPa			1.40 MPa	
50	0.018366	210.317	0.70259	0.014483	206.813	0.68165	—	—	—
60	0.019410	217.970	0.72591	0.015463	214.964	0.70649	0.012579	211.613	0.68806
70	0.020397	225.485	0.74814	0.016368	222.851	0.72982	0.013448	219.984	0.71281
80	0.021341	232.910	0.76946	0.017221	230.568	0.75198	0.014247	228.059	0.73601
90	0.022251	240.278	0.79004	0.018032	238,171	0.77321	0.014997	235.940	0.75802
100	0.023133	247.612	0.80996	0.018812	245.699	0.79366	0.015710	243.692 .	0.77907
110	0.023993	254.931	0.82931	0.019567	253.180	0.81344	0.016393	251.355	0.79934
120	0.024835	262.246	0.84816	0.020301	260.632	0.83265	0.017053	258.961	0.81893
130	0.025661	269.567	0.86655	0.021018	268.072	0.85133	0.017695	266.530	0.83795
140	0.026474	276.902	0.88452	0.021721	275.509	0.86955	0.018321	274.078	0.85644
150	0.027275	284.255	0.90211	0.022412	282.952	0.88735	0.018934	281.618	0.87447
160	0.028068	291.632	0.91933	0.023093	290.408	0.90477	0.019535	289.158	0.89208
		1.60 MPa			1.80 MPa			2.00 MPa	
70	0.011208	216.810	0.69641	0.009406	213.208	0~67992	—	—	—
80	0.011984	225.344	0.72092	0.010187	222.363	0.70622	0.008704	219.024	0.69143
90	0.012698	233.563	0.74387	0.010884	231.007	0.73036	0.009406	228.226	0.71713
100	0.013366	241.575	0.76564	0.011525	239~332	0.75297	0.010035	236.936	0.74079
110	0.014000	249.448	0.78646	0.012126	247.446	0.77443	0.010615	245.336	0.76300
120	0.014608	257.225	0.80649	0.012697	255.417	0.79497	0.011159	253.528	0.78411
130	0.015195	264.937	0.82586	0.013244	263.288	0.81474	0.011676	261.577	0.80433
140	0.015765	272.606	0.84465	0.013772	271.090	0.83385	0.012172	269.526	0.82380
150	0.016320	280.250	0.86293	0.014284	278.847	0.85240	0.012651	277.405	0.84265
160	0.016864	287.880	0.88076	0.014784	286.574	0.87045	0.013116	285.237	0.86094
170	0.017398	295.506	0.89816	0.015272	294.284	0.88805	0.013570	293.037	0.87874
180	0.017923	303.136	0.91519	0.015752	301.988	0.90524	0.014013	300.819	0.89611



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-12 (diclorodifluorometano)*
TABLA *R-J2 sobrecalentado (unidades SI) (Continuación)*

Temp. °C	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kgK	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kgK	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kg
		2.50 MPa			3.00 MPa			3.50 MPa	
90	0.006595	219.736	0.68284	—	—	—	—	—	—
100	0.007264	230.029	0.71081	0.005231	220.723	0.67755	—	—	—
110	0.007837	239.453	0.73573	0.005886	232.256	0.70806	0.004324	222.360	0.67559
120	0.008351	248.379	0.75873	0.006419	242.398	0.73420	0.004959	235.086	0.70840
130	0.008827	256.986	0.78035	0.006887	251.825	0.75788	0.005456	245.865	0.73548
140	0.009273	265.377	0.80091	0.007313	260.818	0.77991	0.005884	·255.728	0.75965
150	0.009697	273.616	0.82062	0.007709	269.521	0.80072	0.006270	265.053	0.78195
160	0.010104	281.748	0.83961	0.008083	278.024	0.82059	0.006626	274.027	0.80291
170	0.010497	289.802	0.85799	0.008439	286.384	0.83967	0.006961	282.759	0.82284
180	0.010879	297.802	0.87584	0.008782	294.640	0.85809	0.007279	291.319	0.84194
190	0.011250	305.764	0.89322	0.00911.4	302.820	0.87594	0.007584	299.752	0.86035
200	0.011614	313.701	0.91018	0.009436	310.946	0.89330	0.007878	308.092	0.87816
		4.00MPa			5.00 MPa				
120	0.003736	225.180	0.67769	0.001369	176.303	0.54710			
130	0.004325	238.691	0.71164	0.002501	216.458	0.64811			
140	0.004781	249.930	0.73918	0.003139	235.004	.0.69359			
150	0.005172	260.124	0.76357	0.003585	248.416	0.72568			
160	0.005522	269.710	0.78596	0.003950	259.910	0.75253			
170	0.005845	278.903	0.80694	0.004268	270.400	0.77648			
180	0.006147	287.825	0.82685	0.004555	280.276	0.79851			
190	0.006434	296.552	0.84590	0.004821	289.740	0.81917			
200	0.006708	305.136	0.86424	0.005071	298.916	0.83877			
210	0.006972	313.614	0.88197	0.005308	307.882	0.85753			
220	0.007228	322.013	0.89917	0.005535	316.690	0.87557			
230	0.007477	330.352	0.91592	0.005753	325.380	0.89301			



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*

TABLA *Refrigerante-22 saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m³/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–70	0.0205	0.000670	0.940268	0.940938	–30.607	249.425	218.818	–0.1401	1.2277	1.0876
–65	0.0280	0.000676	0.704796	0.705472	–25.658	246.925	221.267	–0.1161	1.1862	1.0701
–60	0.0375	0.000682	0.536470	0.537152	–20.652	244.354	223.702	–0.0924	1.1463	1.0540
–55	0.0495	0.000689	0.414138	0.414827	–15.585	241.703	226.117	–0.0689	1.1079	1.0390
–50	0.0644	0.000695	0.323862	0.324557	–10.456	238.965	228.509	–0.0457	1.0708	1.0251
–45	0.0827	0.000702	0.256288	0.256990	–5.262	236.132	230.870	–0.0227	1.0349	1.0122
–40	0.1049	0.000709	0.205036	0.205745	0	233.198	233.197	0	1.0002	1.0002
–35	0.1317	0.000717	0.165683	0.166400	5.328	230.156	235.484	0.0225	0.9664	0.9889
–30	0.1635	0.000725	0.135120	0.135844	10.725	227.001	237.726	0.0449	0.9335	0.9784
–25	0.2010	0.000733	0.111126	0.111859	16.191	223.727	239.918	0.0670	0.9015	0.9685
–20	0.2448	0.000741	0.092102	0.092843	21.728	220.327	242.055	0.0890	0.8703	0.9593
–15	0.2957	0.000750	0.076876	0.077625	27.334	216.798	244.132	0.1107	0.8398	0.9505
–10	0.3543	0.000759	0.064581	0.065340	33.012	213.132	246.144	0.1324	0.8099	0.9422
–5	0.4213	0.000768	0.054571	0.055339	38.762	209.323	248.085	0.1538	0.7806	0.9344
0	0.4976	0.000778	0.046357	0.047135	44.586	205.364	249.949	0.1751	0.7518	0.9269
5	0.5838	0.000789	0.039567	0.040356	50.485	201.246	251.731	0.1963	0.7235	0.9197
10	0.6807	0.000800	0.033914	0.034714	56.463	196.960	253.423	0.2173	0.6956	0.9129
15	0.7891	0.000812	0.029176	0.029987	62.523	192.495	255.018	0.2382	0.6680	0.9062
20	0.9099	0.000824	0.025179	0.026003	68.670	187.836	256.506	0.2590	0.6407	0.8997
25	1.0439	0.000838	0.021787	0.022624	74.910	182.968	257.877	0.2797	0.6137	0.8934
30	1.1919	0.000852	0.018890	0.019742	81.250	177.869	259.119	0.3004	0.5867	0.8871
35	1.3548	0.000867	0.016401	0.017269	87.700	172.516	260.216	0.3210	0.5598	0.8809
40	1.5335	0.000884	0.014251	0.015135	94.272	166.877	261.149	0.3417	0.s:~29	0.8746
45	1.7290	0.000902	0.012382	0.013284	100.982	160.914	261.896	0.3624	0.5058	0.8682
50	1.9423	0.000922	0.010747	0.011669	107.851	154.576	262.428	0.3832	0.4783	0.8615
55	2.1744	0.000944	0.009308	0.010252	114.905	147.800	262.705	0.4042	0.4504	0.8546
60	2.4266	0.000969	0.008032	0.009001	122.180	140.497	262.678	0.4255	0.4217	0.8472
65	2.6999	0.000997	0.006890	0.007887	129.729	132.547	262.276	0.4472	0.3920	0.8391
70	2.9959	0.001030	0.005859	0.006889	137.625	123.772	261.397	0.4695	0.3607	0.8302
75	3.3161	0.001069	0.004914	0.005983	145.986	113.902	259.888	0.4927	0.3272	0.8198
80	3.6623	0.001118	0.004031	0.005149	155.011	102.475	257.486	0.5173	0.2902	0.8075
85	4.0368	0.001183	0.003175	0.004358	165.092	88.598	253.690	0.5445	0.2474	0.7918
90	4.4425	0.001282	0.002282	0.003564	177.204	70.037	247.241	0.5767	0.1929	0.7695
95	4.8835	0.001521	0.001030	0.002551	196.359	34.925	231.284	0.6273	0.0949	0.7222
96.006	4.9773	0.001906	0	0.001906	212.546	0	212.546	0.6708	0	0.6708

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.05 MPa			0.10MPa			0.15 MPa	
–40	0.440633	234.724	1.07616	0.216331	233.337	1.00523	—	—	—
–30	0.460641	240.602	1.10084	0.226754	239.359	1.03052	0.148723	238.078	0.98773
–20	0.480543	246.586	1.12495	0.237064	245.466	1.05513	0.155851	244.319	1.01288
–10	0.500357	252.676	1.14855	0.247279	251.665	1.07914	0.162879	250.631	1.03733
0	0.520095	258.874	1.1'7166	0.257415	257.956	1.10261	0.169823	257.022	1.06116
10	0.539771	265.180	1.19433	0.2674!S5	264.345	1.12558	0.176699	263.496	1.08444
20	0.559393	271.594	1.21659	0.277500	270.831	1.14-809	0.183516	270.057	1.10721
30	0.578970	278.115	1.23846	0.287467	277.416	1.17017	0.190284	276.709	1.12952
40	0.598507	284.743	1.25998	0.297394	284.101	1.19187	0.197011	283.452	1.15140
50	0.618011	291.478	1.28114	0.307287	290.887	1.21320	0.203702	290.289	1.17289
60	0.631485	298.319	1.30199	0.317149	297.772	1.23418	0.210362	297.220	1.19402
70	0.656935	305.265	1.32253	0.326986	304.757	1.25484	0.216997	304.246	1.21479
80	0.676362	312.314	1.34278	0.336801	311.842	1.27519	0.223608	311.368	1.23525
90	0.695771	319.465	1.36275	0.346596	319.026	1.29524	0.230200	318.584	1.25540
		0.20 MPa			0.25 MPa			0.30 MPa	
–20	0.115203	243.140	0.98184	—	—	—	—	—	—
–10	0.120647	249.574	1.00676	0.095280	248.492	0.98231	0.078344	247.382	0.96170
0	0.126003	256.069	1.03098	0.099689	255.097	1.00695	0.082128	254.104	0.98677
10	0.131286	262.633	1.05458	0.104022	261.755	1.03089	0.085832	260.861	1.01106
20	0.136509	269.273	1.07763	0.108292	268.476	1.05421	0.089469	267.667	1.03468
30	0.141681	275.992	1.10016	0.112508	275.267	1.07699	0.093051	274.531	1.05771
40	0.146809	282.796	1.12224	0.116681	282.132	1.09927	0.096588	281.460	1.08019
50	0.151902	289.686	1.14390	0.120815	289.076	1.12109	0.100085	288.460	1.10220
60	0.156963	296.664	1.16516	0.124918	296.102	1.14250	0.103550	295.535	1.12376
70	0.161997	303.731	1.18607	0.128993	303.212	1.16353	0J06986	302.689	1.14491
80	0.167008	310.890	1.20663	0.133044	310.409	1.18420	0.110399	309.924	1.16569
90	0.171999	318.139	1.22687	0.137075	317.692	1.20454	0.113790	317.241	1.18612
100	0.176972	325.480	1.24681	0.141089	325.063	1.22456	0.117164	324.643	1.20623
110	0.181931	332.912	1.26646	0.145086	332.522	1.24428	0.120522	332.129	1.22603

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
	0.40 MPa			0.50 MPa			0.60 MPa		
0	0.060131	252.051	0.95359	—	—	—	—	—	—
10	0.063060	259.023	0.97866	0.049355	257.108	0.95223	0.040180	255.109	0.92945
20	0.065915	266.010	1.00291	0.051751	264.295	0.97717	0.042280	262.517	0.95517
30	0.068710	273.029	1.02646	0.054081	271.483	1.00128	0.044307	269.888	0.97989
40	0.071455	280.092	1.04938	0.056358	278.690	1.02467	0.046276	277.250	1.00378
50	0.074160	287.209	1.07175	0.058590	285.930	1.04743	0.048198	284.622	1.02695
60	0.076830	294.386	1.09362	0.060786	293.215	1.06963	0.050081	292.020	1.04950
70	0.079470	301.630	1.11504	0.062951	300.552	1.09133	0.051931	299.456	1.07149
80	0.082085	308.944	1.13605	0.065090	307.949	1.11257	0.053754	306.938	1.09298
90	0.084679	316.332	1.15668	0.067206	315.410	1.13340	0.055553	314.475	1.11403
100	0.087254	323.796	1.17695	0.069303	322.939	1.15386	0.057332	322.071	1.13466
110	0.089813	331.339	1.19690	0.071384	330.539	1.17395	0.059094	329.731	1.15492
120	0.092358	338.961	1.21654	0.073450	338.213	1.19373	0.060842	337.458	1.17482
130	0.094890	346.664	1.23588	0.075503	345.963	1.21319	0.062576	345.255	1.19441
	0.70 MPa			0.80 MPa			0.90MPa		
20	0.035487	260.667	0.93565	0.030366	258.737	0.91787	0.026355	256.713	0.90132
30	0.037305	268.240	0.96105	0.032034	266.533	0.94402	0.027915	264.760	0.92831
40	0.039059	275.769	0.98549	0.033632	274.243	0.96905	0.029397	272.670	0.95398
50	0.040763	283.282	1.00910	0.035175	281.907	0.99314	0.030819	280.497	0.97859
60	0.042424	290.800	1.03201	0.036674	289.553	1.01644	0.032193	288.278	1.00230
70	0.044052	298.339	1.05431	0.038136	297.202	1.03906	0.033528	296.042	1.02526
80	0.045650	305.912	1.07606	0.039568	304.868	1.06108	0.034832	303.807	1.04757
90	0.047224	313.527	1.09732	0.040974	312.565	1.08257	0.036108	311.590	1.06930
100	0.048778	321.192	1.11815	0.042359	320.303	1.10359	0.037363	319.401	1.09052
110	0.050313	328.914	1.13856	0.043725	328.087	1.12417	0.038598	327.251	1.11128
120	0.051834	336.696	1.15861	0.045076	335.925	1.14437	0.039817	335.147	1.13162
130	0.053341	344.541	1.17832	0.046413	343.821	1.16420	0.041022	343.094	1.15158
140	Q,054836	352.454	1.19770	0.047738	351.778	1.18369	0.042215	351.097	1.17119
150	0.056321	360.435	1.21679	0.049052	359.799	1.20288	0.043398	359.159	1.19047

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		1.00 MPa			1.20 MPa			1.40 MPa	
30	0.024600	262.912	0.91358	—	—	—	—	—	—
40	0.025995	271.042	0.93996	0.020851	267.602	0.91411	0.017120	263.861	0.89010
50	0.027323	279.046	0.96512	0.022051	276.011	0.94055	0.018247	272.766	0.91809
60	0.028601	286.973	0.98928	0.023191	284.263	0.96570	0.019299	281.401	0.94441
70	0.029836	294.859	1.01260	0.024282	292.415	0.98981	0.020295	289.858	0.96942
80	0.031038	302.727	1.03520	0.025336	300.508	1.01305	0.021248	298.202	0.99339
90	0.032213	310.599	1.05718	0.026359	308.570	1.03556	0.022167	306.473	1.01649
100	0.033364	318.488	1.07861	0.027357	316.623	1.05744	0.023058	314.703	1.03884
110	0.034495	326.405	1.09955	0.028334	324.682	1.07875	0.023926	322.916	1.06056
120	0.035609	334.360	1.12004	0.029292	332.762	1.09957	0.024775	331.128	1.08172
130	0.036709	342.360	1.14014	0.030236	340.871	1.11994	0.025608	339.354	1.10238
140	0.037797	350.410	1.15986	0.031166	349.019	1.13990	0.026426	347.603	1.12259
150	0.038873	358.514	1.17924	0.032084	357.210	1.15949	0.027233	355.885	1.14240
160	0.039940	366.677	1.19831	0.032993	365.450	1.17873	0.028029	364.206	1.16183
		1.60 MPa			1.80 MPa			2.00 MPa	
50	0.015351	269.262	0.89689	0.013052	265.423	0.87625	—	—	—
60	0.016351	278.358	0.92461	0.014028	275.097	0.90573	0.012135	271.563	0.88729
70	0.017284	287.171	0.95068	0.014921	284.331	0.93304	0.013008	281.310	0.91612
80	0.018167	295.797	0.97546	0.015755	293.282	0.95876	0.013811	290.640	0.94292
90	0.019011	304.301	0.99920	0.016546	302.046	0.98323	0.014563	299.697	0.96821
100	0.019825	312.725	1.02209	0.017303	310.683	1.00669	0.015277	308.571	0.99232
110	0.020614	321.103	1.04424	0.018032	319.239	1:02932	0.015960	317.322	1.01546
120	0.021382	329.457	1.06576	0.018738	327.745	1.05123	0.016619	325.991	1.03780
130	0.022133	337.805	1.08673	0.019427	336.224	1.07253	0.017258	334.610	1.05944
140	0.022869	346.162	1.10721	0.020099	344.695	1.09329	0.017881	343.201	1.08049
150	0.023592	354.540	1.12724	0.020759	353.172	1.11356	0.018490	351.783	1.10102
160	0.024305	362.945	1.14688	0.021407	361.666	1.13340	0.019087	360.369	1.12107
170	0.025008	371.386	1.J6614	0.022045	370.186	1.15284	0.019673	368.970	1.14070
180	0.025703	379.869	1.18507	0.022675	378.738	1.17193	0.020251	377.595	1.15995

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-22 (clorodifluorometano)*
TABLA *Refrigerante-22 sobrecalentado (unidades SI)* *(Continuación)*

Temp. °C	*v* m^3/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m^3/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m^3/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		2.50 MPa			3.00 MPa			3.50 MPa	
70	0.009459	272.677	0.87476	—	—	—	—	—	—
80	0.010243	283.332	0.90537	0.007747	274.530	0.86780	0.005765	262.739	0.82489 I
90	0.010948	293.338	0.93332	0.008465	286.042	0.89995	0.006597	277.268	0.86548
100	0.011598	302.935	0.95939	0.009098	296.663	0.92881	0.007257	289.504	0.89872
110	0.012208	312.261	0.98405	0.009674	306.744	0.95547	0.007829	300.640	0.92818
120	0.012788	321.400	1.00760	0.010211	316.470	0.98053	0.008346	311.129	0.95520
130	0.013343	330.412	1.03023	0.010717	325.955	1.00435	0.008825	321.196	0.98049
140	0.013880	339.336	1.05210	0.011200	335.270	1.02718	0.009276	330.976	1.00445
150	0.014400	348.205	1.07331	0.011665	344.467	1.04918	0.009704	340.554	1.02736
160	0.014907	357.040	1.09395	0.012114	353.584	1.07047	0.010114	349.989	1.04940
170	0.015402	365.860	1.11408	0.012550	362.647	1.09116	0.010510	359.324	1.07071
180	0.015887	374.679	1.13376	0.012976	371.679	1.11131	0.010894	368.590	1.09138
190	0.016364	383.508	1.15303	0.013392	380.695	1.13099	0.011268	377.810	1.11151
200	0.016834	392.354	1.17192	0.013801	389.708	1.15024	0.011634	387.004	1.13115
		4.00 MPa			5.00MPa			6.00MPa	
90	0.005037	265.629	0.82544	—	—	—	—	—	—
100	0.005804	280.997	0.86721	0.003334-	253.042	0.78005	—	—	—
110	0.006405	293.748	0.90094	0.004255	275.919	0.84064	0.002432	243.278	0.74674
120	0.006924	305.273	0.93064	0.004851	291.362	0.88045	0.003333	272.385	0.82185
130	0.007391	316.080	0.95778	0.005335	304.469	0.91337	0.003899	290.253	0.86675
140	0.007822	326.422	0.98312	0.005757	316.379	0.94256	0.004345	304.757	0.90230
150	0.008226	336.446	1.00710	0.006139	327.563	0.96931	0.004728	317.633	0.93310
160	0.008610	346.246	1.02999	0.006493	338.266	0.99431	0.005071	329.553	0.96094
170	0.008978	355.885	1.05199	0.006826	348.633	1.01797	0.005386	340.849	0.98673
180	0.009332	365.409	1.07324	0.007142	358.760	1.04057	0.005680	351.715	1.01098
190	0.009675	374.853	1.09386	0.007444	368.713	1.06230	0.005958	362.271	1.03402
200	0.010009	384.240	1.11391	0.007735	378.537	1.08328	0.006222	372.602	1.05609
210	0.010335	393.593	1.13347	0.008018	388.268	1.10363	0.006477	382.764	1.07734
220	0.010654	402.925	1.15259	0.008292	397.932	1.12343	0.006722	392.801	1.09790



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134ª saturado (unidades SI)*

		Volumen específico, m³/kg			Entalpía, kJ/kg			Entropía, kJ/kg K		
Temp. °C T	Presión abs. MPa P	Líquido saturado v_f	Evap. v_{gg}	Vapor saturado u_f	Líquido saturado h_f	Evap h_{fg}	Vapor saturado h_g	Líquido saturado s_f	Evap. s_{fg}	Vapor saturado s_g
–33	0.0737	0.000718	0.25574	0.25646	157.417	220.491	377.908	0.8346	0.9181	1.7528
–30	0.0851	0.000722	0.22330	0.22402	16L118	218.683	379.802	0.8499	0.8994	1.7493
–26.25	0.1013	0.000728	0.18947	0.19020	165.&02	216.360	382.162	0.8690	0.8763	1.7453
–25	0.1073	0.000730	0.17956	0.18029	167.381	215.569	382.950	0.8754	0.8687	1,7441
–20	0.1337	0.000738	0.14575	0.14649	173.744	212.340	386.083	0.9007	0.8388	1.7395
–15	0.1650	0.000746	0.11932	0.12007	180.193	209.004	389.197	0.9258	0.8096	1,7354
–10	0.2017	0.000755	0.098454	0.099209	186.721	205.564	392.285	0.9507	0.7812	1.7319
–5	0.2445	0.000764	0.081812	0.082576	193.324	202.016	395.340	0.9755	0.7534	1.7288
0	0.2940	0.000773	0.068420	0.069193	200.000	198.356	398.356	1.0000	0.7262	1.7262
5	0.3509	0.000783	0.057551	0.058334	206.751	194.572	401.323	1.0243	0.6995	1.7239
10	0.4158	0.000794	0.048658	0.049451	213.580	190.652	404.233	1.0485	0.6733	1.7218
15	0.4895	0.000805	0.041326	0.042131	220.492	186.582	407.075	1.0725	0.6475	1.7200
20	0.5728	0.000817	0.035238	0.036055	227.493	182.345	409.838	1.0963	0.6220	1.7183
25	0.6663	0.000829	0.030148	0.030977	234.590	177.920	412.509	1.1201	0.5967	1.7168
30	0.7710	0.000843	0.025865	0.026707	241.790	173.285	415.075	1.1437	0.5716	1.7153
35	0.8876	0.000857	0.022237	0.023094	249.103	168.415	417.518	1.1673	0.5465	1.7139
40	1.0171	0.000873	0.019147	0.020020	256.539	163.282	419.821	1.1909	0.5214	1.7123
45	1.1602	0.000890	0.016499	0.017389	264.110	157.852	421.962	1.2145	0.4962	1.7106
50	1.3180	0.000908	0.014217	0.015124	271.830	152.085	423.915	1.2381	0.4706	1.7088
55	1.4915	0.000928	0.012237	0.013166	279.718	145.933	425.650	1.2619	0.4447	1.7066
60	1.6818	0.000951	0.010511	0.011462	287.794	139.336	427.130	1.2857	0.4182	1.7040
65	1.8898	0.000976	0.008995	0.009970	296.088	132.216	428.305	1.3099	0.3910	1.7009
70	2.1169	0.001005	0.007653	0.008657	304.642	124.468	429.110	1.3343	0.3627	1.6970
75	2.3644	0.001038	0.006453	0.007491	313.513	115.939	429.451	1.3592	0.3330	1.6923
80	2.6337	0.001078	0.005368	0.006446	322.794	106.395	429.189	1.3849	0.3013	1.6862
85	2.9265	0.001128	0.004367	0.005495	332.644	95.440	428.084	1.4117	0.2665	1.6782
90	3.2448	0.001195	0.003412	0.004606	343.380	82.295	425.676	1.4404	0.2266	1.6670
95	3.5914	0.001297	0.002432	0.003729	355.834	64.984	420.818	1.4733	0.1765	1.6498
101.15	4.0640	0.001969	0	0.001969	390.977	0	390.977	1.5658	0	1.5658



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
		0.10MPa			0.15 MPa			0.20 MPa	
-25	0.19400	383.212	1.75058	—	—	—	—	—	—
-20	0.19860	387.215	1.76655	—	—	—	—	—	—
-10	0.20765	395.270	1.79775	0.13603	393.839	1.76058	0.10013	392.338	1.73276
0	0.21652	403.413	1.82813	0.14222	402.187	1.79171	0.10501	400.911	1.76474
10	0.22527	411.668	1.85780	0.14828	410.602	1.82197	0.10974	409.500	1.79562
20	0.23393	420.048	1.88689	0.15424	419.111	1.85150	0.11436	418.145	1.82563
30	0.24250	428.564	1.91545	0.16011	427.730	1.88041	0.11889	426.875	1.85491
40	0.25102	437.223	1.94355	0.16592	436.473	1.90879	0.12335	435.708	1.88357
50	0.25948	446.029	1.97123	0.17168	445.350	1.93669	0.12776	444.658	1.91171
60	0.26791	454.986	1.99853	0.17740	454.366	1.96416	0.13213	453.735	1.93937
70	0.27631	464.096	2.02547	0.18308	463.525	1.99125	0.13646	462.946	1.96991
80	0.28468	473.359	2.05208	0.18874	472.831	2.01798	0.14076	472.296	1.99346
90	0.29303	482.777	2.07937	0.19437	482.285	2.04428	0.14504	481.788	2.01997
100	0.30136	492.349	2.10437	0.1999	491.888	2.07046	0.14930	491.424	2.046614
		0.25 MPa			0.30 MPa			0.40 MPa	
0	0.082637	399.579	1.74284	—	—	—	—	—	—
10	0.086584	408.357	1.77440	0.071110	407.171	1.75637	0.051681	404.651	1.72611
20	0.090408	417.151	1.80492	0.074415	416.124	1.78744	0.054362	413.965	1.75844
30	0.094139	425.997	1.83460	0.077620	425.096	1.81754	0.056926	423.216	1.78947
40	0.097798	434.925	1.86357	0.080748	434.124	1.84684	0.059402	432.465	1.81949
50	0.101401	443.953	1.89195	0.083816	443.234	1.87547	0.061812	441.751	1.84868
60	0.104958	453.094	1.91980	0.086838	452.442	1.90354	0.064169	451.104	1.87718
70	0.108480	462.359	1.94720	0.089821	461.763	1.93110	0.066484	460.545	1.90510
80	0.111972	471.754	1.97419	0.082774	471.206	1.95823	0.068767	470.088	1.93252
90	0.115440	481.285	2.00080	0.095702	480.777	1.98495	0.071022	479.745	1.95948
100	0.118888	490.955	2.02707	0.098609	490.482	2.01131	0.073254	489.523	1.98604
110	0.122318	500.766	2.05302	0.101498	500.324	2.03734	0.075468	499.428	2.01223
120	0.125734	510.720	2.07866	0.104371	510.304	2.06305	0.077665	509.464	2.03809



TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134*[a] *(1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado (Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
	0.50 MPa			0.60 MPa			0.70 MPa		
20	0.042256	411.645	1.73420	—	—	—	—	—	—
30	0.044457	421.221	1.76632	0.036094	419.093	1.74610	0.030069	416.809	1.72770
40	0.046557	430.720	1.79715	0.037958	428.881	1.77786	0.031781	426.933	1.76056
50	0.048581	440.205	1.82696	0.039735	438.589	1.80838	0.033392	436.895	1.79187
60	0.050547	449.718	1.85596	0.041447	448.279	1.83791	0.034929	446.782	1.82201
70	0.052467	459.290	1.88426	0.043108	457.994	1.86664	0.036410	456.655	1.85121
80	0.054351	468.942	1.91199	0.044730	467.764	1.89471	0.037848	466.554	1.87964
90	0.056205	478.690	1.93921	0.046319	477.611	1.92220	0.039251	476.507	1.90743
100	0.058035	488.546	1.96598	0.047883	487.550	1.94920	0.040627	486.535	1.93467
110	0.059845	498.518	1.99235	0.049426	497.594	1.97576	0.041980	496.654	1.96143
120	0.061639	508.613	2.01836	0.050951	507.750	2.00193	0.043314	506.875	1.98777
130	0.063418	518.835	2.04403	0.052461	518.026	2.02774	0.044633	517.207	2.01372
140	0.065184	529.187	2.06940	0.053958	528.425	2.05322	0.045938	527.656	2.03932
	0.80 MPa			0.90 MPa			1.00 MPa		
40	0.027113	424.860	1.74457	0.023446	422.642	1.72943	0.020473	420.249	1.71479
50	0.028611	435.114	1.77680	0.024868	433.235	1.76273	0.021849	431.243	1.74936
60	0.030024	445.223	1.80761	0.026192	443.595	1.79431	0.023110	441.890	1.78181
70	0.031375	455.270	1.83732	0.027447	453.835	1.82459	0.024293	452.345	1.81273
80	0.032678	465.308	1.86616	0.028649	464.025	1.85387	0.025417	462.703	1.84248
90	0.033944	475.375	1.89427	0.029810	474.216	1.88232	0.026497	473.027	1.87131
100	0.035180	485.499	1.92177	0.030940	484.441	1.91010	0.027543	483.361	1.89938
110	0.036392	495.698	1.94874	0.032043	494.726	1.93730	0.028561	493.736	1.92682
120	0.037584	505.988	1.97525	0.033126	505.088	1.96399	0.029556	504.175	1.95371
130	0.038760	516.379	2.00135	0.034190	515.542	1.99025	0.030533	514.694	1.98013
140	0.039921	526.880	2.02708	0.035241	526.096	2.01611	0.031495	525.305	2.00613
150	0.041071	537.496	2.05247	0.036278	536.760	2.04161	0.032444	536.017	2.03175

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134ª (1,1,1,2-tetrafluoretano)*

TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado (Continuación)*

Temp. °C	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kgK	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kgK	v m³/kg	h kJ/kg	s kJ/kg
	1.20 MPa			1.40 MPa			1.60 MPa		
50	0.017243	426.845	1.72373	—	—	—	—	—	—
60	0.018439	438.210	1.75837	0.015032	434.079	1.73597	0.012392	429.322	1.71349
70	0.019530	449.179	1.79081	0.016083	445.720	1.77040	0.013449	441.888	1.75066
80	0.020548	459.925	1.82168	0.017040	456.944	1.80265	0.014378	453.722	1.78466
90	0.021512	470.551	1.85135	0.017931	467.931	1.83333	0.015225	465.145	1.81656
100	0.022436	481.128	1.88009	0.018775	478.790	1.86282	0.016015	476.333	1.84695
110	0.023329	491.702	1.90805	0.019583	489.589	1.89139	0.016763	487.390	187619
120	0.024197	502.307	1.93537	0.020362	500.379	1.91918	0.017479	498.387	1.90452
130	0.025044	512.965	1.96214	0.021118	511.192	1.94634	0.018169	509.371	1.93211
140	0.025874	523.697	1.98844	0.021856	522.054	1.97296	0.018840	520.376	1.95908
150	0.026691	534.514	2.01431	0.022579	532.984	1.99910	0.019493	531.427	1.98551
160	0.027495	545.426	2.03980	0.023289	543.994	2.02481	0.020133	342.542	2.01147
170	0.028289	556.443	2.06494	0.023988	555.097	2.05015	0.020761	553.735	2.03702
	1.80 MPa			2.0 MPa			2.50 MPa		
70	0.011341	437.562	1.73085	0.009581	432.531	1.71011	—	—	—
80	0.012273	450.202	1.76717	0.010550	446.304	1.74968	0.007221	433.797	1.70180
90	0.013854	462.164	1.80057	0.011374	458.951	1.78500	0.008157	449.499	1.74567
100	0.013854	473.741	1.83202	0.012111	470.996	1.81772	0.008907	463.279	1.78311
110	0.014560	485.095	1.82056	0.012789	482.693	1.84866	0.009558	476.129	1.81709
120	0.015230	496.325	1.89098	0.013424	494.187	1.87827	0.010148	488.457	1.84886
130	0.015871	507.498	1.91905	0.014028	505.569	1.90686	0.010694	500.474	1.87904
140	0.016490	518.659	1.94639	0.014608	516.900	1.93463	0.011208	512.307	1.90804
150	0.017091	529.841	1.97314	0.015168	528.224	1.96171	0.011698	524.037	1.93609
160	0.017677	541.068	1.99936	0.015712	539.571	1.98821	0.012169	535.722	1.96338
170	0.018251	552.357	2.02513	0.016242	550.963	2.01421	0.012624	547.399	1.99004
180	0.018814	563.724	2.05049	0.016762	562.418	2.03977	0.013066	559.098	2.01614
190	0.019369	575.177	2.07549	0.017272	573.950	2.06494	0.013498	570.841	2.04177

TABLA *Propiedades termodinámicas del refrigerante-134[a] (1,1,1,2-tetrafluoretano)*
TABLA *Refrigerante-134a sobrecalentado (Continuación)*

Temp. °C	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kgK	*v* m³/kg	*h* kJ/kg	*s* kJ/kg
	3.0 MPa			3.50 MPa			4.0 MPa		
90	0.005755	436.193	1.69950	—	—	—	—	—	—
100	0.006653	453.731	1.74717	0.004839	440.433	1.70386	—	—	—
110	0.007339	468.500	1.78623	0.005667	459.211	1.75355	0.004277	446.844	1.71480
120	0.007924	482.043	1.82113	0.006289	474.697	1.79346	0.005055	465.987	1.76415
130	0.008446	494.915	1.85347	0.006813	488.771	1.82881	0.005559	481.865	1.80404
140	0.008926	507.388	1.88403	0.007279	502.070	1.86142	0.006027	496.295	1.83940
150	0.009375	519.618	1.91328	0.007706	514.928	1.89216	0.006444	509.925	1.87200
160	0.009801	531.704	1.94151	0.008103	527.496	1.92151	0.006825	523.072	1.90271
170	0.010208	543.713	1.96892	0.008480	539.890	1.94980	0.007181	535.917	1.93203
180	0.010601	555.690	1.99565	0.008839	552.185	1.97724	0.007517	548.573	1.96028
190	0.010982	567.670	2.02180	0.009185	564.430	2.00397	0.007837	561.117	1.98766
200	0.011353	579.678	2.04745	0.009519	576.665	2.03010	0.008145	573.601	2.01332



Jaime Vega Pérez, Saúl Vega Pérez

Código de colores de los resistores eléctricos

4 7 1000 5% 47 kΩ ± 5%

1er dígito	2o dígito	3er dígito	Multiplicador	Tolerancia
0	0	0	1	
1	1	1	10	1%
2	2	2	100	2%
3	3	3	1000	
4	4	4	10000	
5	5	5	100000	
6	6	6	1000000	
7	7	7	0.1 Oro	5% Oro
8	8	8	0.01 Plata	10% Plata
9	9	9		

5 1 0 100 1% 51 kΩ ± 1%



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

1.1
a) $N_e = 3.9357 \times 10^{24} e$
b) $N_e = 9.363 \times 10^{16} e$

1.2
$N = 1.248 \times 10^{16} e$

1.3
$m = 1.665 \times 10^{-10}$ g

1.4
$q_1 = 3.72 \times 10^{-8}$ C ; $q_2 = 1.118 \times 10^{-7}$ C

1.5
a) $F = 22.5$ N
b) La fuerza es de atracción

1.6
$r = 0.5196$ m

1.7
$F = 457300.77$ N ; ángulo de $70.85°$

1.8
$F = 108$ N a la derecha

1.9
$F = 388.96$ N ; ángulo de $75.53°$

1.10
$F = 63.28125$ N a la derecha

1.11
$F = 8729.53$ N ; $\theta = -29.93°$

1.12
a) $F = 279.435$ N
b) $\theta = 68.06°$
c) $E_p = -3.6$ J

1.13
$x = 0.2$ m

1.14
a) $q_1 = 2.942 \times 10^{12} e$
b) $q_2 = 8.827 \times 10^{12} e$

1.15
$r = 0.2412$ m

1.16
$F = 55.54$ N ; $\theta = 235.54°$

1.17
a) $F = 199.94$ N ; $\theta = -11.99°$
b) $E_p = 9.192$ J
c) $V = 30.64 \times 10^5$ V

1.18
$F = 3.75 \times 10^{-5}$ N

1.19
r = 2.12 m

1.20
$E_R = 72182.51 \frac{N}{C}$ $\underline{|\theta = 178.74°}$

1.21
a) $E = 12877.48 \ \frac{N}{C} \uparrow$
b) $F = 0.6438 \text{ N} \downarrow$

1.22
a) $T = 0.9396$ N
b) $q = 1.4267$ μC

GRUPO EDITORIAL PATRIA

1.23

a) $q = 1.5 \times 10^{-8}$ C

b) $T = 8.28 \times 10^{-3}$ N

1.24

a) $q = 5.489 \times 10^{-6}$ C

b) $T = 0.1298$ N

1.25

a) $T = 0.044$ N

b) $q = 69.54$ μC

1.26

$F = 9.2 \times 10^{-6}$ N

1.27

$r = 0.416$ m

1.28

$E = 5.5737 \times 10^{-11} \frac{N}{C}$

1.29

$E = 1.022 \times 10^{-7} \frac{N}{C}$

1.30

$E_x = 9.42 \times 10^{6} \frac{N}{C}$

1.31

a) $t = 1.5 \times 10^{-8}$ s

b) $v = at = 13.26 \times 10^{6} \frac{m}{s}$

1.32

a) $E = 240 \frac{V}{m}$

b) $F = 3.8448 \times 10^{-17}$ N

c) $E_p = 1.9224 \times 10^{-18}$ J

d) $v = 20.54 \times 10^{5} \frac{m}{s}$

e) $a = 4.2204 \times 10^{13} \frac{m}{s^2}$

1.33

a) $F = 8.2538 \times 10^{-8}$ N

b) $v = 21.904 \times 10^{5} \frac{m}{s}$

1.34

a) $E = 1680.59 \frac{N}{C}$

b) $v = 3.84 \times 10^{6} \frac{m}{s}$

1.35

a) $t = 1.23 \times 10^{-9}$ s

b) $v = 6.49 \times 10^{7} \frac{m}{s}$

c) $E_c = 1.91 \times 10^{-15}$ J

1.36

a) $v = 1.258 \times 10^{7} \frac{m}{s}$

b) $t = 2.38 \times 10^{-8}$ s

1.37

a) $x = 0.455$ m ; $y = 0.4851$ m

b) $E_c = 4.265 \times 10^{-6}$ J

1.38
a) $V = 1070$ volts
b) $m = 4624.66$ kg

1.39
a) $d = 2.2$ m
b) $q = 183.8$ nC

1.40
$E = 6 \times 10^{7} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$; alejándose de la barra

1.41
$E = 9.216 \times 10^{11} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.42
$v = 2.85 \ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.43
a) $q = 7.848 \times 10^{-6}$ C
b) Hacia arriba

1.44
a) $\phi_E = 600 \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$
b) $\phi_E = -599.998 \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{C}}$
c) $\phi_T = +\phi_T + \phi_T = 600 - 599.99 = 0$

1.45
$E = 13500000 \ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.46
a) $\sigma = 33.33 \times 10^{-6} \dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$
b) $E = 30.13 \times 10^{5} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.47
$E = 4.86 \times 10^{9} \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.48
a) $q = 3.0627 \times 10^{-8}$ C
b) $q = 0$

1.49
$E = 1.33 \times 10^{6} \ \dfrac{\text{N}}{\text{C}}$

1.50
$E_{p3} = 20.16$ J

1.51
a) $E_p = -3$ J
b) $E_T = 9.428$ J
c) $E = 1.8$ J

1.52
$E_{p3} = -0.4725$ J

1.53
$v = 0.1106 \ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

1.54
a) $E = 6000 \ \dfrac{\text{V}}{\text{m}}$
b) $F = 9.6 \times 10^{-16}$ N
c) $E_p = 1.92 \times 10^{-17}$ J
d) $v_A = 6.49 \times 10^{6} \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$
e) $a = 1.05 \times 10^{15} \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1.55
$V_{a-b} = 25000$ V

1.56
$N_e = 2.708 \times 10^{18} e$

1.57
a) $E = 37500 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}$
b) $F = 6 \times 10^{-15} \text{ N}$
c) $a = 6.586 \times 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}}$
d) $V = 1.63 \times 10^{7} \text{ m}$

1.58
a) $F = 1.92 \times 10^{-16} \text{ N}$
b) $a = 2.1075 \times 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
c) $v_a = 2.053 \times 10^{6} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.59
$V_p = 5.81 \times 10^{6} \text{ V}$

1.60
a) $r = 0.065 \text{ m}$
b) $q = 5.78 \times 10^{-9} \text{ C}$

1.61
$q = 2.7 \times 10^{-8} \text{ C}$

1.62
$a = 1.229 \times 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

1.63
a) $\Delta V = -20.719 \text{ V}$
b) En el origen

1.64
a) $E = 0$
b) $V = 1.17 \times 10^{6} \text{ V}$
c) $E = 5.85 \times 10^{6} \frac{\text{N}}{\text{C}}$

1.65
a) $E_x = -\frac{dV}{dx} = -7 + 4xy$

$E_y = -\frac{dV}{dy} = 2x^2 - 3z^3$

$E_z = -\frac{dV}{dz} = -9yz^2$

b) $E = 55.54 \ \frac{\text{N}}{\text{C}}$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

2.1
$q = 5 \times 10^{-9}$ C

2.2
$L = 12.4745$ cm

2.3
$C = 0.2124$ nF

2.4
$q = 6 \times 10^{-9}$ C

2.5
$\sigma = 75 \times 10^{-7} \dfrac{\text{C}}{\text{m}^2}$

2.6
$r = 8.046$ cm

2.7
$d = 0.3336$ mm

2.8
$V = 24$ volts

2.9
$C = 12.5114$ nF

2.10
$q = 28.2$ μC

2.11
$k_d = 25$

2.12
$L = 10.9$ cm

2.13
$C = 12$ nF

2.14
$C_0 = 0.4551$ nF

2.15
$r = 8991783.668$ km

2.16
$q = 1801.6444$ pF

2.17
$A = 2.3065$ mm

2.18
$A = 0.11138$ m^2

2.19
$E_c = 3.8016$ J

2.20
$q = 300.3997$ mC

2.21
$N = 6.66666 \times 10^{13}$ electrones

2.22
$C_e = 0.84$ μFd

2.23
$C_e = 190.3797$ μFd

2.24
$C_e = 200$ μFd

2.25
$C_1 = C_2 = 720$ μFd

2.26
$C_e = 30$ μF



2.27
$C_e = 50\ \mu\text{F}$

2.28
$C_e = 207.5774\ \mu\text{F}$

2.29
$q = 14.1985 \times 10^{-6}\ \text{C}$

2.30
$C = 5.5744\ \mu\text{F}$

2.31
$V = 312.8455\ \text{V}$

2.32
$N_e = 1.3958333 \times 10^{15}$ electrones

2.33
$E_c = 0.0294\ \text{J}$

2.34
$E_c = 1.23366\ \text{J}$

2.35
$q = 3600\ \mu\text{C}$

2.36
$q_{c1} = q_{c2} = 10800\ \mu\text{C}$

2.37
$q_T = 25200\ \mu\text{C}$

2.38
$V_{C3} = 24\ \text{V}$

2.39
$V_{C2} = 36\ \text{V}$

2.40
$q_{C1} = 11520\ \mu\text{C}$

2.41
a) $V_{c1} = 38.4\ \text{V}$
b) $q_{C2} = 7680\ \mu\text{C}$

2.42
$C = 1.593\ \text{nF}$

2.43
$q = 6.2233 \times 10^{-5}\ \text{C}$
$C = 6.1166 \times 10^{-11}\ \text{F}$

2.44
$C_0 = 2.224 \times 10^{-9}\ \text{Fd}$
$k_d = 7.4373$

2.45
$q = 900\ \mu\text{C}$
$C = 4.5 \times 10^{-6}\ \text{Fd}$

2.46
$k_d = 74$

2.47
$\sigma = 34.9264\ \dfrac{\text{nC}}{\text{cm}^2}$

2.48
a) $C_e = 53.212\ \mu\text{Fd}$
b) $q_T = 6385.32\ \mu\text{C}$

2.49
a) $C_e = 26.6666\ \mu\text{Fd}$
b) $E_{Ce} = 191999.5\ \mu\text{J}$

2.50
$E_c = \dfrac{(\text{CV}^2)}{4}$

2.51
$d = 4.67\ \text{mm}$



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

3.1

a) $q = 0.999\ I_0\tau$

b) $q = I_0\tau$

3.2

$I = 5.729 \times 10^{-7}$ A

3.3

$v = 1.559 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.4

$v_d = 4.777 \times 10^{-4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3.5

$n = 5.699 \times 10^{24}\ \frac{e}{\text{m}^3}$

3.6

$t = 4.5714$ s

3.7

a) $q = 600$ C

b) $N = 3.744 \times 10^{21} e$

3.8

a) $\Delta q = 10.8874$ C

b) $I = 1.0887$ A

3.9

$J = 5.62 \times 10^{6}\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

3.10

a) $I = 126$ A

b) $J = 50.4 \times 10^{5}\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

3.11

$J = 1876.26240\ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$

3.12

$R = 0.01069\ \Omega$

3.13

$R = 173.24\ \Omega$

3.14

$r = 2.727 \times 10^{-3}$ m

3.15

a) $\rho = 1.7 \times 10^{-8}\ \Omega\text{m}$

b) Cobre

3.16

a) $L = 9.945$ m

b) $d = 3.788 \times 10^{-4}$ m

3.17

a) $L = 8.107$ m

b) $d = 0.5924$ mm

3.18

$I = 36.9047$ A

3.19

a) $q = 8347.739$ C

b) $N = 5.217 \times 10^{22}$ electrones

3.20

$R = 2.8104\ \Omega$

3.21

$\alpha = 9.8259 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$

3.22

$\Delta T = 13.49$ °C

3.23

$T = 908.8$ °C

3.24
a) $R = 7.104\ \Omega$
b) $0.833\ \text{A} \geqq I \geqq 0.7038\ \text{A}$

3.25
a) $P = 2970\ \text{W}$
b) $V = 990\ \text{V}$

3.26
a) $I = 0.472\ \text{A}$
b) $R = 268.8\ \Omega$

3.27
a) $I = 7.874\ \text{A}$
b) $R = 16.129\ \Omega$

3.28
a) $I = 0.2047\ \text{A}$
b) $q = 17688.18\ \text{C}$

3.29
$R = 0.4586\ \Omega$

3.30
a) $I = 625\ \text{A}$
b) $d = 50000\ \text{m}$

3.31
a) $I = 621.41\ \text{A}$
b) 10.616 km

3.32
a) $Q = 4269441.17\ \text{cal}$
b) $P = 1185.95\ \text{W} = 1.185\ \text{kW}$
c) $\$ = \$0.948$

3.33
a) 2.76 MW
b) $V = 526.315\ \text{kV}$

3.34
a) $I_e = 34.81\ \text{A}$
b) $P_e = 4421.05\ \text{W}$
c) $Q = 15849.28\ \text{cal}$

3.35
a) $I = 0.7874\ \text{A}$
b) $\$ = \$7.6$

3.36
a) $R = 1.9208\ \Omega$
b) $r = 0.578\ \Omega$

3.37
a) $R = 0.27\ \Omega$
b) $V = 9.45\ \text{V}$
c) $P = 110.25\ \text{W}$

3.38
a) Calentador $I = 12.5\ \text{A}$
b) Tostador $I = 6.25\ \text{A}$
c) Parrilla $I = 8.33\ \text{A}$

3.39
a) $R_{eq} = 720\ \Omega$
b) $I = 0.0347\ \text{A}$
c) $V_{R2} = 6.94\ \text{V}$

3.40
a) $R_{eq} = 71.287\ \Omega$
b) $P = 8.767\ \text{W}$
c) $I_{R3} = 0.15625\ \text{A}$

3.41
$R_1 = 200\ \Omega$; $R_2 = 100\ \Omega$

3.42
a) $R_{eq} = 82.3\ \Omega$
b) $I_T = 1.458$ A
c) $V_{R1} = 29.14$ V, $V_{R2} = 46.956$ V, $V_{R3} = 15.65$ V,
$V_{R4} = 31.3$ V, $V_{R5} = 43.71$ V
$I_{R1} = I_{R5} = 1.457$ A, $I_{R2} = 0.67$ A,
$I_{R3} = I_{R4} = 0.78$ A

3.43
a) $R_{eq} = 401.57\ \Omega$
b) $I_{R4} = 0.1321$ A
c) $V_{R1} = 53.78$ V

3.44
a) $R_{eq} = 25\ \Omega$
b) $I_{R4} = 0.1875$ A
c) $V_{R1} = 24$ V

3.45
$I_1 = 4.39$ A; $I_2 = -4.02$ A; $I_3 = 0.3717$ A

3.46
$I_1 = 0.45$ A; $I_2 = 1.1318$ A; $I_3 = 1.1318$ A

3.47
$I_1 = 3$ A; $I_2 = 2$ A; $I_3 = -1$ A

3.48
a) $I_{R1} = 0.6945$ A
b) $I_{R2} = 0.1894$ A
c) $I_{R3} = 0.884$ A

3.49
a) $I_{R1} = 1.063$ A
b) $I_{R2} = 0.6736$ A
c) $I_{R3} = 0.3894$ A

3.50
a) $I_1 = 0.2594$ A
b) $I_2 = 0.6698$ A
c) $I_3 = 0.9292$ A

3.51
a) $\tau = 16.38$ s
b) $q = 2.275 \times 10^{-4}$ C
c) $I = 1.0235 \times 10^{-5}$ A

3.52
a) $\tau = 13.16$ s
b) $\tau = 6.11$ s
c) $I_0 = 4.6875 \times 10^{-6}$ A
d) $I(t) = 1.4123 \times 10^{-5}$ A

3.53
a) $C = 1.333 \times 10^{-4}$ F
b) $I = 9.017 \times 10^{-6}$ A

3.54
a) $C = 1.333 \times 10^{-4}$ F
b) $q = 1.259 \times 10^{-3}$ C

3.55
a) $V_c = 7.56$ V
b) $t = 1.795 \times 10^{-4}$ s

3.56
$I = 0.227$ A

3.57
a) $R_{eq} = 12.94\ \Omega$
b) $I = 0.277$ A

3.58
a) $P_{suministrada} = 2121.88$ W
b) $E_{marcha} = 33944.4$ J





A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

4.1

$F = 1.925 \times 10^{-12}$ N

4.2

a) $B = 1.33$ T

b) $F = 6.66$ N

c) $\theta = 90°$

4.3

a) $F = 7.609 \times 10^{-13}$ N

b) $r = 2.989 \times 10^{-5}$ m

4.4

a) $a_n = 8.166 \times 109 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

b) $B = 1.325 \times 10^{-6}$ T

4.5

$v = 1.247 \times 10^{8} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

4.6

a) $r = 0.06535$ m

b) $\omega = 1.346 \times 10^{8} \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

c) $T = 4.66 \times 10^{-8}$ s

4.7

$\beta = 44.64$ mT

4.8

a) $\beta_x = -0.05$ T

b) $\beta_z = -0.075$ T

4.9

$a = 4.3254 \times 10^{-4} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4.10

$a_n = 1.7069 \times 10^{5} \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4.11

a) $B = 0.01032$ T

b) Saliendo de la página

4.12

a) $f = 1.45$ Hz

b) $v = 9.113 \times 10^{7} \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $T = 6.8946 \times 10^{-8}$ s

4.13

a) $\omega = 1.8 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

b) $r = 28888.8$ m

c) $x = 1.977 \times 10^{-4}$ m

4.14

$B = 0.457$ T

4.15

a) $F_{0a} = 0.0813$ N , entrando a la página

b) $F_{ab} = 0.0813$ N , hacia arriba

c) $F_{bc} = 0.0813$ N , saliendo de la página hacia abajo

4.16

$F = 0.05779$ N

4.17

$\theta = 7.48°$

4.18

$\beta = 0.091$ T

4.19

a) $B = 0.05322$ T

b) Perpendicular al conductor hacia arriba (90°)

4.20

a) $F = 2\times10^{-5}\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$

b) La fuerza es de atracción

4.21

$F = 7\times10^{-4}\ \text{N}$, hacia el conductor que conduce 30 A

4.22

$F = 1.1\times10^{-3}\ \dfrac{\text{N}}{\text{m}}$, hacia el conductor 1

4.23

a) De izquierda a derecha
b) $\beta = 0.109\ \text{T}$

4.24

a) $M = 0.0216\ \text{Nm}$

b) Giro contrario a las manecillas del reloj

4.25

a) $M = 0.0222\ \text{Nm}$

b) Giro contrario a las manecillas del reloj

4.26

a) $M = 1.95\ \text{Nm}$

b) Giro contrario a las manecillas del reloj

4.27

a) $I = 6.243\ \text{A}$

b) $\mu = 0.1103\ \text{Am}^2$

4.28

a) $M = 0.0237\ \text{Nm}$

b) Hacia la derecha

4.29

$\beta = 7\times10^{-5}\ \text{T}$, entrando en la página

4.30

$\beta = 1.256\times10^{-5}\ \text{T}$, saliendo de la página

4.31

$\beta = 2\times10^{-4}\ \text{T}$

4.32

$\beta = 2.714\times10^{-5}\ \text{T}$, hacia a la derecha

4.33

a) $\beta = 1.656\times10^{-4}\ \text{T}$

b) Entrando a la página

4.34

$\beta = 6.4147\times10^{-5}\ \text{T};\quad \theta = 171.39°$

4.35

$\beta = 2.459\times10^{-4}\ \text{T};\quad \theta = 31.36°$

4.36

a) $I = 31.645\ \text{A}$

b) Sentido hacia la izquierda

4.37

$\beta = 1\times10^{-4}\ \text{T}$, con un ángulo de cero grados

4.38

$\phi_B = 8.9619\times10^{-3}\ \text{Wb}$

4.39

$\phi_B = -0.02826\ \text{Wb}$

4.40

$\phi_B = 0.00255\ \text{Wb}$

4.41

$\phi_B = 1.6735\times10^{-7}\ \text{Wb}$

4.42

a) $\beta = 0.03204\ \text{T}$

b) $\phi_B = 9.06\times10^{-5}\ \text{Wb}$

4.43
a) $\beta = 160.22$ T
b) $\phi_B = 0.453$ Wb

4.44
$I = 4 \times 10^{-8}$ A

4.45
a) $\beta = 0.09272$ T
b) $\phi_B = 1.8206 \times 10^{-4}$ Wb

4.46
a) $\beta = 258.46$ T
b) $\phi_B = 0.1826$ Wb

4.47
$\beta = 0.1295$ T

4.48
$\theta = 18.72°$

4.49
$\beta = 1.8728$ T

4.50
a) $m = 2.549 \times 10^{-24}$ kg
b) $\omega = 21991.48\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

4.51
a) $\beta = 0.0125$ T
b) $\phi_\beta = -1.3198 \times 10^{-4}$ Wb

4.52
a) $\phi_B = -1.3125 \times 10^{-5}$ Wb
b) $\phi_B = -1.136 \times 10^{-5}$ Wb

4.53
a) $\beta = 3.82 \times 10^{-6}$ T
b) Entrando a la página.

4.54
$\theta = 60.108°$

4.55
$\beta = 4.6314 \times 10^{-12}$ T

4.56
a) $r = 0.3609$ m
b) $T = 3.2749 \times 10^{-8}$ s

4.57
a) $\beta = 0.054$ T
b) $\phi_B = 0.0152$ Wb



A continuación se da la respuesta a algunos de los problemas propuestos.

5.1
$\varepsilon = 0.95 \text{ mV}$

5.2
$\Phi_\beta = 0.0264 \text{ Wb}$

5.3
$t = 0.212 \text{ s}$

5.4
$\varepsilon = 24 \text{ V}$

5.5
$\Phi_\beta = 0.3652 \text{ Wb}$

5.6
$t = 0.525 \text{ s}$

5.7
$N = 115.2737 \text{ espiras}$

5.8
$\beta = 2.07499 \ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$

5.9
$t = 0.0353 \text{ s}$

5.10
$\Phi_{fin} = 25°$

5.11
$L = 9.64 \text{ cm}$

5.12
$\Phi_{fin} = 23.22°$

5.13
$\varepsilon = 55.751 \text{ V}$

5.14
$L = 11.45 \text{ cm}$

5.15
$\theta = 73.9°$

5.16
$\beta = 1.5673 \text{ T}$

5.17
$\beta = 18.2635 \text{ T}$

5.18
$N = 16.39416 \text{ espiras}$

5.19
$I = 0.7897 \text{ A}$

5.20
$\beta = 7.1619 \ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$

5.21
$N = 92.809 \text{ espiras}$

5.22
$I = 0.0821 \text{ A}$

5.23
$v = 1.7433 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

5.24
$F = 0.4666 \text{ N}$

5.25
$\varepsilon = 19.0 \text{ V}$

5.26
$\beta = 3.353377 \text{ T}$

5.27
$\Phi_\beta = 0.218332 \text{ Wb}$

5.28
$L = 9.3456$ cm

5.29
$\varepsilon = 2.6784\times10^{-8}$ V

5.30
$\varepsilon = 15.1104\times10^{-6}$ V

5.31
$L = 14.2122\times10^{-5}$ Hy

5.32
$L = 0.29994$ Hy

5.33
$l = 3.23$ cm

5.34
$N = 98.117$ espiras

5.35
$d = 33.59$ cm

5.36
$\varepsilon = -76\ \mu$Hy

5.37
a) $L_0 = 15.99$ mHy
b) $k_\beta = 308.9113$
c) $L = k_n L_0 = 308.913(15.99\times10^3\text{ Hy}) = 4.9395$ Hy

5.38
a) $N_s = 1140$ espiras
b) $I_s = 0.1894$ A

5.39
a) $\dfrac{Ne}{Ns} = 10$
b) $I_e = 0.2$ A

5.40
a) $I_e = 2$ a
b) $V_s = 28.2352$ V

5.41
$P_e = 105.8823$ W

5.42
$I_e = 1.5822$ A

5.43
$V_e = 60.1$ V

5.44
$P_p = 25.3846$ W

5.45
$Q = 6552.8064$ cal

5.46
a) $P = 63.1578$ W
b) $I_e = 0.5263$ A

5.47
a) $I_e = 0.386363$ A
b) $N_s = 442$ espiras

5.48
$\varepsilon = 9.2257$ V

5.49
$\varepsilon_{ins} = 3.4544$ V

5.50
$N = 418.2$ espiras